CLAUDE DESCHAMPS

MATHS PSI-PSI*

TOUT-EN-UN

C. DESCHAMPS
Y. GENTRIC
J.-M. CORNIL
M. VOLCKER
F. MOULIN
C. MULLAERT
B. MOREL
F. LUSSIER

MATHS
PSI-PSI*

TOUT-EN-UN

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, s'est achevée en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Depuis septembre 2013, les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires, ont bénéficié, durant leur scolarité au collège et au lycée, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une continuité, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.
En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants des ouvrages de référence clairs et précis complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avions alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis très largement imité), qui a remporté un grand succès.
En septembre 2013 ont été mis en place de nouveaux programmes des classes préparatoires et, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous avons récidivé : deux ouvrages « tout en un » (MPSI et PCSI-PTSI) proposent, aux étudiants de première année, un cours en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit, du nouveau programme des classes préparatoires.
Aujourd'hui ce nouveau « tout en un » PSI/PSI* prolonge, pour la seconde année, ces deux ouvrages et il conserve l'ambition, en mettant en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances, de proposer à l'étudiant une démarche pour s'approprier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.

En pratique, dans chaque chapitre :

- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée ou du programme de première année, illustrent chaque définition et permettent à l'étudiant de s'approprier cette nouvelle notion.
- Les propositions et théorèmes sont énoncés et suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications. En outre, leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement, à la suite des énoncés, la rédaction complète de ces démonstrations mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier ou compléter son travail personnel.

- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de ces propriétés.
- Dans chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher au fur et à mesure de son apprentissage et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.
- Régulièrement l'étudiant trouvera des « point méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de son problème. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » exemples et exercices l'illustrant.
- À l'issue de chaque chapitre, figurent des exercices souvent plus ambitieux, demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maitrisé. Certains plus difficiles sont signalés par des étoiles ; les solutions détaillées de tous ces exercices complémentaires sont données.
- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur... seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Claude Deschamps et François Moulin

Table des matières

Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Compléments d'algèbre linéaire



Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Produit et somme d'espaces vectoriels

1 Produit d'espaces vectoriels

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Proposition 1

Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On définit les lois suivantes sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$:

- **l'addition** telle que pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ et tout vecteur $(y_1, \ldots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p),$$

- la **loi externe** telle que pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$\lambda.(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_p).$$

Muni de ces deux lois, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit**.

Principe de démonstration. Posons $F = E_1 \times \cdots \times E_p$. Démonstration page 28

D'après la définition d'un espace vectoriel, il s'agit de vérifier :

- d'une part que l'addition définie sur F est associative, commutative, possède un élément neutre et que tout élément de F admet un opposé,
- d'autre part que pour tout $(x, y) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

(1) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$ (3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(2) $1.x = x$ (4) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

Notation On note aussi $\prod_{k=1}^{p} E_k$ au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Proposition 2

Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel produit $\prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Principe de démonstration. En prenant une base de chacun des espaces vectoriels, on peut construire une base de l'espace vectoriel produit. Démonstration page 28

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_1, \dots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. La **somme** de ces sous-espaces vectoriels est définie par :

$$E_1 + \cdots + E_p = \{x_1 + \cdots + x_p \,;\, (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\}.$$

Notation On note aussi $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ au lieu de $E_1 + \cdots + E_p$.

Remarque La définition 1 signifie que $E_1 + \cdots + E_p = \operatorname{Im} \varphi$, avec

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p. \end{array}$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises cette application φ dans ce paragraphe et celui sur les sommes directes.

Proposition 3

Avec les notations précédentes, $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

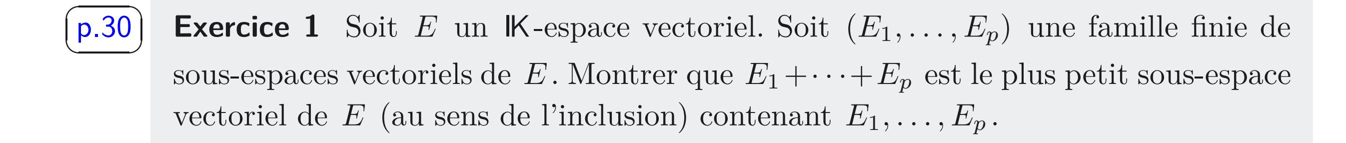
Principe de démonstration. Démonstration page 29

Compte tenu de la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que φ est linéaire.

Attention

- On rappelle qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, mais qu'une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.
- Il importe de bien distinguer :
  - ∗ d'une part $\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k$, qui est le plus petit *sous-ensemble* de E contenant $E_1, \dots, E_p$,

* d'autre part $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$, qui est le plus petit *sous-espace vectoriel* de E contenant $E_1, \dots, E_p$, comme nous le verrons dans l'exercice suivant.



p.30

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E_1 + \dots + E_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $E_1, \dots, E_p$.

3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Nous allons généraliser la notion de somme directe, vue en première année dans le cas de deux sous-espaces vectoriels seulement, au cas d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Définition 2

Soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On dit que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est une **somme directe**, ou que les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ sont en **somme directe**, si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad x_1 + \dots + x_p = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_p = 0.$$

Dans ce cas, on note $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$.

Remarque Une somme ne comportant qu'un seul sous-espace vectoriel de E (cas $p = 1$) est évidemment une somme directe.

Proposition 4

Les sous-espaces vectoriels $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe si, et seulement si, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow & E \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_p \end{array}$$

est injective.

Démonstration.

Nous avons déjà établi dans la proposition 3 de la page précédente que l'application φ est linéaire. La définition 2 signifie que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, c'est-à-dire que φ est injective. □

Rappel de première année Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Attention Contrairement au cas de deux sous-espaces vectoriels, lorsque l'on considère p sous-espaces vectoriels avec $p \geqslant 3$, le fait que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$ ne suffit pas à garantir que la somme est directe, comme nous le verrons dans l'exercice 2.

Complément L'exercice 1.2 de la page 41 fournit une caractérisation par des intersections qui étend au cas $p \geqslant 3$ la caractérisation vue en première année dans le cas $p = 2$.

p.30

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2) une famille libre de E (on suppose donc $\dim(E) \geqslant 2$). Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

1. Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.
2. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.

Remarque Au passage, l'exercice 2 fournit également un exemple de trois sous-espaces vectoriels qui ne sont pas en somme directe, mais qui sont deux à deux en somme directe.

Proposition 5

Soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On a :

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

De plus, la somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe si, et seulement si,

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Principe de démonstration. Appliquer le théorème du rang à l'application φ définie dans la proposition 4 de la page précédente. Démonstration page 30

4 Décomposition en somme directe

Définition 3

Soit E un espace vectoriel et $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On dit que cette famille réalise une **décomposition en somme directe** de E si $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E$.

Concrètement l'intérêt de décomposer l'espace vectoriel E en une somme directe de sous-espaces vectoriels est que tout vecteur se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs appartenant à chacun des sous-espaces.

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel et $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k = E$

(ii) pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \in E_1 \times \cdots \times E_p$ telle que :
$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k.$$

Principe de démonstration. Traduire ces deux assertions à l'aide de l'application φ.

Démonstration page 31

Cas particulier d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces

Le cas particulier d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces a déjà été traité en première année. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** si $E = F \oplus G$.

On rappelle qu'étant donné deux sous-espaces vectoriels F et G de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$ il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$;

(iii) $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

Remarques

- L'équivalence entre (i) et (ii) a été généralisée par la proposition 6.
- Généraliser l'équivalence entre (i) et (iii) est moins aisé. Comme expliqué après la définition 2 de la page 4, considérer des intersections deux à deux ne suffit pas. L'exercice 1.2 de la page 41 fournit une généralisation de la deuxième propriété dans (iii).

Exemples de supplémentaires dans le cours de première année

1. Si p est un projecteur de E, c'est-à-dire si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors :
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$$
et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

On a de plus $\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)=\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}(p-\mathrm{Id}_E)=\operatorname{Ker} p$. Concrètement, pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$x=p(x)+\big(x-p(x)\big),$$

avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x-p(x) \in \operatorname{Ker} p$.

2. Si s est une symétrie de E, c'est-à-dire si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s=\mathrm{Id}_E$, alors :

$$E=\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$$

et s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

Concrètement, pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$x=\frac{1}{2}\big(x+s(x)\big)+\frac{1}{2}\big(x-s(x)\big)$$

avec $\frac{1}{2}\big(x+s(x)\big) \in \operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ et $\frac{1}{2}\big(x-s(x)\big) \in \operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

5 Fractionnement d'une base, base adaptée

Définition 4

Si $\mathcal{F}_1=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{F}_2=(f_1,\ldots,f_m)$ sont deux familles finies de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la **concaténation** de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, notée $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, est la famille de vecteurs $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_m)$.

Remarque On étend naturellement cette définition au cas d'un nombre fini de familles finies de vecteurs de E.

En première année, on a vu que si $(e_1,\ldots e_n)$ est une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ et $\operatorname{Vect}(e_{k+1},\ldots,e_n)$ sont en somme directe.
On peut reformuler ce résultat sous la forme abrégée suivante : si la famille libre $\mathcal{F}$ s'écrit $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_2)$ sont en somme directe.
Cette écriture abrégée est commode lorsqu'il s'agit de « découper » une famille de vecteurs en plusieurs sous-familles.
Nous conviendrons dans tout ce qui suit que la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ peut s'écrire $(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_p)$ lorsqu'elle est obtenue en concaténant les familles de vecteurs $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_p$.

Proposition 7 (Fractionnement d'une base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. On suppose que $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_p)$.
Si pour tout k, on note $E_k=\operatorname{Vect}(\mathcal{B}_k)$, alors : $E=\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Principe de démonstration. Utiliser le fait que la famille $\mathcal{B}$ est libre pour montrer que la somme est directe et le fait qu'elle est génératrice pour montrer que la somme est égale à E.

Démonstration page 31

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **base adaptée au sous-espace vectoriel** F toute base $\mathcal{B}$ de la forme $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ avec $\mathcal{B}_1$ base de F.

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$. Une base $\mathcal{B}$ de E est dite **adaptée à la décomposition en somme directe** $(E_1 \ldots, E_p)$, si elle est de la forme $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$, où pour tout k, la famille $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k.

Terminologie On dit aussi que la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, au lieu de dire que $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition en somme directe $(E_1 \ldots, E_p)$.

Remarque Si la décomposition en somme directe a été obtenue par fractionnement d'une base $\mathcal{B}$, cette base est évidemment adaptée à cette décomposition en somme directe.

Le but de la proposition suivante est de montrer l'existence d'une base adaptée pour toute décomposition en somme directe et de donner un moyen d'obtenir une telle base.

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $E = \bigoplus_{i=k}^{p} E_k$, où les E_k sont des sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathcal{B}_k$ est, pour tout k, une base de E_k, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E.

Principe de démonstration. C'est une famille génératrice à $\dim E$ éléments.

Démonstration page 32

6 Somme directe et applications linéaires

Dans le cours de première année, il a été démontré qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Nous rappelons sans démonstration ce résultat ci-dessous.

Rappel Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour toute famille $(f_1, \ldots, f_n) \in F^n$ il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) = u(f_i).$$

Il a également été démontré que si $E = E_1 \oplus E_2$ alors une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2. La proposition ci-dessous étend ce résultat au cas où $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ tel que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ (décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels de E), F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ainsi que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, une application linéaire $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.

Il existe alors une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad u_{|E_i} = u_i.$$

Démonstration page 32

Bilan Nous disposons donc désormais de deux modes de détermination d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. L'application linéaire u est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.
2. L'application linéaire u est entièrement déterminée par ses restrictions à une décomposition en somme directe de E.

II Matrices et endomorphismes

1 Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Rappels On rappelle ci-dessous comment sont définis les puissances successives d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

- Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit A^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = A^{k-1} \times A.$$

  On en déduit facilement que :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell}.$$

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit de même u^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$u^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u^k = u^{k-1} \circ u.$$

  On en déduit de même que :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k = u^{k+\ell}.$$

Définition 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme qui s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on définit la matrice carrée $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

Exemple Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N = M^2 - 3M + 2I_n$. On a alors $N = P(M)$ avec $P = X^2 - 3X + 2$.

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$ est linéaire.

Démonstration. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ (comme les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont nulles à partir d'un certain rang, ces sommes sont finies). On a :

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + b_k) A^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k + \sum_{k=0}^{+\infty} n_k A^k = \lambda P(A) + Q(A).\end{aligned}$$

On a prouvé que φ_A est linéaire. □

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad P(A)Q(A) = (PQ)(A).$$

Démonstration. On écrit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. On a donc :

$$\begin{aligned}P(A)Q(A) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, A^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell\, A^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} a_k b_\ell\, A^k A^\ell = (PQ)(A).\end{aligned}$$ □

Exemple Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N = M^2 - 3M + 2I_n$. On a vu que $N = P(M)$ avec $P = X^2 - 3X + 2$. Comme $P = (X-1)(X-2)$, on a $N = (M - I_n)(M - 2I_n)$.

Définition 8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme qui s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$, on définit l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k.$$

Proposition 12

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- L'application $\varphi_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ est linéaire.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.

Démonstration. Les preuves sont analogues à celles de la proposition 10 de la page précédente et de la proposition 11 de la page ci-contre. □

Faisons maintenant le lien entre polynômes d'endomorphismes en dimension finie et polynômes de matrices.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$ ainsi qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Si l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, alors l'endomorphisme $P(u)$ a pour matrice $P(A)$ relativement à cette base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^k a pour matrice A^k dans $\mathcal{B}$. On en déduit par combinaisons linéaires que $P(u)$ a pour matrice $P(A)$ dans $\mathcal{B}$. □

Définition 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on dit que P est un **polynôme annulateur** de u si $P(u) = 0$.

On définit de même un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples

- Le polynôme X est annulateur de l'endomorphisme nul (respectivement de la matrice nulle).
- Le polynôme $X - 1$ est annulateur de Id_E (respectivement de I_n).
- Le polynôme $(X-a)^2$ est annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- Le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X - d_k)$ est annulateur de la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Remarque Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) alors tout polynôme multiple de P est également annulateur.

Certains résultats déjà connus peuvent également être reformulés en termes polynômes annulateurs.

Exemples

1. Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p^2 = p$ c'est-à-dire si, et seulement si, le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de p.
2. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie de E si, et seulement si, $s^2 = \mathrm{Id}_E$ c'est-à-dire si, et seulement si, le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de s.



p.32 **Exercice 3** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A non nul et de degré au plus n^2.

2 Matrices par blocs et opérations

Écriture par blocs

Lorsque l'on écrit une matrice, il est parfois pratique, plutôt que d'écrire chacun des coefficients, d'écrire des sous-matrices. C'est ce que l'on appelle **écriture par blocs de la matrice**.
Par exemple, on peut écrire une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par blocs à l'aide de quatre sous-matrices en choisissant un indice de ligne n_1 et un indice de colonne p_1 qui marquent la fin du premier bloc.
Étant donné $n_1 \in [\![1, n-1]\!]$ et $p_1 \in [\![1, p-1]\!]$, la matrice :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} & m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} & m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \\ \hline m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} & m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} & m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{array}\right)$$

se divise, comme indiqué ci-dessus, en quatre « blocs ». Si l'on pose :

$$A = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

alors, par convention la matrice M s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Exemple Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

On peut écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de plusieurs manières :

- par exemple, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$,

  ce qui revient à choisir $n_1 = p_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$

- ou en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, ce qui

  revient à choisir $n_1 = 1$ et $p_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$

- ou toute autre possibilité ...

Il est parfois commode de nommer les blocs avec deux indices : $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, ... au lieu de A, B, ...

On peut en effet écrire une matrice M par blocs d'une façon plus générale en choisissant deux entiers $q \in [\![1, n]\!]$ et $r \in [\![1, p]\!]$, ainsi que des entiers $n_0, \dots, n_q, p_0, \dots, p_r$ tels que

$$0 = n_0 < \cdots < n_q = n \quad \text{et} \quad 0 = p_0 < \cdots < p_r = p.$$

Dans ce cas il est naturel de noter $M_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$ les $q \times r$ blocs obtenus. On écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{q,1} & \cdots & M_{q,r} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\forall (i,j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!] \quad M_{i,j} = (m_{k,\ell})_{(k,\ell) \in [\![n_{i-1}+1, n_i]\!] \times [\![p_{j-1}+1, p_j]\!]} \,.$$

Cas particuliers : matrices diagonales et triangulaires par blocs

Dans ce paragraphe on supposera que M est une matrice carrée.

Définition 10

On dit que M est une matrice **diagonale par blocs** si elle admet une écriture par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, c'est-à-dire avec les notations précédentes une écriture par blocs avec p^2 blocs (on a $q = r = p$) et où les blocs $M_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont tous nuls.

Notation

On convient de noter $M = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p)$ la matrice M décrite ci-dessus.

Définition 11

On dit que M est une matrice **triangulaire supérieure par blocs** si elle admet une écriture par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, c'est-à-dire avec les notations précédentes une écriture par blocs avec p^2 blocs (on a $q = r = p$) et où les blocs $M_{i,j}$ pour $i > j$ sont tous nuls.

Notation Notre convention est de noter « $*$ » dans une matrice lorsqu'il n'y a aucune contrainte sur un coefficient (ou un bloc).

Remarques

- On définit de manière analogue la notion de matrice **triangulaire inférieure par blocs**. On dit qu'une matrice est **triangulaire par blocs** si elle est triangulaire supérieure par blocs ou triangulaire inférieure par blocs.
- Une matrice diagonale par blocs est à la fois triangulaire supérieure et inférieure par blocs.

Opérations par blocs

L'addition et le produit par blocs découlent directement de la définition de l'addition et du produit matriciel.

- *Addition par blocs.* Soit A et B deux matrices de même taille écrites par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}.$$
Si pour tout i et j les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de même taille, alors le calcul de la matrice $C = A+B$ peut s'effectuer par blocs, ce qui mène à l'écriture par blocs suivante :
$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,p} \end{pmatrix}$$
avec $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}\,.$$
- *Produit par blocs.* Soit A et B deux matrices écrites par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$
Si les tailles des blocs sont compatibles, c'est-à-dire que pour tout i, j et k le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$, alors le calcul de la matrice $C = A\,B$ peut s'effectuer par blocs, ce qui mène à l'écriture par blocs suivante :
$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$
avec $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}\,.$$

Exemple Le produit de deux matrices diagonales par blocs $A = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p)$ et $B = \mathrm{Diag}(B_1, \ldots, B_p)$ (avec des blocs de taille compatibles) est donné par :
$$AB = \mathrm{Diag}(A_1 B_1, \ldots, A_p B_p).$$

p.32 **Exercice 4** Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et D pour que M soit inversible et dans ce cas expliciter M^{-1}.

Indication : on pourra commencer par exprimer le produit par blocs de M par une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ compatible, puis examiner à quelles conditions il existe une matrice N telle que $MN = I_{p+q}$.

3 Sous-espace stable et endomorphisme induit

Définition 12

Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est dit **stable** par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F \quad u(x) \in F.$$

Dans ce cas on dit que $u_F : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est l'**endomorphisme induit** par u sur F.

Remarques

- Il est évident que u_F est un endomorphisme de F.
- Il est évident que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par u.

Attention Ne pas confondre :

- l'endomorphisme induit par u sur F, noté u_F, qui appartient à $\mathcal{L}(F)$ et qui n'a de sens que si F est stable par u ;
- la restriction de u à F, notée $u_{|F}$, qui a toujours un sens et qui appartient à $\mathcal{L}(F, E)$.

Exemple Si h est une homothétie de E, c'est-à-dire si $h = \lambda \operatorname{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors tout sous-espace vectoriel F est stable par h et l'endomorphisme induit est $h_F = \lambda \operatorname{Id}_F$.

Terminologie Une droite stable est un sous-espace stable de dimension 1.

p.33 **Exercice 5** Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ qui laisse toutes les droites de E stables est une homothétie.

Proposition 14

Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

Démonstration page 34

Exemple Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $u \circ u^2 = u^3 = u^2 \circ u$, l'endomorphisme u laisse $\operatorname{Im} u^2$ et $\operatorname{Ker} u^2$ stables. Plus généralement, si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors u commute avec $P(u)$ et donc $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u.

Proposition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. Un endomorphisme u de E laisse stable F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme induit par u sur F.

Principe de démonstration. Le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $u(e_j) \in F$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on regarde donc les p premières colonnes de la matrice.

Démonstration page 34

Remarques

- Si l'on note $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_G)$, alors G est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

  Dans ce cas, D est la matrice dans la base $\mathcal{B}_G$ de l'endomorphisme induit par u sur G.
- L'endomorphisme u stabilise donc F et G si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Une preuve analogue permet de généraliser ce résultat à une décomposition en somme directe avec p sous-espaces vectoriels.

Généralisation Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels non nuls de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

- Alors $u \in \mathcal{L}(E)$ laisse stable chaque E_k si, et seulement si, sa matrice dans une base adaptée à cette somme est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

  où, pour tout k, la matrice A_k est carrée de taille $\dim E_k$.

- Si dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, l'endomorphisme u a une matrice triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

  où, pour tout k, la matrice A_k est carrée de taille $\dim E_k$, alors le seul E_k pour lequel on peut dire, sans approfondir l'étude, qu'il est stable par u est E_1. Cependant, on peut également dire en utilisant la proposition 15 de la page précédente, que $E_1 \oplus E_2$ est stable par u, ou plus généralement que $\bigoplus_{k=1}^{j} E_k$ est stable par u, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

4 Matrices semblables

Définition 13

Les matrices A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Remarque *A priori* il faudrait dire pour l'instant dans la définition « A est semblable à A' », mais comme nous le verrons dans l'exercice 6, cette relation est symétrique donc on peut dire « A et A' sont semblables ».

p.34 **Exercice 6** Montrer que la relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

p.35 **Exercice 7** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer toutes les matrices semblables à λI_n.

Proposition 16

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

Principe de démonstration. Interpréter la définition comme un changement de bases.

Démonstration page 35

p.35

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

p.35

Exercice 9 Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition 17

Deux matrices semblables ont même rang.

Principe de démonstration. Démonstration page 36

Multiplier une matrice par une matrice inversible laisse le rang inchangé.

Attention La réciproque de la proposition 17 est fausse. Deux matrices peuvent avoir même rang sans être semblables. En effet, la seule matrice semblable à I_n est I_n (voir exercice 7 de la page ci-contre), mais toutes les matrices inversibles sont de rang n, donc ont même rang que I_n. Par exemple, les matrices I_n et $2\,I_n$ ont même rang mais ne sont pas semblables.

5 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 14

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **trace de la matrice** A le scalaire $\operatorname{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 18

L'application $A \mapsto \operatorname{Tr}(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

L'application trace est clairement à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrons qu'elle est linéaire.

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. En notant $C = \lambda A + \mu B$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$c_{i,i} = \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \lambda \operatorname{Tr}(A) + \mu \operatorname{Tr}(B). \end{aligned}$$

□

Proposition 19

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}\left({}^tA\right)$.

Démonstration. Comme A et ${}^tA$ ont mêmes coefficients diagonaux, elles ont même trace. □

Proposition 20

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Principe de démonstration. En exprimant chacun des deux membres de l'égalité comme une double somme, on constatera qu'il s'agit simplement de permuter les deux symboles Σ.

Démonstration page 36

Proposition 21

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Démonstration. Si A et A' sont semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

D'après la proposition 20, on a $\operatorname{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{Tr}\left((AP)P^{-1}\right)$.

On en déduit après simplification que $\operatorname{Tr}(A') = \operatorname{Tr}(A)$. □

Attention Deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et A' ne sont pas semblables car elles n'ont pas même rang (en effet $\operatorname{rg} A = 2$ et $\operatorname{rg} A' = 1$). On a pourtant :

$$\operatorname{Tr}(A) = 0 = \operatorname{Tr}(A').$$

La proposition précédente rend légitime la définition ci-dessous.

Définition 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. La **trace de l'endomorphisme** u est la trace de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

p.36 **Exercice 10** Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

III Compléments sur les déterminants

1 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

On sait déjà que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, qui peuvent être vus comme des blocs carrés d'ordre 1. Le but de cette partie est d'étendre ce résultat au cas plus général des matrices triangulaires par blocs.

Proposition 22

Soit p, q dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 36

On factorise $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = M_1 M_2$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} I_p & * \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, puis on calcule le déterminant de M_1 et celui de M_2 par développements successifs par rapport à des rangées.

Remarque Nous avons énoncé cette proposition pour une matrice triangulaire supérieure par blocs avec 4 blocs, mais une récurrence immédiate permet d'étendre ce résultat au cas d'une matrice triangulaire supérieure par blocs quelconque.

Si la matrice carrée M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$, où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

Comme le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on étend également ce résultat au cas des matrices triangulaires inférieures par blocs.

Si la matrice carrée M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & A_p \end{pmatrix}$, où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

p.37 **Exercice 11** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Indication : en opérant sur les lignes et les colonnes on peut se ramener à un déterminant triangulaire par blocs.

2 Exemples de calcul de déterminant.

Dans cette partie nous donnons quelques exemples de calcul de déterminants. L'expression factorisée d'un déterminant de Vandermonde donnée dans la proposition 23 est à connaître. Ce n'est pas le cas des autres exemples que nous présenterons sous forme d'exercices et qui nous permettront d'illustrer diverses méthodes de calcul de déterminants.

Proposition 23 (Déterminant de Vandermonde)

Étant donné des scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_n$, le déterminant d'ordre $n+1$ défini par :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

est appelé **déterminant de Vandermonde** relatif à la liste $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et vaut :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 37

On traite d'abord le cas où les x_k ne sont pas deux à deux distincts. Dans l'autre cas, la fonction $x \mapsto V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ est polynomiale de degré n et l'on peut exhiber ses racines et exprimer son coefficient dominant, ce qui mène à une relation de récurrence.

Corollaire 24

Le déterminant de Vandermonde $V(x_0, \ldots, x_n)$ est non nul si, et seulement si, les scalaires $(x_0, \ldots, x_n)$ sont distincts deux à deux.

p.38 **Exercice 12** Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

(il y a des a sur la diagonale et des b partout ailleurs).

Indication : on peut procéder par opérations sur les lignes et les colonnes en commençant par remarquer que la somme par rangée est constante.

p.38

Exercice 13 (Déterminant tridiagonal)

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par D_n le déterminant de la matrice $n \times n$ de terme général $m_{i,j}$ défini par $m_{i,i} = a$, $m_{i,i+1} = c$, $m_{i,i-1} = b$, les autres termes étant nuls, c'est-à-dire :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

1. Pour $n \geqslant 3$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.
2. Calculer D_1 et D_2.
3. En déduire la valeur de D_n dans les cas suivants :
   (a) $a = 5$, $b = 1$, $c = 6$;
   (b) $a = 2$, $b = c = 1$.

p.39

Exercice 14

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $b \neq c$. Calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & c & \cdots & \cdots & c \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

(il y a des a sur la diagonale, des b en dessous et des c au-dessus).

Indication : on pourra considérer :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & \cdots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x & c+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix},$$

montrer que f est une fonction affine de x et conclure grâce à des valeurs particulières bien choisies.

Point méthode

Pour calculer un déterminant purement numérique on dispose de l'algorithme du pivot de Gauss (vu en première année). Dans un cadre plus général, il n'y a pas de méthode systématique. Sans prétendre à l'exhaustivité, on peut envisager notamment :

- d'opérer sur les lignes et les colonnes pour obtenir un déterminant plus simple à calculer (voir l'exercice 11 de la page 21 ou l'exercice 12 de la page 22)
- ou de faire apparaître ce déterminant comme une valeur particulière d'une fonction (le plus souvent polynomiale) que l'on sait exprimer (voir la preuve de la proposition 23 de la page 22 et l'exercice 14 de la page précédente),

mais il existe bien entendu d'autres moyens : dans la preuve de la proposition 22 de la page 21 on utilise un produit par blocs, dans l'exercice 13 de la page précédente on procède par développements successifs pour obtenir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, etc.

Attention Ne pas croire que tout calcul littéral de déterminant d'ordre n se fait par récurrence; c'est vrai dans la preuve de la proposition 23 de la page 22 ou dans l'exercice 13 de la page précédente par exemple, mais ce n'est pas toujours le cas (voir l'exercice 12 de la page 22).

IV Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Définition 16

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x-2y+z \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$.
2. L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application $\varphi_\alpha: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Propriété Si E est de dimension finie, on sait que :

$$\dim \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E.$$

Par conséquent, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E est de même dimension que E.

Interprétation matricielle Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$. La matrice d'une forme linéaire φ relative à la base $\mathcal{B}$ est la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_i = \varphi(e_i).$$

Cette matrice A n'est autre que la matrice de l'application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ relative à la base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ E et à la base canonique (1) de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$.

Exemple La forme linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x - 2y + z \end{array}$ sur $\mathbb{K}^3$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

Définition 17

On appelle **hyperplan** d'un espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1.

Cette définition ne requiert pas que l'espace vectoriel E soit de dimension finie. On notera que si $E = \{0\}$, il n'y a aucun hyperplan de E et que si E est de dimension 1, le sous-espace vectoriel $\{0\}$ est l'unique hyperplan de E. Lorsque E est de dimension finie, la proposition 25 donne une caractérisation simple des hyperplans de E.

Proposition 25

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

Démonstration.

- Si H admet un supplémentaire D de dimension 1 alors $\dim H + \dim D = \dim E$ et donc $\dim H = n - 1$.
- Réciproquement si $\dim H = n - 1$, soit D un supplémentaire de H dans E. On a $\dim H + \dim D = \dim E$ et donc $\dim D = 1$. □

Exemples

- Si $\dim E = 2$, les hyperplans sont les droites de E.
- Si $\dim E = 3$, les hyperplans sont les plans de E.

La caractérisation donnée par la proposition 26 de la page suivante est valable même si E n'est pas de dimension finie.

Proposition 26

Une partie H d'un espace vectoriel E est un hyperplan si, et seulement si, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Principe de démonstration.

- Si H est un hyperplan, il existe $\delta \in E$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(\delta)$; considérer $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que si $x = h + \lambda\delta$, avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\varphi(x) = \lambda$.
- Si $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$, considérer δ tel que $\varphi(\delta) \neq 0$ et montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(\delta)$.

Démonstration page 40

On peut retenir de la démonstration de la proposition 26 la propriété suivante.

Propriété Soit H un hyperplan de E et δ un vecteur non nul de E. On a $H \oplus \mathrm{Vect}(\delta) = E$ si, et seulement si, $\delta \notin H$.

En effet si $\delta \in H$, il est clair que H et $\mathrm{Vect}(\delta)$ ne peuvent être supplémentaires et le cas $\delta \notin H$ a été traité au cours de la preuve de la proposition 26.
Nous reprenons ici les exemples donnés après la définition 16 de la page 24.

Exemples

1. L'ensemble $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\right\}$ est un un hyperplan de $\mathbb{K}^3$.
2. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Ces exemples permettent de comprendre la notion d'équation d'hyperplan que nous allons définir maintenant et celle, en dimension finie, d'équation d'un hyperplan relativement à une base qui en découle.

Définition 18

Soit E un espace vectoriel. On appelle **équation de l'hyperplan *H*** toute égalité de la forme $\varphi(x) = 0$ où φ est une forme linéaire non nulle de noyau H.

Interprétation matricielle Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ ainsi que H un hyperplan de E.
Si φ est une forme linéaire non nulle de E de noyau H, notons $A = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \end{pmatrix}$ la matrice (ligne) de φ relative à la base B et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice (colonne) des composantes du vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$; alors l'équation $\varphi(x) = 0$ s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ ou encore plus simplement $AX = 0$.
On appelle **équation de l'hyperplan *H* relativement à la base $\mathcal{B}$** toute égalité de la forme ci-dessus.

Exemples

- Si $\dim E = 2$, dans la base $\mathcal{B}$ toute droite a une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1, a_2) \neq (0,0)$$

  et réciproquement toute équation de la forme ci-dessus définit une droite.
- Si $\dim E = 3$, dans la base $\mathcal{B}$ tout plan a une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$$

  et réciproquement toute équation de la forme ci-dessus définit un plan.

Proposition 27

Soit φ est une forme linéaire non nulle de E alors toute forme linéaire ψ de E qui s'annule sur le noyau de φ est proportionnelle à φ.

Démonstration. Soit $H = \operatorname{Ker} \varphi$. Comme $\varphi \neq 0$, il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$. On a donc $E = H \oplus \operatorname{Vect}(v)$. Soit ψ une forme linéaire qui s'annule sur H. Posons $\alpha = \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$. L'application $f = \psi - \alpha\varphi$ est linéaire, nulle sur H et sur $\operatorname{Vect}(v)$ donc $f = 0$. On en déduit que $\psi = \alpha\varphi$. □

Corollaire 28

Deux équations définissent le même hyperplan si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

Démonstration. Soit H_1 un hyperplan d'équation $\varphi_1(x) = 0$ et H_2 un hyperplan d'équation $\varphi_2(x) = 0$. On a donc $\varphi_1 \neq 0$ et $\varphi_2 \neq 0$.

- Si $H_1 = H_2$ alors on a d'après la proposition 27 l'existence d'un scalaire α tel que $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$. De plus $\alpha \neq 0$ car $\varphi_1 \neq 0$. Par conséquent les équations $\varphi_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x) = 0$ sont bien proportionnelles.
- Réciproquement, il est clair que si les deux équations sont proportionnelles, elles sont équivalentes et définissent donc bien le même sous-ensemble de E. □

p.40

Exercice 15 Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on considère p hyperplans avec $1 \leqslant p \leqslant n$.

Si F est l'intersection de ces hyperplans, montrer que $\dim F \in [\![n-p, n-1]\!]$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- Vérifions les propriétés de l'addition.
  Montrons l'associativité. Soit $(x,y,z) \in F^3$. On a :
  $$(x+y)+z = \big((x_1+y_1)+z_1,\dots,(x_p+y_p)+z_p\big)$$
  $$= \big(x_1+(y_1+z_1),\dots,x_p+(y_p+z_p)\big),$$
  car l'addition dans chaque E_k est associative. Ainsi :
  $$(x+y)+z = x+(y+z).$$
  On montre de même que l'addition dans F est commutative, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in F^2$:
  $$x+y = y+x,$$
  en utilisant la commutativité dans chaque E_k.
  De plus, $0=(0,\dots,0)$ est élément neutre et tout $x \in F$ admet pour opposé :
  $$-x = (-x_1,\dots,-x_p).$$
- Chacune de ces quatre propriétés de la multiplication par un scalaire se déduit des propriétés correspondantes dans les E_k, comme pour la commutativité et l'associativité de l'addition.

Proposition 2 Il ne s'agit pas d'une preuve par récurrence.

On commence par traiter le cas $p=2$, puis on passe au cas général.

- *Preuve dans le cas* $p=2$. On note $d_1=\dim(E_1)$ et $d_2=\dim(E_2)$ et l'on considère $(f_1,\dots,f_{d_1})$ une base de E_1 et $(g_1,\dots,g_{d_2})$ une base de E_2. Montrons que la famille $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d_1+d_2}$ définie par :
  $$e_k = \begin{cases} (f_k,0) & \text{si } 1\leqslant k\leqslant d_1\,; \\ (0,g_{k-d_1}) & \text{si } d_1+1\leqslant k\leqslant d_1+d_2 \end{cases}$$
  est une base de $E_1\times E_2$.

  * Soit $(\lambda_1,\dots\lambda_{d_1+d_2}) \in \mathbb{K}^{d_1+d_2}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{d_1+d_2}\lambda_k e_k = 0$. On a donc par définition de $\mathcal{B}$:
    $$\left(\sum_{k=1}^{d_1}\lambda_k f_k, \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2}\lambda_k g_{k-d_1}\right) = 0.$$
    Ainsi :
    $$\sum_{k=1}^{d_1}\lambda_k f_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2}\lambda_k g_{k-d_1} = 0.$$
    Les familles $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant d_1}$ et $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant d_2}$ étant libres, on en déduit :
    $$\forall k \in [\![1,d_1+d_2]\!] \quad \lambda_k = 0,$$
    ce qui prouve que la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d_1+d_2}$ est libre.

∗ Soit $y \in E_1 \times E_2$. En écrivant $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$ et en décomposant le vecteur y_1 dans la base $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1}$ et le vecteur y_2 dans la base $(g_k)_{d_1+1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$, on a :

$$y_1 = \sum_{k=1}^{d_1} \lambda_k f_k \quad \text{et} \quad y_2 = \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} \lambda_k g_{k-d_1},$$

avec $(\lambda_1, \ldots \lambda_{d_1+d_2}) \in \mathbb{K}^{d_1+d_2}$. Ainsi, par un calcul analogue à celui effectué plus haut :

$$y = (y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{d_1+d_2} \lambda_k e_k$$

ce qui prouve que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$ est génératrice.

Comme $E_1 \times E_2$ admet une base à $d_1 + d_2$ éléments, on conclut :

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Nota Bene. On a supposé implicitement dans cette preuve que $d_1 \geqslant 1$. Dans le cas où $d_1 = 0$, on ne considère pas de vecteurs de la forme $(f_k, 0)$ mais seulement des vecteurs de la forme $(0, g_j)$ pour $j \in [\![1, d_1]\!]$. De même si $d_2 = 0$, on ne considère que des vecteurs de la forme $(f_k, 0)$ pour $k \in [\![1, d_1]\!]$. La preuve est analogue.

- On peut étendre ce résultat dans le cas général $p \geqslant 2$. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $\left(f_k^{(j)}\right)_{1 \leqslant k \leqslant d_j}$ une base de E_j, où $d_j = \dim(E_j)$ (si $d_j = 0$, on ne construit pas de vecteurs).

  La famille $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+\cdots+d_p}$ définie par :

$$e_k = \begin{cases} \left(f_k^{(1)}, 0, \ldots, 0\right) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant d_1\,; \\ \left(0, f_{k-d_1}^{(2)}, 0, \ldots, 0\right) & \text{si } d_1 + 1 \leqslant k \leqslant d_1 + d_2\,; \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ \left(0, \ldots, 0, f_{k-(d_1+\cdots+d_{p-1})}^{(p)}\right) & \text{si } d_1 + \cdots + d_{p-1} + 1 \leqslant k \leqslant d_1 \cdots + d_p \end{cases}$$

  est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$, ce qui se démontre de la même manière que dans le cas $p = 2$. On en déduit que :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p).$$

Proposition 3 Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in (E_1 \times \cdots \times E_p)^2$. En notant :

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \ldots, y_p),$$

on a :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y) &= \sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + \mu y_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{p} x_k + \mu \sum_{k=1}^{p} y_k = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire. On en déduit que $E_1 + \cdots + E_p = \operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1

- D'après la proposition 3 de la page 3, on sait déjà que $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

  De plus pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, étant donné $x \in E_k$, l'écriture :
  $$x = 0 + \cdots 0 + x + 0 + \cdots + 0$$
  assure que $x \in E_1 + \cdots + E_p$. On a donc $E_k \subset E_1 + \cdots + E_p$.

  Par conséquent, $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, \ldots, E_p$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, \ldots, E_p$.

  Soit $x \in E_1 + \cdots + E_p$, alors il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que :
  $$x = x_1 + \cdots + x_p.$$
  On en déduit que $x \in F$, puisque chacun des x_k est dans F et que F est stable par addition.

  Par conséquent, tout sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, \ldots, E_p$ contient également $E_1 + \cdots + E_p$.

On en conclut que $E_1 + \cdots + E_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, \ldots, E_p$.

Exercice 2

1. On pose $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$ et $x_3 = -(e_1 + e_2)$. On a $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ tel que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et $x_3 \neq 0$ (car la famille (e_1, e_2) est libre) donc la somme n'est pas directe.
2. Comme (e_1, e_2) est une famille libre, les sous-espaces E_1 et E_2 sont en somme directe donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

   La famille $(e_1, e_1 + e_2)$ est libre car elle est de même rang que la famille (e_1, e_2). On en déduit que $E_1 \cap E_3 = \{0\}$. On obtient de même $E_2 \cap E_3 = \{0\}$.

Proposition 5 D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(E_1 \times \cdots \times E_p) - \dim(\operatorname{Ker}\varphi).$$
Or $\operatorname{Im}\varphi = \sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ et d'après la proposition 2 de la page 3 :
$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$
On en déduit :
$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k) - \dim(\operatorname{Ker}\varphi).$$
Comme $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) \geqslant 0$, on a donc :
$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

L'inégalité ci-dessus est une égalité si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$, c'est-à-dire si, et seulement si, φ est injective, c'est-à-dire d'après la proposition 4 de la page 4 si, et seulement si, la somme est directe.

Proposition 6 L'assertion (i) signifie

- que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est une somme directe, c'est-à-dire que φ est injective,
- et que $\operatorname{Im}\varphi = E$, c'est-à-dire que φ est surjective.

L'assertion (ii) signifie que tout élément de E admet un unique antécédent par φ, c'est-à-dire que φ est bijective.

Par conséquent ces deux assertions sont équivalentes.

Proposition 7

On note $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_{q_1})$, $\mathcal{B}_2 = (e_{q_1+1}, \ldots, e_{q_2})$, ..., $\mathcal{B}_p = \big(e_{q_{p-1}+1}, \ldots, e_{q_p}\big)$.

On convient que $q_0 = 0$.

- Montrons que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe.

  Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0$. La décomposition de chacun des x_k dans la base $\mathcal{B}_k$ donne :

  $$x_k = \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} \lambda_j e_j,$$

  où les λ_j sont des scalaires. On a supposé $x_1 + \cdots + x_p = 0$, on a donc $\sum\limits_{j=1}^{q_p} \lambda_j e_j = 0$.

  Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre, on en déduit :

  $$\forall j \in [\![1, q_p]\!] \quad \lambda_j = 0$$

  puis en reportant dans les décompositions des x_k :

  $$x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

- Montrons que $E_1 + \cdots + E_p = E$.

  Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, il existe $(\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant q_p} \in \mathbb{K}^{q_p}$ tel que :

  $$x = \sum_{j=1}^{q_p} \lambda_j e_j.$$

  En posant, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

  $$x_k = \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} \lambda_j e_j,$$

  on a $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k$ avec $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

- On conclut que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$.

Proposition 8 D'après la proposition 5 de la page 5, on a $\dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k$. Comme chaque famille $\mathcal{B}_k$ possède $\dim E_k$ éléments, la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation de ces familles en possède $\dim E$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice.

Pour cela, soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$. En écrivant chaque x_k comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_k$, on obtient une écriture de x comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, ce qui prouve le résultat.

Proposition 9 On prouve l'unicité puis l'existence.

- Si une telle application linéaire u existe, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avec $x_i \in E_i$, on a :

  $$u(x) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i).$$

  En notant $p_i : x \mapsto x_i$ la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} E_j$, on a donc :

  $$u = \sum_{i=1}^{p} u_i \circ p_i.$$

  On a ainsi prouvé l'unicité de u.
- Pour établir l'existence, posons (avec les notations précédentes) :

  $$u = \sum_{i=1}^{p} u_i \circ p_i.$$

  On en déduit que u est linéaire en tant que somme de composées d'applications linéaires.
  On vérifie en outre de manière élémentaire que si $x \in E_i$ alors $u(x) = u_i(x)$, ce qui prouve que $u_{|E_i} = u_i$.
  On a donc prouvé l'existence.

Exercice 3 Comme la famille $\left(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\right)$ contient n^2+1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$, on en déduit que cette famille est liée. Il existe donc une famille de scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2})$ non tous nuls telle que :

$$\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k A^k = 0.$$

Ainsi le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k X^k$ convient.

Exercice 4 Pour toute matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ avec :

$$N_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ N_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ N_3 \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad N_4 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}),$$

on a, en effectuant un produit par blocs :

$$MN = \begin{pmatrix} AN_1 + BN_3 & AN_2 + BN_4 \\ DN_3 & DN_4 \end{pmatrix}.$$

- Cherchons des conditions nécessaires pour que M soit inversible.

  Si M est inversible, il existe $N \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ telle que $MN = I_{p+q}$, c'est-à-dire :

  $$\begin{pmatrix} AN_1 + BN_3 & AN_2 + BN_4 \\ DN_3 & DN_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

  ce qui équivaut à :

  $$\begin{cases} AN_1 + BN_3 = I_p \\ AN_2 + BN_4 = 0 \\ DN_3 = 0 \\ DN_4 = I_q. \end{cases}$$

  On déduit de $DN_4 = I_q$ que D est inversible et que $N_4 = D^{-1}$.

  Comme $DN_3 = 0$ et que D est inversible, on a $N_3 = 0$.

  On a alors $AN_1 = I_p$, donc A est inversible et $N_1 = A^{-1}$.

  Il reste alors $AN_2 + BN_4 = 0$, ce qui donne $N_2 = -A^{-1}BD^{-1}$.

  Conclusion : si M est inversible, alors A et D sont inversibles et :

  $$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

- Montrons que ces conditions sont suffisantes.

  Supposons que A et D sont inversibles et montrons que M est inversible.

  Pour cela, posons $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$. On a d'après les calculs par blocs effectués précédemment $MN = I_{p+q}$, ce qui assure que M est inversible et que son inverse est N.

On a montré que M est inversible si, et seulement si, A et D sont inversibles et dans ce cas $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Si $E = \{0\}$, c'est évident. On suppose désormais $E \neq \{0\}$.

- Soit x un vecteur non nul de E et $D = \text{Vect}(x)$.

  Comme D est stable, on a $f(x) \in D$.

  Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

- Soit $y \in E$.

  * Si $y \in D$, on a $y = \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Comme f est linéaire, on en déduit :

    $$f(y) = \alpha f(x) = \alpha\lambda x = \lambda y.$$

    Ainsi, $f(y) = \lambda y$.

$*$ Si $y \notin D$. Comme $\mathrm{Vect}(y)$ est stable, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $f(y) = \mu y$.
Comme $\mathrm{Vect}(x+y)$ est stable, il existe $\nu \in \mathbb{K}$ tel que $f(x+y) = \nu(x+y)$.
On a donc par linéarité de f :

$$\nu x + \nu y = f(x+y) = \lambda x + \mu y.$$

Or, la famille (x,y) est libre (car $y \notin D$), donc $\nu = \lambda = \mu$. Ainsi, $f(y) = \lambda y$.

On a prouvé : $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

Proposition 14

- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$. On a :

$$\big(v \circ u\big)(x) = \big(u \circ v\big)(x) = u(0) = 0,$$

donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\, v$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, v$ est stable par u.

- Soit $y \in \mathrm{Im}\, v$ et $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a :

$$u(y) = \big(u \circ v\big)(x) = \big(v \circ u\big)(x) = v\big(u(x)\big),$$

donc $u(y) \in \mathrm{Im}\, v$. Ainsi, $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u.

Proposition 15 Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ avec $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![p+1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Par définition de la matrice d'une application linéaire, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\, e_j + \sum_{i=p+1}^{n} c_{i,j}\, e_j.$$

Comme $(e_1,\ldots,e_p)$ est une base de F, ce sous-espace vectoriel est stable par u si, et seulement si, chacun de ces $u(e_j)$ est élément de F, ce qui revient à dire que, pour $i \in [\![p+1,n]\!]$, on a $c_{i,j} = 0$ ou encore que la matrice C est la matrice nulle.

Dans ce cas, à nouveau par définition de la matrice d'une application linéaire, l'endomorphisme induit par u sur F a pour matrice A dans la base $\mathcal{B}_F$.

Exercice 6 Montrons que la relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A = I_n^{-1} A I_n$. La relation est donc *réflexive*.
- Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.
  En posant $Q = P^{-1}$, on a $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A = Q^{-1}BQ$. La relation est donc *symétrique*.
- Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$ et $(P,Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tels que :

$$B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad C = Q^{-1}BQ.$$

On en déduit $C = Q^{-1}P^{-1}APQ$. En posant $R = PQ$, on a $R \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Comme $R^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, on a $C = R^{-1}AR$. La relation est donc *transitive*.

Exercice 7

- Soit M une matrice semblable à λI_n.
  Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P^{-1}\lambda I_n P$, donc :
  $$M = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n.$$
- Réciproquement, λI_n est bien semblable à λI_n (il suffit de prendre $P = I_n$, voir l'exercice 6 de la page 18).

On en déduit que λI_n est l'unique matrice semblable à λI_n.

Proposition 16

- Si un endomorphisme u d'un espace vectoriel E a pour matrices A et A' dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, alors en notant $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $A' = P^{-1}AP$, donc A et A' sont semblables.
- Réciproquement, si A et A' sont des matrices semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$. Posons $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit u l'endomorphisme de E ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$. On définit la base $\mathcal{B}'$ comme l'unique base de E telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La relation $A' = P^{-1}AP$ assure alors que A' est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ tel que M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. On a donc :
$$\begin{cases} u(e_1) = e_1 + \alpha\, e_2 \\ u(e_2) = e_2. \end{cases}$$
Comme $\alpha \neq 0$, la famille $\mathcal{B}' = (e_1, \alpha\, e_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Comme u est linéaire, on a :
$$\begin{cases} u(e_1) = e_1 + \alpha\, e_2 \\ u(\alpha\, e_2) = \alpha\, e_2. \end{cases}$$
La matrice de u relative à la base $\mathcal{B}'$ est donc M'. On en déduit que M et M' sont semblables.

Exercice 9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ tel que M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. On a donc :
$$\begin{cases} u(e_1) = a\, e_1 + c\, e_2 \\ u(e_2) = b\, e_1 + d\, e_2. \end{cases}$$
En remarquant que :
$$\begin{cases} u(e_2) = d\, e_2 + b\, e_1 \\ u(e_1) = c\, e_2 + a\, e_1, \end{cases}$$
on constate que M' est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$. On en déduit que M et M' sont semblables.

Proposition 17
Si A et A' sont semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Comme P et P^{-1} sont inversibles, multiplier A par ces deux matrices ne change pas le rang, donc A et A' ont même rang.

Proposition 20 On note $C = AB$ et $D = BA$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} && \text{(par définition de la trace)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,i} && \text{(par définition du produit matriciel)}\\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j} && \text{(somme double finie de produits de scalaires)}\\
&= \sum_{j=1}^{p} d_{j,j} && \text{(par définition du produit matriciel)}\\
&= \operatorname{Tr}(D).
\end{aligned}$$

Exercice 10 On note $r = \operatorname{rg}(p)$.

- Si $0 < r < \dim E$, l'endomorphisme p a pour matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
  On en déduit que $\operatorname{Tr}(p) = r$.
- Sinon $r = 0$, et dans ce cas $p = 0$, ou $r = \dim E$, et dans ce cas $p = \operatorname{Id}_E$. Dans tous les cas, on a $\operatorname{Tr}(p) = r$.

Proposition 22 En posant $M_1 = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, on a en effectuant un produit par blocs $M_1M_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = M$.

Calculons maintenant $\det(M_1)$. En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\det(M_1) = 1 \times \det \begin{pmatrix} I_{p-1} & B_1 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où B_1 est la sous-matrice de B obtenue en retirant la première ligne. En itérant le procédé, on aboutit après p développements à :

$$\det(M_1) = \det(D).$$

On calcule de même $\det(M_2)$ par q développements successifs par rapport à la dernière colonne pour obtenir :

$$\det(M_2) = \det(A)$$

et conclure que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D.$$

Exercice 11 Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, à la colonne k on ajoute la colonne $n+k$ de la matrice M, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Ainsi :

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix}.$$

Dans cette nouvelle matrice, Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, à la ligne $n+k$ on soustrait la ligne k, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Ainsi :

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice étant triangulaire par blocs, on conclut que :

$$\det(M) = \det(A+B)\det(A-B).$$

Proposition 23

Premier cas. Si les $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ ne sont pas deux à deux distincts, il est clair que le déterminant est nul (car deux colonnes sont égales) et le produit aussi (puisqu'un des facteurs est nul).

Second cas. On suppose désormais que les $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux distincts et l'on prouve le résultat par récurrence sur n.

- Pour $n=1$ on a bien $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Soit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.
  En développant selon la dernière colonne, on constate que la fonction d'une seule variable $x \mapsto V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ est polynomiale ; elle est de degré n exactement car son coefficient dominant est $V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, non nul d'après l'hypothèse de récurrence.
  Cette fonction polynomiale admet $x_0, \ldots, x_{n-1}$ pour racines (deux à deux distinctes).
  On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

  En particulier pour x_n, on obtient grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

  Ce qui établit le résultat.

Exercice 12

- L'opération $C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j$ préserve le déterminant. On a donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

- On effectue ensuite pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_1$ (qui laisse le déterminant inchangé) pour aboutir à :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+(n-1)b) & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure. On en déduit :

$$\Delta = (a+(n-1)b)\ (a-b)^{n-1}.$$

Exercice 13

1. On développe par rapport à la première ligne :

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}}_{n \text{ colonnes}} = aD_{n-1} - c \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}}_{(n-1) \text{ colonnes}}.$$

   On développe ensuite le dernier déterminant par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$D_n = a\,D_{n-1} - bc\,D_{n-2}. \qquad (*)$$

2. On a $D_1 = |a| = a$ et $D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc.$

3. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cours de première année).
   (a) L'équation caractéristique $r^2-5r+6=0$ admet pour racines $r_1=2$ et $r_2=3$. Il existe donc deux réels α et β tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n = \alpha 2^n + \beta 3^n.$$
   On détermine α et β avec D_1 et D_2, ce qui mène au système suivant :
   $$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=5 \\ 4\alpha+9\beta=19 \end{cases}$$
   ayant pour solution $\alpha=-2$ et $\beta=3$.
   Conclusion : $D_n = 3^{n+1}-2^{n+1}$.
   (b) L'équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ admet pour racine double $r_0=1$. Il existe donc deux réels α et β tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n = \alpha n + \beta.$$
   On détermine α et β avec D_1 et D_2, ce qui mène au système suivant :
   $$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases}$$
   ayant pour solution $\alpha=1$ et $\beta=1$.
   Conclusion : $D_n = n+1$.

Remarque On peut aussi poser $D_0=1$ de sorte que la relation de récurrence $(*)$ soit vérifiée à partir du rang 2. Les conditions initiales données par D_0 et D_1 conduisent alors à un système plus simple pour déterminer les constantes α et β.

Exercice 14 Soit $x \in \mathbb{K}$. En retranchant la première colonne à toutes les autres, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & \cdots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x & c+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & c-b \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

L'expression du déterminant obtenue en développant par rapport à la première colonne (la seule qui contient encore des x), montre qu'il existe deux scalaires α et β tel que $f(x)=\alpha x+\beta$. Ainsi, f est une fonction affine de x et le déterminant que l'on cherche à calculer vaut $f(0)=\beta$.

Comme $f(-c)=(a-c)^n$ et $f(-b)=(a-b)^n$ (déterminants de matrices triangulaires), on a :

$$\begin{cases} -\alpha\, c+\beta=(a-c)^n \\ -\alpha\, b+\beta=(a-b)^n. \end{cases}$$

On obtient, en résolvant ce système, $\beta = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.

Proposition 26

- Si H est un hyperplan, il existe une droite vectorielle $D = \text{Vect}(\delta)$ de E telle que $H \oplus D = E$. Tout vecteur x de E s'écrit donc de manière unique $x = h + \lambda\delta$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application φ de E dans $\mathbb{K}$ qui à x associe λ est facilement linéaire, c'est donc une forme linéaire. Comme $\lambda = 0$ équivaut à $x = h$, on a bien $\operatorname{Ker}\varphi = H$. De plus $\varphi(\delta) = 1$ ce qui assure que φ n'est pas nulle.
- Réciproquement, supposons que H soit le noyau d'une forme linéaire φ non nulle sur E. Comme φ n'est pas nulle, il existe un vecteur δ de E tel que $\varphi(\delta) \neq 0$. Nécessairement $\delta \neq 0$, donc $\text{Vect}(\delta)$ est une droite.

  Montrons que $H \oplus \text{Vect}(\delta) = E$ en montrant que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = h + \lambda\delta$.

  * Si une telle décomposition existe, alors :
  $$\varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\varphi(\delta) = \lambda\varphi(\delta).$$
  On en déduit que :
  $$\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\delta)} \quad \text{et} \quad h = x - \lambda\delta,$$
  donc la décomposition est unique.
  * En posant :
  $$\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\delta)} \quad \text{et} \quad h = x - \lambda\delta,$$
  on a bien par linéarité de φ :
  $$\varphi(h) = \varphi(x) - \lambda\varphi(\delta) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\delta)}\,\varphi(\delta) = 0,$$
  donc $h \in H$ et comme par construction $x = h + \lambda\delta$, la décomposition existe.

Exercice 15 Dans une base $\mathcal{B}$ de E, chaque hyperplan admet une équation. L'intersection F de ces hyperplans est donc un sous-espace vectoriel de E défini par un système linéaire homogène de p équations à n inconnues. En notant r le rang de ce système, on a donc $r \in [\![1, p]\!]$ et par conséquent $\dim F = n - r \in [\![n - p, n - 1]\!]$.

Remarque. Le cas $r = 1$ correspond au cas où toutes les équations sont proportionnelles à la première équation, c'est-à-dire au cas où les hyperplans sont tous égaux.

S'entraîner et approfondir

Sommes et sommes directes

1.1 Soit F, $G_1, \ldots, G_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p}(F \cap G_k) \subset F \bigcap \left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k\right)$.
2. Montrer que si E est un plan vectoriel, il existe F, G_1, G_2 tels que :
$$F \cap (G_1 + G_2) \neq (F \cap G_1) + (F \cap G_2).$$
3. Montrer que si la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} G_k$ est directe, alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{p}(F \cap G_k)$ est directe.

1.2 Soit $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer qu'ils sont en somme directe si, et seulement si,
$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad F_k \bigcap \left(\sum_{j \neq k} F_j\right) = \{0\}.$$

Bases adaptées et sous-espaces stables

1.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r \geqslant 1$. Montrer qu'il existe deux matrices $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication. On pourra considérer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A et une base adaptée à la décomposition en somme directe $S \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{K}^p$, où S désigne un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{K}^p$.

1.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ ainsi que $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que tout sous-espace vectoriel de dimension p de E soit stable par f.

1. Montrer que toute droite de E est stable par f.
2. En déduire que f est une homothétie.

1.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Un endomorphisme u de E est dit **nilpotent** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}} = 0$.

1. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent de E est non injectif.
2. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et $F \neq \{0\}$ un sous-espace stable par u alors $\dim u(F) < \dim F$.
3. Montre que si $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ sont nilpotents et commutent deux à deux, alors $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Trace et matrices semblables

1.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = \operatorname{Tr}(A)\, A$.

1.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = A$.
Montrer que A est non inversible.

1.8 Soit E un espace vectoriel de dimension n. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $s = f \circ g - g \circ f$ soit une symétrie. Montrer que n est pair.

1.9 Étant donné $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, résoudre l'équation $(E) \ : M + \operatorname{Tr}(M)\, A = B$ d'inconnue matricielle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.10 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $A^3 = 0$ et $A \neq 0$.

1. Montrer que si $A^2 \neq 0$, alors A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $A^2 = 0$, alors A est semblable à $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

⋆ **1.11** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\operatorname{Tr}(M) = 0$. On souhaite montrer que M est semblable à une matrice « à diagonale nulle », c'est-à-dire à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée alors f est une homothétie.
2. Prouver le résultat par récurrence sur n.

Déterminants

1.12 Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \det(A + X) = \det(X).$$

Montrer que $A = 0$.

⋆ **1.13** Soit A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

On suppose D inversible et $CD = DC$. Montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

⋆ **1.14** On suppose $n \geqslant 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A, la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des cofacteurs de A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad b_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

1. Montrer que $A\,{}^tB = {}^tBA = (\det A)I_n$.
2. En déduire que si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^tB$.
3. Montrer que $\det B = \det(A)^{n-1}$.

Formes linéaires et hyperplans

1.15 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \operatorname{Tr}(AM)$.

1.16 Si $\dim E = n$, montrer que tout sous-espace vectoriel G de dimension p de E est égal à l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.

1.17 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{Tr}$.

⋆ **1.18** Soit $n \geqslant 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

1.19 Soit E un espace vectoriel de dimension q et n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur E. On note φ l'application de E dans $\mathbb{K}^n$ définie par :

$$\varphi(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big).$$

1. Montrer que si l'application φ est surjective, alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Supposons maintenant φ non surjective. Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{K}^n$ qui contient $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Complément : interpolation de Lagrange

1.20 Soit n un entier naturel non nul et $(a_0,\ldots,a_n)$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts.

1. Prouver que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0),\ldots,P(a_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.
2. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, notons L_k l'unique polynôme tel que :
$$L_k(a_k)=1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![0,n]\!]\setminus\{k\} \quad L_k(a_j)=0.$$
Justifier l'existence de L_k et donner son expression sous forme factorisée.
Ce polynôme L_k est appelé k-ième polynôme interpolateur de Lagrange associé à la famille $(a_0,\ldots,a_n)$.
3. Prouver que la famille $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Montrer que pour toute $(n+1)$-liste $(b_0,\ldots,b_n)$ de scalaires, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant :
$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad P(a_k)=b_k$$
et expliciter la décomposition de P dans la base $(L_0,\ldots L_n)$.
5. On note $\Pi = \prod\limits_{i=0}^{n}(X-a_i)$. Montrer que $\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}_n[X]\oplus \Pi\,\mathbb{K}[X]$ et expliciter la projection sur $\mathbb{K}_n[X]$ parallèlement à $\Pi\,\mathbb{K}[X]$ (ensemble des multiples de Π).

Solution des exercices

1.1 1. Soit $x \in \sum_{k=1}^{p} (F \cap G_k)$. On a $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in (F \cap G_k)$ pour tout k.

- D'une part, chaque x_k est dans F donc x est dans F.
- D'autre part, chaque x_k est dans G_k donc x est dans $\sum_{k=1}^{p} G_k$.

On en déduit que $x \in F \bigcap \left(\sum_{k=1}^{p} G_k\right)$. Conclusion : $\sum_{k=1}^{p} (F \cap G_k) \subset F \bigcap \left(\sum_{k=1}^{p} G_k\right)$.

2. Il suffit de prendre trois droites vectorielles deux à deux distinctes. Par exemple si on note (e_1, e_2) une base de E, en posant $G_1 = \text{Vect}(e_1)$, $G_2 = \text{Vect}(e_2)$ et $F = \text{Vect}(e_1 + e_2)$, on a $F \cap (G_1 + G_2) = F$ et $(F \cap G_1) + (F \cap G_2) = \{0\}$.

3. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in (F \cap G_1) \times \cdots \times (F \cap G_p)$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$.

Comme chaque x_k est dans G_k et que la somme $\sum_{k=1}^{p} G_k$ est directe, on a $x_k = 0$ pour tout k. Conclusion : la somme $\sum_{k=1}^{p} (F \cap G_k)$ est directe.

1.2 • Supposons que la somme $\sum_{j=1}^{p} F_j$ soit directe.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$ et $x \in F_k \bigcap \left(\sum_{j \neq k} F_j\right) = \{0\}$.

On a donc $x = \sum_{j \neq k} x_j$ avec $x_j \in F_j$ pour tout $j \neq k$.

En posant $x_k = -x$, on a $x_k \in F_k$ et $\sum_{j=1}^{p} x_j = 0$.

Or, par hypothèse, $\sum_{j=1}^{p} F_j$ est directe. On en déduit $x_j = 0$ pour tout j, puis $x = 0$. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad F_k \bigcap \left(\sum_{j \neq k} F_j\right) = \{0\}.$$

• Supposons que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad F_k \bigcap \left(\sum_{j \neq k} F_j\right) = \{0\}.$$

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$x_k = -\sum_{j \neq k} x_j$$

donc $x_k \in F_k \cap \left(\sum_{j \neq k} F_k\right)$. On en déduit $x_k = 0$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est une somme directe.

1.3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $S \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{K}^p$.

On note $\widetilde{f}: \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$

- L'application $\widetilde{f}$ est linéaire car f est linéaire.
- $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \operatorname{Ker} f \cap S$, donc $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{0\}$ ce qui assure l'injectivité.
- D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim S.$$

On en déduit que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme.

Comme $\mathcal{B}_1$ est une base de S, on en déduit que $f(\mathcal{B}_1)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Le théorème de la base incomplète permet de compléter cette base de $\operatorname{Im} f$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$.

La matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est J_r par construction.

La formule de changement de bases s'écrit alors $A = PJ_rQ$, où Q désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}'$. Comme ce sont des matrices de passage, on a donc P et Q inversibles.

1.4 1. Supposons $p \geqslant 2$ et montrons que tout sous-espace vectoriel de dimension $p-1$ de E est également stable par f. Par récurrence immédiate, on en déduira alors que f stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension 1 de E, c'est-à-dire stabilise toutes les droites de E.

Pour cela soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p-1$ de E et $(e_1, \dots e_n)$ une base adaptée à F.

On pose $G_1 = \operatorname{Vect}\big(e_1, \dots e_{p-1}, e_p\big)$ et $G_2 = \operatorname{Vect}\big(e_1, \dots e_{p-1}, e_{p+1}\big)$ (c'est possible car $p \leqslant n-1$). On a donc par construction :

$$F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) \subset G_1 \cap G_2 \subset G_1$$

et l'inclusion de droite est stricte puisque $e_p \in G_1$ et $e_p \notin G_2$ par indépendance de la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$.

On en déduit $p - 1 = \dim F \leqslant \dim(G_1 \cap G_2) < \dim G_1 = p$, donc $F = G_1 \cap G_2$ par inclusion et égalité des dimensions (finies).

Comme $\dim G_1 = \dim G_2 = p$, on a par hypothèse $f(G_1) \subset G_1$ et $f(G_2) \subset G_2$ et donc $f(G_1 \cap G_2) \subset G_1 \cap G_2$, ce qui prouve que F est stable par f.

2. Voir l'exercice 5 de la page 16.

1.5 1. Soit u un endomorphisme nilpotent de E. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Comme $\dim E \geqslant 1$, il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Supposons $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. L'égalité $0 = u^p(x) = u\big(u^{p-1}(x)\big)$ montre que $u^{p-1}(x) = 0$ puis, par une récurrence descendante immédiate, $x = 0$, ce qui est contradictoire. Donc u est non injectif.

2. Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. L'endomorphisme u_F induit par u sur F est également nilpotent, car on a $u_F^p = 0$. Par conséquent u_F n'est pas injectif d'après la question précédente (on a supposé $\dim F > 0$) et le théorème du rang assure alors que $\dim u(F) < \dim F$.

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $F_k = (u_k \circ \cdots \circ u_n)(E)$. Montrons par récurrence descendante que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \dim F_k < k$$

- *Initialisation.*
  - ∗ Si $F_n = \{0\}$, on a $\dim F_n < n$.
  - ∗ Sinon, comme u_n est nilpotent et E est stable par u_n, la question 2 assure que $\dim u_n(E) < \dim E$, c'est-à-dire $\dim F_n < n$.
- *Hérédité.* Soit $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $\dim F_k < k$.
  - ∗ Si $F_k = \{0\}$, alors *a fortiori* $F_{k-1} = \{0\}$ et $\dim F_{k-1} < k - 1$.
  - ∗ Sinon, comme u_{k-1} commute avec $v_k = u_k \circ \cdots \circ u_n$, alors $F_k = \operatorname{Im} v_k$ est stable par u_{k-1}. On peut donc appliquer la question 2 à u_{k-1} qui est nilpotent et à F_k qui est stable. On en déduit que $\dim F_{k-1} < \dim F_k$, puis que $\dim F_{k-1} < k - 1$.

Conclusion : à la fin de cette récurrence descendante, on obtient $\dim F_1 < 1$, c'est-à-dire $F_1 = \{0\}$ et donc $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

1.6 Comme $\operatorname{rg} A = 1$, il existe $C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que les colonnes de A soient de la forme $\alpha_1 C, \ldots, \alpha_n C$, avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, c'est-à-dire $A = (\alpha_j\, \beta_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

En posant $L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, on a donc $A = CL$. De plus $LC \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et son unique coefficient est $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \operatorname{Tr}(A)$.

Ainsi, $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \operatorname{Tr}(A)CL$, donc $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$.

1.7 Supposons A inversible. En multipliant la relation $AB - BA = A$ à droite par A^{-1} on obtient :

$$ABA^{-1} - B = I_n.$$

Par linéarité de la trace, on en déduit que

$$\operatorname{Tr}\left(ABA^{-1}\right) - \operatorname{Tr}(B) = n.$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on aboutit à $n = 0$, ce qui est absurde. Conclusion : A est non inversible.

1.8 Par linéarité de la trace, on a $\mathrm{Tr}(s) = \mathrm{Tr}(f \circ g) - \mathrm{Tr}(g \circ f) = 0$.

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ (*cf.* l'exemple 2 de la page 7).

En posant $n_1 = \dim \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $n_2 = \dim \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$, on a dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{Diag}\,\big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_2}\big).$$

On a donc $0 = \mathrm{Tr}(s) = n_1 - n_2$ et $n = n_1 + n_2$.

Par conséquent $n = 2n_1$, donc n est pair.

1.9 On note $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M + \mathrm{Tr}(M)\, A = B\}$ l'ensemble des solutions de (E).

- Soit $M \in \mathcal{S}$. Par linéarité de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}(M)\,\big(1 + \mathrm{Tr}(A)\big) = \mathrm{Tr}(B).$$

  On distingue alors trois cas.

- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, nécessairement $\mathrm{Tr}(M) = \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1+\mathrm{Tr}(A)}$ et donc

$$M = B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)} A.$$

  Réciproquement, cette matrice vérifie bien l'équation (E).

  Dans ce cas $\mathcal{S} = \Big\{B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1+\mathrm{Tr}(A)} A\Big\}$.

- Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, il n'y a pas de solution.
  Dans ce cas $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) = 0$, l'équation (E) assure que toute solution est de la forme $M = B - \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $M = B - \lambda A$ a pour trace :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(B) - \lambda\, \mathrm{Tr}(A) = \lambda,$$

  donc M est solution de (E). Dans ce cas $\mathcal{S} = \{B - \lambda A\,;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1.10 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associé à A. On a $f^3 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{K}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Soit $\mathcal{B}' = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$. Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0$. En appliquant f^2 à cette relation, on obtient $\alpha f^2(x) = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $f^2(x) \neq 0$. En appliquant ensuite f à cette même relation, on obtient $\beta f^2(x) = 0$ donc $\beta = 0$. Il reste $\gamma f^2(x) = 0$, donc $\gamma = 0$.

   Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{K}^3$, donc c'en est une base, et f a pour matrice A' dans cette base.

   Conclusion : A est semblable à A'.

2. Comme $f^2 = 0$ on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. De plus le théorème du rang assure que :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 3.$$

On en déduit, puisque $f \neq 0$, que $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

Soit y un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$ et $x \in \mathbb{K}^3$ tel que $f(x) = y$.

Puisque $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, on a $y \in \operatorname{Ker} f$ et comme $y \neq 0$ on peut compléter la famille libre (y) en une base (y, z) de $\operatorname{Ker} f$. Or, (y, z) est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$ et $x \notin \operatorname{Vect}(y, z) = \operatorname{Ker} f$ puisque $f(x) = y \neq 0$.

Donc $\mathcal{B}'' = (x, y, z)$ est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{K}^3$ et pat suite en est une base, et f a pour matrice A'' dans cette base. .

Conclusion : A est semblable à A''.

1.11 1. Cette question classique a été traitée dans l'exercice 5 de la page 16.

2. On procède par récurrence sur n.
   - La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$ car la seule matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ de trace nulle est la matrice nulle.
   - Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons une matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.

     Si $A = 0$, le résultat est évident.

     Si $A \neq 0$, l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à A n'est pas une homothétie car la seule homothétie de trace nulle est l'application nulle.

     D'après la question précédente, on en déduit l'existence d'un vecteur $e_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1)\big)$ soit libre.

     Notons $e_2 = f(e_1)$ et complétons la famille libre (e_1, e_2) pour obtenir une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

     Si l'on note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, la matrice $P^{-1}AP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, donc de la forme :

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

     avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

     On a $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B) = 0$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à B et obtenir l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la diagonale de la matrice $B' = Q^{-1}BQ$ soit nulle.

     En notant $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on a en effectuant un produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

     donc H est inversible et son inverse est $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Un autre calcul par blocs donne alors :

$$H^{-1}\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}BQ \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$(PH)^{-1} A\,(PH) = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & B' \end{pmatrix},$$

donc A est semblable à une matrice de diagonale nulle, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

1.12 On procède par l'absurde. Supposons $A \neq 0$.

On note $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. Comme $A \neq 0$, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $C_j \neq 0$. On définit la matrice X en mettant le vecteur $-C_j$ dans la colonne j et en choisissant les autres vecteurs colonnes de X de sorte que la matrice X soit inversible, ce que l'on peut faire, d'après le théorème de la base incomplète, en complétant la famille libre $(-C_j)$ en une base de $\mathbb{K}^n$.

On a par construction $\det(X) \neq 0$ (car X est inversible) et $\det(A+X) = 0$ (car la j-ème colonne de $A+X$ est nulle). On aboutit à une contradiction.

On en conclut que $A = 0$.

1.13 Soit $P = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$. En effectuant un produit par blocs, on obtient :

$$MP = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ CD-DC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Grâce à la proposition 22 de la page 21 et à la remarque qui suit, on peut calculer le déterminant des matrices triangulaires par blocs MP et P :

$$\det(P) = \det(D)\det(D^{-1}) = 1$$

$$\text{et} \qquad \det(MP) = \det(AD-BC)\det(I_n) = \det(AD-BC).$$

Comme $\det(MP) = \det(M)\ \det(P)$, on en déduit finalement $\det M = \det(AD-BC)$.

1.14 1. Posons $C = A^tB$. On a par définition du produit matriciel

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{i,j} \Delta_{k,j}.$$

- Si $k = i$, on reconnaît le développement du déterminant de A suivant la i-ème ligne. On en déduit que $c_{i,i} = \det A$.
- Si $k \neq i$, on obtient le développement suivant la k-ième ligne du déterminant d'une matrice A', obtenue à partir de A en copiant la i-ème ligne dans la k-ième. On en déduit que $c_{i,k} = \det A' = 0$ (car la matrice A' possède deux lignes identiques, donc est non inversible).

On en conclut que $A^tB = (\det A)\, I_n$.

On montre de manière analogue en utilisant des développements par rapport aux colonnes que ${}^tBA = (\det A)\, I_n$.

2. En multipliant par A^{-1} le relation de la question précédente et en divisant par $\det A$ on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^tB$$

3. • Si A est inversible ${}^tB = (\det A)\, A^{-1}$ donc

$$\det(B) = \det(A)^n \det(A^{-1}) = \det(A)^n \times \frac{1}{\det A} = \det(A)^{n-1}.$$

   • Si A n'est pas inversible, on a $\det A = 0$ et $A\, {}^tB = 0$.
   On procède par l'absurde. Supposons $\det B \neq 0$. On en déduit que ${}^tB$ est inversible, puis que $A = 0$. On a alors $B = 0$ par définition de B, ce qui est contradictoire avec $\det B \neq 0$.
   Ainsi $\det B = 0 = \det(A)^{n-1}$.

Dans tous les cas on a $\det B = \det(A)^{n-1}$.

1.15 On raisonne par analyse-synthèse.

Unicité (par analyse). Supposons l'existence d'une telle matrice A. On a alors pour toute matrice $M =\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m_{j,i}.$$

On en déduit que $a_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$ où $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a donc prouvé l'unicité.

Existence (par synthèse). Définissons la matrice A par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = \varphi(E_{j,i}).$$

D'après le calcul fait précédemment les applications linéaires φ et $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ coïncident sur la base canonique donc sont égales. On a prouvé l'existence.

1.16 Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E adaptée à G ; on a donc $G = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots e_p)$.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons φ_k la forme linéaire sur E qui à tout vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E associe sa k-ième coordonnée x_k.

Un vecteur x de E appartient à G si, et seulement si, ses $n-p$ dernières coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont nulles c'est-à-dire si, et seulement si, $\varphi_i(x) = 0$ pour tout $i \in [\![p+1,n]\!]$.

On a ainsi $G = \bigcap\limits_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i$, donc G est l'intersection des $n-p$ hyperplans $\mathrm{Ker}\, \varphi_i$ avec $i \in [\![p+1,n]\!]$.

1.17 Si $n=1$, le résultat est évident car l'ensemble de formes linéaires sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est de dimension 1 et que Tr n'est pas la forme nulle. On suppose désormais $n \geqslant 2$ et l'on note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- Comme $E_{i,j}E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$, on a $\varphi(E_{i,j}) = 0$.
- Comme $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ et $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j} =$, on a $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$.

Par conséquent en posant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, la forme linéaire $\varphi - \lambda\,\mathrm{Tr}$ s'annule sur tout élément de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $\varphi = \lambda\,\mathrm{Tr}$.

1.18 Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et φ une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Premier cas. Supposons qu'il existe un couple (i,j) tel que $i \neq j$ et $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$.

Dans ce cas on pose $M = I_n - \alpha E_{i,j}$ avec $\alpha = \frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{i,j}}$.

La matrice M est inversible car elle est triangulaire à coefficients diagonaux tous égaux à 1. De plus, on a choisi α pour que :

$$\varphi(M) = \varphi(I_n) - \alpha\varphi(E_{i,j}) = 0.$$

On a donc dans ce cas M inversible et $M \in H$.

Second cas. Sinon, pour tout couple (i,j) tel que $i \neq j$, on a $\varphi(E_{i,j}) = 0$. Dans ce cas, on pose :

$$M = E_{1,2} + E_{2,3} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n,1}.$$

On a donc $\varphi(M) = 0$ par linéarité de φ. Or la matrice M est inversible car ses vecteurs colonnes sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une permutation près.

On a donc dans ce cas M inversible et $M \in H$.

1.19 1. Considérons n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0. \tag{1}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, considérons un antécédent du k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire un vecteur v_k de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad f_i(v_k) = \delta_{i,k} \text{ (symbole de Kronecker)}.$$

En appliquant l'égalité (1) au vecteur v_k, on obtient $\lambda_k = 0$. On a ainsi prouvé que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Notons r la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$ et considérons $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à $\operatorname{Im}\varphi$.

Comme $r < n$, l'hyperplan $H = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_{n-1})$ contient $\operatorname{Im}\varphi$.

Soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ une équation de cet hyperplan relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $x \in E$, le vecteur $\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$ appartient à $\operatorname{Im}\varphi$ donc à H, d'où :

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0.$$

On en déduit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$, ce qui prouve que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée puisque les scalaires λ_i ne sont pas tous nuls.

1.20 1. • L'application : $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$ est évidemment linéaire.

• *Injectivité.* Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a $P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$, donc P admet $n+1$ racines distinctes. Or $\deg P \leqslant n$, donc $P = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ donc φ est injective.

• On a de plus $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1} = n+1$.

Comme φ est linéaire et injective entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie, c'est un isomorphisme.

2. • L'existence de L_k (et son unicité) est une conséquence de la question 1.

• Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \in \mathbb{K}_n[X]$ et vaut 1 en a_k et 0 en tous les autres a_j. Ainsi (par unicité) :

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

3. Comme φ est un isomorphisme, φ^{-1} aussi. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est l'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. Soit $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

• L'existence et l'unicité de P sont une conséquence de la question 1.

• Notons $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Comme $(b_0, \ldots, b_n) = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k$, on en déduit par linéarité de φ^{-1} :

$$P = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k e_k\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi^{-1}(e_k).$$

Ainsi, $P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$.

5. Il est clair que $\Pi\,\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (par exemple comme image de l'application linéaire $P \mapsto \Pi P$). Le polynôme Π étant de degré $n+1$, l'existence et l'unicité des quotient et reste de la division euclidienne par Π donnent, pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_n[X]$ tel

que $A = \Pi\, Q + R$, donc A s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\Pi\, \mathbb{K}[X]$ et d'un élément de $\mathbb{K}_n[X]$.

Cela prouve que $\Pi\, \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires et que la projection sur $\mathbb{K}_n[X]$ parallèlement à $\Pi\, \mathbb{K}[X]$ est l'application « reste de la division euclidienne par Π ».

On peut expliciter cette projection à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange. En effet, si $A = \Pi\, Q + R$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $A(a_k) = R(a_k)$ puisque $\Pi(a_k) = 0$. Si R est le reste de division euclidienne de A par Π, alors $\deg R \leqslant n$ et R est le polynôme de la question précédente dans le cas où $b_k = A(a_k)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On obtient ainsi :

$$R = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)\, L_k.$$

Chapitre 2 : Réduction

Réduction 2

Dans tout le chapitre E est un espace vectoriel réel ou complexe, $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Éléments propres

1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de u s'il existe un vecteur *non nul* $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est **vecteur propre** de u **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est *non nul* et vérifie $u(x) = \lambda x$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, le **sous-espace propre** de u **associé à la valeur propre** λ est :

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Remarques

1. Le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire si, et seulement si, l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif. En particulier, l'endomorphisme u admet 0 pour valeur propre si, et seulement s'il n'est pas injectif. Dans ce cas $E_0(u) = \operatorname{Ker} u$.
2. Si un vecteur x non nul vérifie $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda = \mu$; ce qui explique que l'on parle de *la* valeur propre associée à un vecteur propre.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E car c'est le noyau de l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$.

Attention Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ est $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$; ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2

Soit E de dimension finie. Le **spectre** de $u \in \mathcal{L}(E)$, noté $\mathrm{sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.

Exemples

1. Déterminons les éléments propres de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{array}$.

   Un réel λ est valeur propre de f si, et seulement s'il existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tel que :
   $$y = \lambda x \quad \text{et} \quad x = -\lambda y.$$
   Cela entraîne $y = -\lambda^2 y$. Comme λ est réel, on a $\lambda^2 \neq -1$; on en déduit $y = 0$, puis $x = 0$.

   En conclusion, f n'a pas de valeur propre.

   Remarque L'endomorphisme f est la rotation d'angle $\pi/2$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

   Si l'on considère l'endomorphisme $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{array}$, alors le raisonnement précédent permet de conclure que g a pour valeur propre i et $-i$ et que ses sous-espaces propres sont $E_i(g) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $E_{-i}(g) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

2. Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Cherchons les valeurs propres de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall P \in E \quad u(P) = XP$.

   Un complexe λ est valeur propre de u si, et seulement si, l'équation $XP = \lambda P$ a une solution non nulle $P \in E$.

   Or, pour $P \neq 0$, on a :
   $$\deg(XP) = 1 + \deg(P) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$
   ce qui rend l'égalité $XP = \lambda P$ impossible.

   En conclusion, u n'a pas de valeur propre.

Remarque Nous verrons, que si E est de dimension finie et si le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.

p.86 **Exercice 1** Soit λ une valeur propre *non nulle* de $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que le sous-espace propre associé $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\mathrm{Im}\, u$.

La proposition suivante permet d'avoir une vision géométrique de la notion de vecteur propre.

Proposition 1

Un vecteur non nul $x \in E$ est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, la droite engendrée par x est stable par u.

Démonstration. Par linéarité de u, la droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u si, et seulement si, $u(x) \in \text{Vect}(x)$. Cela équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire au fait que x est vecteur propre de u. □

Remarque Les droites vectorielles stables par u sont donc les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de u.

Exemples

1. **Homothétie.** Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie $\lambda\,\text{Id}_E$ pour la valeur propre λ. Par suite cette homothétie admet λ pour unique valeur propre et le sous-espace propre associé est E.

   On établira, dans l'exercice 2 de la page suivante, que, réciproquement, un endomorphisme admettant tout vecteur non nul pour vecteur propre est une homothétie.

2. **Rotation.** Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et r une rotation dont l'angle a pour mesure $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors r est une homothétie).

   Pour tout vecteur x non nul, l'angle $\left(\widehat{x, r(x)}\right)$ n'est pas multiple entier de π ; par suite, $r(x) \notin \text{Vect}(x)$. Ainsi r n'a ni valeur propre, ni vecteur propre.

3. **Projection.** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur avec $p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}_E$ (sinon, p est une homothétie).

   Soit λ une valeur propre de p et x un vecteur propre associé. On a $p(x) = \lambda x$ puis $p(p(x)) = \lambda p(x)$ donc $p(x) = \lambda p(x)$. Ainsi, soit $\lambda = 1$ soit $p(x) = 0$ et alors $\lambda = 0$. Les seules valeurs propres possibles de p sont donc 0 et 1.

   De plus, $E = \text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p$ et $\text{Im}\, p = \text{Ker}\,(p - \text{Id}_E)$. Ainsi, l'hypothèse $p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}_E$ implique que $E_1(p)$ et $E_0(p)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$.

   En conclusion, 0 et 1 sont les deux valeurs propres de p avec pour sous-espaces propres associés $\text{Ker}\, p$ et $\text{Ker}\,(p - \text{Id}_E) = \text{Im}\, p$.

4. **Symétries**. Soit F et G supplémentaires dans E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

   Rappelons que, si p est le projecteur d'image F et de noyau G, on a $s = 2p - \text{Id}_E$. Ainsi la relation $s(x) = \lambda x$ équivaut à $p(x) = \dfrac{\lambda + 1}{2}\, x$.

   On déduit de ce qui a été prouvé sur les projections que, si $s \neq \pm\, \text{Id}_E$ (ce qui correspond à $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$), alors s admet pour valeurs propres 1 et -1 et que les sous-espaces propres associés sont respectivement F et G.

p.86

Exercice 2

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. En déduire que les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

p.86

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $D \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall f \in E \quad D(f) = f'$.

Proposition 2

Si les endomorphismes u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Principe de démonstration. On utilise le fait que, si deux endomorphismes commutent, le noyau de l'un est stable par l'autre. Démonstration page 86

Proposition 3

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Principe de démonstration. On procède par récurrence sur p. Démonstration page 86

Conséquence Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
En effet, soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme u associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
Considérons $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. La proposition précédente implique donc que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i x_i = 0$.
Comme chaque x_i est non nul, car vecteur propre de u, on peut en déduire que : $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \alpha_i = 0$. Par suite, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

p.87

Exercice 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_\lambda(t) = \exp(\lambda t).$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

Montrer que $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre de E.

On utilisera le résultat de l'exercice 3.

p.87

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(f) = g \qquad \text{où} \qquad \forall t > 0 \quad g(t) = tf'(t).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons f_α la fonction définie par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Montrer que si on considère des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts, alors la famille $(f_{\alpha_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Corollaire 4

Si E est de dimension finie et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim E$$

Démonstration. Découle de la proposition 3 de la page précédente. □

Corollaire 5

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration page 87

2 Éléments propres d'une matrice carrée

Convention Dans la suite, on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
On pourra ainsi écrire AX, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$.

Définition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathbb{K}^n$ *non nul* tel que $AX = \lambda X$.
2. On dit que le vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ est **vecteur propre** de A **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est *non nul* et vérifie $AX = \lambda X$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, le **sous-espace propre** de A **associé à la valeur propre** λ est :
$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\}$$
4. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A et noté $\operatorname{sp}(A)$.

Remarque Le scalaire λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n$ est non inversible. De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim E_\lambda(A) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n).$$

p.87

Exercice 6

1. Déterminer les éléments propres propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
   Déterminer les éléments propres propres de la matrice $A = \alpha J + \beta I_n$.

Remarque En sciences industrielles, on utilise des matrices d'inductance qui relient flux magnétique et intensité.

Lorsque celle-ci est de la forme $\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix}$, elle admet, d'après l'exercice précédents, deux valeurs propres $L - M$ et $L + 2M$.

Point méthode

On peut rechercher les éléments propres d'une matrice en étudiant l'équation $AX = \lambda X$.

On verra, à l'aide du polynôme caractéristique, une méthode qui permet d'obtenir les valeurs propres d'une matrice sans résolution de systèmes.

Remarque Les éléments propres d'une matrice A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.

Proposition 6

Soit A une matrice représentant l'endomorphisme u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On a alors $\operatorname{sp}(A) = \operatorname{sp}(u)$ et, pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \iff u(x) = \lambda x \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x)$$
$$\iff AX = \lambda X \iff X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Comme le vecteur x est nul si, et seulement si, $X = 0$, on en déduit le résultat. □

Corollaire 7

Une matrice carrée de taille n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration. Il s'agit de la traduction matricielle de le corollaire 5 de la page 60. □

Corollaire 8

Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Démonstration. Si A et B sont deux matrices semblables et si l'on considère l'endomorphisme f canoniquement associé à A, alors B représente également l'endomorphisme f. Le résultat découle donc de la proposition 6 de la page précédente. □

Remarque Plus précisément, si $A = P^{-1}BP$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$:

$$E_\lambda(A) = \{P^{-1}X\,;\; X \in E_\lambda(B)\}.$$

Remarque Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on distinguera soigneusement les éléments propres de A considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ceux de A considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
En particulier, pour éviter toute ambiguïté, on utilisera dans la suite les notations $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
D'autre part, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, on notera $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

p.88 **Exercice 7** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_\theta)$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_\theta)$.

Proposition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Alors $\overline{V}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Démonstration. On a $AV = \lambda V$ et, en utilisant les propriétés de la conjugaison, on en déduit facilement :

$$\overline{AV} = \overline{A}\,\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V},$$

soit $A\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V}$, puisque A est à coefficients réels.

D'où la conclusion, puisque $V \neq 0$ et donc $\overline{V} \neq 0$. □

p.88 **Exercice 8** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Montrer que si $(V_1, \dots, V_k)$ une base du sous-espace propre complexe associé, alors $\left(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_k}\right)$ est une base du sous-espace propre de A pour la valeur propre $\overline{\lambda}$.

3 Polynômes annulateurs

Proposition 10

Si $x \in E_\lambda(u)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Démonstration page 89

Corollaire 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $X \in E_\lambda(A)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Proposition 12

Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Démonstration. D'après la proposition 10, si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme nul $P(u)$ donc $P(\lambda) = 0$. □

Exemple

On retrouve le fait que si p est un projecteur alors $\mathrm{sp}(p) \subset \{0,1\}$ car il est annulé par le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$, et si s est une symétrie alors elle est annulée par le polynôme $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ donc $\mathrm{sp}(s) \subset \{-1,1\}$.

Attention Lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur P de $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut dire que toutes les valeurs propres de u sont racines de P, mais certaines racines de P peuvent ne pas être valeurs propres de u.
Ainsi, le polynôme $X^2 - X = X\,(X-1)$ est un polynôme annulateur de Id_E, alors que 0 n'est pas valeur propre de Id_E.

Corollaire 13

Si P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P.

Corollaire 14

Si P est un polynôme annulateur de u tel que $P(0) \neq 0$ et si E est de dimension finie, alors u est bijectif.

Démonstration. D'après la proposition précédente, 0 n'est pas valeur propre de u. L'endomorphisme u est donc injectif. Comme E est de dimension finie, on en déduit que u est bijectif. □

Corollaire 15

Si P est un polynôme annulateur de A et si $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.

Exemple Si u vérifie $u^4 + u + \mathrm{Id} = 0$, alors u est inversible. Plus précisément, on a $u^{-1} = -u^3 - \mathrm{Id}$ car $u \circ \big(-u^3 - \mathrm{Id}\big) = \mathrm{Id} = \big(-u^3 - \mathrm{Id}\big) \circ u$.

4 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice !carrée

Par définition, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si, et seulement si, $\det(\lambda I_n - A) = 0$. On s'intéresse donc à l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$.

Lemme 16

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. L'application $x \mapsto \det(xB - A)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Principe de démonstration. On procède par récurrence sur n, en utilisant, par exemple, un développement par rapport à la première colonne. Démonstration page 89

Proposition 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ de degré n et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\det(xI_n - A) = x^n - \operatorname{Tr}(A)\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 89

On procède par récurrence sur n et l'on utilise un développement par rapport à la dernière ligne.

Définition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Par abus, on note $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Remarques

- D'après la proposition 17, le polynôme χ_A est unitaire, de degré n et l'on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{Tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\chi_{{}^tA}(\lambda) = \det(\lambda I_n - {}^tA) = \det\left({}^t(\lambda I_n - A)\right) = \chi_A(\lambda)$ donc A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

  De plus, pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$, on a :

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = \operatorname{rg}\left({}^t(A - \lambda I_n)\right) = \operatorname{rg}\left({}^tA - \lambda I_n\right).$$

  En appliquant le théorème du rang, on en déduit :

$$\forall \lambda \in \operatorname{sp}(A) \quad \dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda\left({}^tA\right).$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\chi_{\overline{A}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - \overline{A}\right) = \overline{\det\left(\overline{\lambda} I_n - A)\right)} = \overline{\chi_A(\overline{\lambda})} = \overline{\chi_A}(\lambda).$$

Ainsi, $\chi_{\overline{A}} = \overline{\chi_A}$ donc on obtient :

$$\lambda \in \operatorname{sp}\left(\overline{A}\right) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \operatorname{sp}(A)$$

Théorème 18

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si, et seulement s'il est une racine du polynôme caractéristique de A.

Remarque On retrouve le fait qu'une matrice carrée de taille n a au plus n valeurs propres distinctes puisque χ_A est de degré n.

Point méthode

Le théorème précédent montre l'importance pratique d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant $\det(XI_n - A)$ par opérations élémentaires afin de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes.

Exemples

- Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(X) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3-X & 5 & -6 \\ 4 & 7-X & -9 \\ 3 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients de chaque ligne du déterminant ci-dessus étant $2-X$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ montre qu'on a :

$$\chi_A(X) = -\begin{vmatrix} 2-X & 5 & -6 \\ 2-X & 7-X & -9 \\ 2-X & 6 & -7-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1 & 7-X & -9 \\ 1 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ conduisent alors à :

$$\chi_A(X) = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2-X & -3 \\ 0 & 1 & -X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\left(X^2 - X + 1\right).$$

Le spectre de A est donc $\left\{2, -j, -j^2\right\}$ dans $\mathbb{C}$ et seulement $\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$.

Pour le calcul de $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+5 & 2 & 0 \\ -1 & x+5 & 1 \\ 0 & -2 & x+5 \end{vmatrix}$, ajoutons la troisième colonne à la première ; on obtient :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+5 & 2 & 0 \\ 0 & x+5 & 1 \\ x+5 & -2 & x+5 \end{vmatrix} = (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x+5 & 1 \\ 1 & -2 & x+5 \end{vmatrix}$$

Retranchons la première ligne de la troisième :

$$\chi_A(x) = (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x+5 & 1 \\ 0 & -4 & x+5 \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la première colonne donne :

$$\chi_A(x) = (x+5)\left((x+5)^2 + 4\right).$$

On en déduit que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-5\}$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-5, -5+2i, -5-2i\}$.

p.90 **Exercice 9** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer son spectre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exemple Soit $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^4$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons $L_1, \ldots, L_4$ les lignes de la matrice :

$$\lambda I_4 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - a_3 \end{pmatrix}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \lambda^3 L_4$, on obtient :

$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - a_3 \end{vmatrix},$$

où $P(X) = X^4 - \sum\limits_{i=0}^{3} a_i X^i$.

Un développement par rapport à la première ligne donne :

$$\chi_A(\lambda) = -P(\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = P(\lambda) = \lambda^4 - \sum_{i=0}^{3} a_i \lambda^i.$$

Nous généraliserons ce résultat à l'ordre n, avec l'exercice suivant.

p.90

Exercice 10 Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soit $(a_0,\ldots,a_{p-1})\in \mathbb{K}^p$ et

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\chi_A(X)=X^p+a_{p-1}X^{p-1}+\cdots+a_1X+a_0$.

Indication En notant $L_1,\ldots,L_p$ les lignes de la matrice XI_p-A, on pourra effectuer l'opération $L_1\leftarrow L_1+XL_2+\cdots+X^{p-1}L_p$.

Remarques

- On peut également prouver ce résultat par récurrence en développant par rapport à la première ligne.
- La matrice A de l'exercice précédent est appelée **matrice compagnon** du polynôme P. Elle intervient souvent dans les exercices et problèmes.

Proposition 19

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de coefficients diagonaux $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, alors :

$$\chi_A(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sp}(A)=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}.$$

Démonstration. Pour tout $x\in\mathbb{K}$, la matrice xI_n-A est aussi triangulaire supérieure, de termes diagonaux $x-x_1,\ldots,x-x_n$. Son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux, d'où $\chi_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$. □

Proposition 20

Soit $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $M=\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, avec $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_M=\chi_A\,\chi_B$.

Démonstration. Pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, la matrice $\lambda I_{p+q}-M=\begin{pmatrix}\lambda I_p-A & -C\\ 0 & \lambda I_q-B\end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs. Ainsi :

$$\det(\lambda I_{p+q}-M)=\det(\lambda I_p-A)\det(\lambda I_q-B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \chi_M(\lambda)=\chi_A(\lambda)\,\chi_B(\lambda).$$ □

Proposition 21

Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est scindé.

Démonstration. En effet, χ_A est un polynôme à coefficients complexes ; il est donc scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. □

Remarque En particulier, le spectre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non vide.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$.

Lemme 22

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En utilisant les propriétés des déterminants, on a pour tout scalaire λ :

$$\chi_{PAP^{-1}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - PAP^{-1}\right) = \det\left(P\left(\lambda I_n - A\right)P^{-1}\right) = \det\left(\lambda I_n - A\right) = \chi_A(\lambda).$$ □

Le fait que deux matrices semblables aient le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire que deux matrices représentant le même endomorphisme aient le même polynôme caractéristique, justifie la définition suivante.

Définition 5

On appelle **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme u et l'on note χ_u, le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u.

On a donc, pour tout scalaire λ, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u)$.

Proposition 23

Le polynôme χ_u est unitaire, de degré n et l'on a :

$$\chi_u(X) = X^n - (\operatorname{Tr} u)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

Proposition 24

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont les racines de son polynôme caractéristique.

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 18 de la page 65. □

Corollaire 25

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ a au plus n valeurs propres.

Démonstration. C'est immédiat car $\deg \chi_u = \dim E = n$. □

Proposition 26

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ est scindé.

Démonstration. Découle de la proposition 21. □

Proposition 27

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique, χ_{u_F}, de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.

Démonstration page 90

Remarque En particulier, on a l'inclusion $\operatorname{sp}(u_F) \subset \operatorname{sp} u$.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 6

On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u (resp. de A).

Remarques

- L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est parfois appelé **ordre** ou **multiplicité** de cette valeur propre.
- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$, a au plus n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité, puisque son polynôme caractéristique est de degré n.

  On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A *scindé* sur $\mathbb{K}$.

Si $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$, on a alors :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{et} \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On a les mêmes relations pour $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u est *scindé*.

Démonstration. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On obtient les relations annoncées en identifiant cette expression de χ_A et celle obtenue dans la proposition 17 de la page 64.

On procède de même pour $u \in \mathcal{L}(E)$. □

Remarques

- La première relation est souvent utile en pratique : par exemple, si l'on connaît $n-1$ valeurs propres (non nécessairement distinctes) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A est alors scindé et cette relation permet de déterminer la dernière valeur propre (éventuellement égale à l'une des précédentes).

- Supposant χ_u *scindé*, notons $\mathrm{sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les ordres respectifs de ces valeurs propres.

  On a alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et les relations obtenues s'écrivent :

  $$\mathrm{Tr}\,(u) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i \quad \text{et} \quad \det\,(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i}.$$

  Ainsi, si l'on prend pour endomorphisme u l'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}_E$, qui admet λ comme valeur propre d'ordre $n = \dim E$, on obtient :

  $$\mathrm{Tr}\,(\lambda\,\mathrm{Id}_E) = n\lambda \quad \text{et} \quad \det\,(\lambda\,\mathrm{Id}_E) = \lambda^n.$$

Proposition 29

Soit $A \in \mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ possédant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A de même ordre que λ.

Démonstration. Sachant que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, cela résulte immédiatement des propriétés des polynômes à coefficients réels. □

Proposition 30

Soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$. La dimension d'un sous-espace propre de u est au plus égale à l'ordre de la valeur propre correspondante.

Principe de démonstration. Démonstration page 90

On utilise la stabilité par u de $E_\lambda(u)$ et la proposition 27 de la page précédente.

Corollaire 31

Si λ est valeur propre simple de u, alors $\dim E_\lambda\,(u) = 1$.

Démonstration. Cette dimension est au moins égale à 1 car λ est valeur propre et au plus égale à 1 d'après la proposition 30. □

II Endomorphismes et matrices diagonalisables

On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

1 Diagonalisation

Définition 7

- Un endomorphisme u est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Proposition 32

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Démonstration page 90

Remarques

- Une base dans laquelle la matrice de u est diagonale s'appelle une **base de diagonalisation** de u.
- Une base de diagonalisation de $u \in \mathcal{L}(E)$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Proposition 33

Les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Démonstration page 91

Remarque On verra plus tard qu'il y a plus rapide. En effet, d'après le théorème 45 de la page 81, un endomorphisme annulant un polynôme scindé à racines simples (ici $X^2 - X$ ou $X^2 - 1$) est diagonalisable.

Proposition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme u.

La matrice A est alors diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition 7 de la page précédente. □

Point méthode

Le résultat précédent justifie le fait que :

- pour étudier le caractère diagonalisable d'un endomorphisme, on préfère parfois étudier une matrice qui le représente ;
- réciproquement, pour étudier le caractère diagonalisable d'une matrice, on préfère parfois étudier un endomorphisme qu'elle représente.

Corollaire 35

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Remarque Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A. D'après l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B}$ est égale à $P^{-1}AP$. Cette dernière matrice est donc diagonale.

Point méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $(E_1, \ldots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Si on note P la matrice dont les colonnes sont $E_1, \ldots, E_n$, alors :

$$P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ainsi, en notant $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on obtient $A = PDP^{-1}$.

p.91 **Exercice 11** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Si c'est le cas, fournir une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

La proposition suivante permet de déterminer si un endomorphisme est diagonalisable sans déterminer explicitement ses sous-espaces propres mais en en connaissant simplement leur dimension.

Proposition 36

Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est diagonalisable,

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$,

(iii) $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Démonstration page 92

Corollaire 37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux. Il y a équivalence entre :

(i) la matrice A est diagonalisable,

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A) = \mathbb{K}^n$,

(iii) $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$.

Exemple Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet λ pour unique valeur propre, alors u est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre associé est égal à E, c'est-à-dire si, et seulement si, $u = \lambda \operatorname{Id}_E$.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet λ pour unique valeur propre, elle est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est égal à $\lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^n}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

p.92 **Exercice 12** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

p.92 **Exercice 13** Soit $D_n \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}_n[X]\big)$, avec $n \geqslant 1$, défini par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad D_n(P) = P'.$$

L'endomorphisme D_n est-il diagonalisable ?

Corollaire 38

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et possède n valeurs propres distinctes c'est-à-dire si χ_u est est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Démonstration page 92

p.93 **Exercice 14** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

p.93 **Exercice 15**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les sous-espaces propres de u.
2. En utilisant la proposition 27 de la page 69, déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Attention Il faut bien noter que le le corollaire 38 ne fournit qu'une condition *suffisante* pour que u soit diagonalisable comme le montre l'exercice 11 de la page ci-contre.
Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante.

Théorème 39

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;

(ii) pour toute valeur propre de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.

Principe de démonstration. Étudier les cas d'égalité dans la succession d'inégalités :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} m(\lambda) \leqslant \deg(\chi_u) = \dim E.$$

où $m(\lambda)$ désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.

Démonstration page 93

Corollaire 40

Pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$;

(ii) pour toute valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

Remarque

Pour toute valeur propre simple λ, la dimension du sous-espace propre associé est toujours égale à l'ordre de la valeur propre.

Point méthode

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;

(ii) pour toute valeur propre *multiple* de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a un résultat similaire pour les matrices.

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Cherchons à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la matrice A est diagonalisable.

   On a $\chi_A = (X-1)^2(X+1)$; ainsi χ_A est scindé, -1 est valeur propre simple et 1 est valeur propre double.

Comme -1 est valeur propre simple, on a directement $\dim E_{-1}(A) = 1$. D'après le théorème 39 de la page précédente, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1(A) = 2$.

En appliquant la formule du rang, cela équivaut à :

$$\operatorname{rg}(A - I_3) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim E_1(A) = 1.$$

La troisième ligne de la matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'étant pas nulle, on a $\operatorname{rg}(A - I_3) = 1$ si, et seulement si, les deux premières lignes sont multiples de cette troisième ligne, ce qui équivaut à $a = 0$.

2. Reprenons l'exemple $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la page 65.

- On a vu que χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Par suite A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Mais χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et :

  $$\operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-5, -5+2i, -5-2i\}.$$

  D'après le corollaire 38 de la page 73, la matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Cherchons une base de vecteurs propres de A.

  On vérifie facilement que $(A + 5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ équivaut à :

  $$\begin{cases} -2y = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

  Ainsi $u = (1, 0, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre -5.

  De même $\left(A - (-5+2i)\,I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ équivaut à :

  $$\begin{cases} -2ix - 2y = 0 \\ 2y - 2iz = 0. \end{cases}$$

  Ainsi $v = (1, -i, -1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $-5+2i$. On en déduit que $\overline{v} = (1, i, -1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $-5-2i$. Une base de vecteurs propres de A est alors $(u, v, \overline{v})$.

  Par suite, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

  $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5+2i & 0 \\ 0 & 0 & -5-2i \end{pmatrix}.$$

p.94

Exercice 16

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser A, c'est-à-dire fournir une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale que l'on précisera.

Diagonaliser une matrice permet notamment de calculer ses puissances.

Point méthode

Pour calculer les puissances successives d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable, on peut :

- diagonaliser A, c'est-à-dire déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale ;
- calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P ;
- en déduire, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p \end{pmatrix}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

p.95

Exercice 17 Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Présentation du problème

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre p (à coefficients constants)**, si elle vérifie une relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}, \qquad (\star)$$

où $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ est une famille fixée de scalaires. Une telle suite est entièrement déterminée par ses p premiers termes $u_0, \ldots, u_{p-1}$.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 41

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$. Notons E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(\star)$. Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_a & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, E_a est un sous-espace vectoriel de dimension p de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. En effet, l'application φ est linéaire et elle est bijective, car pour tout élément $(u_0, \dots, u_{p-1})$ de K^p, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_a$ telle que :

$$\varphi\big((u_n))_{n\in\mathbb{N}}\big) = ((u_0, \dots, u_{p-1}).$$

□

Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre p

Reprenons les notations précédentes, et notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ et l'on constate que la relation $(\star)$ vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut pour la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la relation matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

On démontre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.
Pour l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on est alors ramené à déterminer les puissances successives de la matrice A.
Par exemple, si la matrice A possède p valeurs propres distinctes $r_1, \dots, r_p$, alors A est diagonalisable et il existe donc $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = P \begin{pmatrix} r_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & r_p^n \end{pmatrix} P^{-1} U_0.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites géométriques $(r_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $i \in [\![1, p]\!]$. On a donc $E_a \subset \operatorname{Vect}\big((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ et comme $\dim E_a = p$ d'après la proposition 41, on en déduit que $\operatorname{Vect}\big((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une base de E_a.

En conclusion, l'ensemble E_a des suites vérifiant la relation $(\star)$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_p r_p^n.$$

Remarque Les scalaires $r_1, \dots, r_p$ sont les racines de χ_A.
La matrice A est une matrice compagnon. Elle a été étudiée dans l'exercice 10 de la page 67). En particulier, on a :

$$\chi_A = X^p - a_{p-1}X^{p_1} - \cdots - a_1 X - a_0.$$

Dans l'étude des suites vérifiant la relation $(\star)$, le polynôme :

$$P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

est appelé **polynôme caractéristique**.

p.96
Exercice 18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$(u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 2) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = -6u_n - 11u_{n+1} - 6u_{n+2}.$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Résolution des récurrences linéaires d'ordre 2

Proposition 42

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $b \neq 0$ et E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $P = X^2 - aX - b$.

1. Si P a deux racines simples r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E si, et seulement s'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n.$$

2. Si P a une racine double $r \in \mathbb{K}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E si, et seulement s'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n.$$

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si P a deux racines non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E si, et seulement s'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n\big(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta)\big).$$

Ce cas particulier a déjà été étudié en première année. Nous en donnons ici une démonstration matricielle.

D'après ce qui précède E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et si une suite u appartient à E, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n U_0 \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

On retrouve que $\chi_A = P$

- Dans le premier cas, le polynôme caractéristique de A possède deux racines distinctes, donc A possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent donc une base de E d'après ce qui a été traité dans le cas général.

- Dans le deuxième cas, comme $\chi_A = P = (X-r)^2$, la matrice A admet r pour valeur propre double et, comme $A \neq rI_2$, elle n'est pas diagonalisable.

  Si l'on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{K}^2$ telle que e_1 soit un vecteur propre de A, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Comme $\chi_f = \chi_A$ et $f \neq r\,\text{Id}$, on en déduit que $t = r$ et $s \neq 0$. Enfin, en considérant $\mathcal{B}' = (e_1, e_2/s)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

  Il existe donc $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ = B = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

  La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $J^2 = 0$. En appliquant la formule du binôme (c'est possible, car les matrices rI_2 et J commutent), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B^n = r^n I_2 + \binom{n}{1} r^{n-1} J = r^n I_2 + n r^{n-1} J, \ \text{(valable pour } n = 0)$$

  et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = r^n I_2 + \binom{n}{1} r^{n-1} J = r^n I_2 + n r^{n-1} QJQ^{-1}.$$

  On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + n r^{n-1} QJQ^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

  On a donc établi que toute suite de E est combinaison linéaire des deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\dim E = 2$ et $r \neq 0$ puisque $b \neq 0$, les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E, ce qui établit le résultat annoncé.

- Dans le dernier cas, on note $E_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On a donc $E = E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, d'après le premier cas, $E_{\mathbb{C}}$ est engendré par les suites $v = \left(\rho^n e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \left(\rho^n e^{-in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, E contient les suites $\frac{u+v}{2} = (\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\frac{u-v}{2i} = (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\rho \sin\theta \neq 0$, on démontre aisément que ces deux suites forment une famille libre. Enfin, comme E est de dimension 2, on aboutit au résultat demandé.

3 Diagonalisation et polynômes annulateurs

Théorème de Cayley-Hamilton

On a vu l'intérêt d'obtenir des polynômes annulateurs dans la recherche de valeurs propres d'un endomorphisme.

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est un polynôme annulateur de u.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.

Nous proposons ici une démonstration en plusieurs étapes s'appuyant sur les matrices compagnons, notion hors-programme mais qui fait l'objet de nombreux sujets de concours.

p.97

Exercice 19 Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas d'une matrice compagnon

Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

On note $(E_0, \dots, E_{p-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a déjà montré dans l'exercice 10 de la page 67 que :

$$\chi_A(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

1. Calculer $A^k E_0$, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$.
2. Calculer AE_{p-1}, puis $\chi_A(A)\, E_0$.
3. En déduire que $\chi_A(A) = 0$.

p.97

Exercice 20 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et x un vecteur non nul de E.

1. Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E, noté F_x, stable par u et contenant x.
2. Prouver que, si F_x est de dimension p, alors $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est une base de F_x.

Théorème 43 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Le polynôme caractéristique de u annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

Principe de démonstration. On utilise l'exercice 20, puis les exercices 10 de la page 67 et 19 de la page précédente sur les matrices compagnons. Démonstration (non exigible) page 97

Attention Comme il fait intervenir le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le théorème de Cayley-Hamilton n'a de sens que si E est de dimension **finie**.

Corollaire 44 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

p.98

Exercice 21 On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ de l'exemple page 65.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.

Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

On a déjà prouvé que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) est scindé à racines simples, alors l'endomorphisme (resp. la matrice) est diagonalisable mais qu'il ne s'agit que d'une condition *suffisante*.

Le théorème suivant prolonge ce résultat et donne une condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable.

Théorème 45

Un endomorphisme de E est diagonalisable si, et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème n'est pas exigible. Montrons néanmoins que la condition est nécessaire. Si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle

que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la liste des valeurs propres de u comptées avec leurs multiplicité.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(u)\big) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$, si bien qu'en prenant $P = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (X - \lambda)$, on a $P(u) = 0$.

Nous proposons une démonstration de l'autre implication dans l'exercice suivant. □

p.98 **Exercice 22** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur scindé à racines simples $P = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$.

1. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $P_i = \prod\limits_{j \in [\![1,r]\!] \setminus \{i\}} (X - \alpha_j)$.

   Prouver que la famille $(P_1, \ldots, P_r)$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.
2. En déduire qu'il existe des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tels que $\mathrm{Id}_E = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i P_i(u)$.
3. Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P_i(u)(x) \in \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_i \,\mathrm{Id}_E)$.
4. En déduire que u est diagonalisable.

Corollaire 46

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement s'il admet $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 45 de la page précédente et de sa démonstration (le polynôme annulateur que l'on a exhibé est justement $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (X - \lambda)$). □

Corollaire 47

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F est alors diagonalisable.

Démonstration page 99

p.99 **Exercice 23** Soit u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à u et v.

Remarque S'il existe une base de diagonalisation commune à deux endomorphismes de E, alors ils commutent car deux matrices diagonales commutent.

III Endomorphismes et matrices trigonalisables

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Définition 8

- L'endomorphisme u est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i).$$

Proposition 48

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme u.

La matrice A est alors trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition 8. □

Corollaire 49

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

Remarque On aurait pu aussi choisir la forme triangulaire inférieure.
En effet, il est facile de vérifier que, si la matrice d'un endomorphisme u dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est triangulaire supérieure, alors sa matrice dans la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$ est triangulaire inférieure.

Théorème 50

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Une matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Principe de démonstration. Le sens direct découle de la proposition 19 de la page 67.
La réciproque se prouve par récurrence. Démonstration page 99

p.100 **Exercice 24** Soit u trigonalisable et F un sous-espace vectoriel stable par u.

Montrer que l'endomorphisme induit u_F est aussi trigonalisable.

Corollaire 51

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Démonstration. Conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss. □

Remarque Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie non trigonalisable.
Par exemple, une rotation du plan euclidien d'angle $\theta \neq 0 \mod \pi$ a un polynôme caractéristique non scindé donc n'est pas trigonalisable.

Exemples

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre double λ. Deux cas se présentent :
   (a) A est diagonalisable et, d'après l'exemple 38 de la page 73, on a $A = \lambda I_2$.
   (b) A n'est pas diagonalisable et le sous-espace propre pour la valeur propre λ est alors de dimension 1.
   Soit u un vecteur propre associé à cette valeur propre qu'on complète en une base (u, v) de $\mathbb{K}^2$. Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^2$ à cette base, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, car A n'est pas diagonalisable. Comme λ est la seule valeur propre de A, on a $\beta = \lambda$.
   En prenant comme base $(\alpha u, v)$ à la place de (u, v), on remarque que A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ. Supposons A non diagonalisable, c'est-à-dire $\dim E_\mu(A) = 1$.
   Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et v un vecteur propre de A pour la valeur propre μ. Complétons (u, v) en une base (u, v, w) de $\mathbb{K}^3$ et notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base.
   On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Tr}(A) = \lambda + 2\mu$ donne $\gamma = \mu$.
   On peut encore faire mieux comme le montre l'exercice suivant.

p.100

Exercice 25 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ. On suppose A non diagonalisable, c'est-à-dire que $\dim E_\mu(A) = 1$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra modifier le troisième vecteur d'une base de trigonalisation.

p.100

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est trigonalisable et déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

p.101

Exercice 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Quelle est la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre 2 ? Donner une équation cartésienne de ce sous-espace propre.
3. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $U = (A - 2I_3)\,V$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2. Justifier l'existence d'un vecteur propre W de A pour la valeur propre 2 tel que (U, V, W) soit une base de $\mathbb{K}^3$; donner un tel vecteur.
4. Expliciter une matrice $P \in \mathcal{GL}_3\,(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

p.102

Exercice 28 Recherche de la valeur propre de plus grand module.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant comme valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p|\,.$$

Montrer que $\lambda_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\mathrm{Tr}\left(A^{k+1}\right)}{\mathrm{Tr}\left(A^k\right)}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Soit $x \in E_\lambda(u)$, on a $u(x) = \lambda x$.

Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit, par linéarité : $x = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} u$.

Exercice 2

1. Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Si le vecteur x est non nul, alors le scalaire λ_x est unique, sinon tous les scalaires λ conviennent.

   Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

   - Si x est proportionnel à y, alors il existe un scalaire μ tel que $x = \mu y$. Ainsi :
   $$u(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mu y = u(\mu y) = \mu \lambda_y y$$
   Comme le vecteur y est non nul, on en déduit que $\lambda_x \mu = \lambda_y \mu$. Le scalaire μ étant non nul (car $x \neq 0$), on en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
   - Si la famille (x, y) est libre, alors l'égalité :
   $$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
   implique que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

   Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$ non nul, $u(x) = \lambda x$. Cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0$, cela prouve que u est une homothétie.
2. Il est clair qu'une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.

   Réciproquement, soit u un endomorphisme stabilisant toutes les sous-espaces vectoriels de E. Pour tout vecteur x non nul, $\mathbb{K}x$ est stable par u donc $u(x) \in \mathbb{K}x$, ce qui implique que la famille $(x, u(x))$ est liée. On en déduit, grâce à la question précédente, que u est une homothétie.

   Ainsi, les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Exercice 3 Un complexe λ est valeur propre de D si, et seulement si, l'équation $f' = \lambda f$ a une solution non nulle $f \in E$. Or les solutions de cette équation différentielle sont les multiples de la fonction e_λ définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad e_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$.

En conclusion, tout complexe λ est valeur propre de D et $E_\lambda(D) = \operatorname{Vect}(e_\lambda)$.

Remarque Nous verrons, dans ce chapitre, qu'il n'est pas possible, en dimension finie, qu'un endomorphisme possède une infinité de valeurs propres.

Proposition 2 Soit λ une valeur propre de v ; comme u et v commutent, ainsi que u et Id_E, il en est de même de $(v - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et de u. D'après la proposition 14 de la page 16, le sous-espace $E_\lambda(v) = \operatorname{Ker}(v - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par u.

Proposition 3 Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p = 1$, il n'y a rien à prouver.

Supposons la proposition vraie au rang $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u et $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}(u)$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$.

Exprimons, puisque x est nul, que $u(x)-\lambda_{p+1}x=0$:

$$\begin{aligned}0=u(x)-\lambda_{p+1}x&=\sum_{i=1}^{p+1}u(x_i)-\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_{p+1}x_i\\&=\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i-\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_{p+1}x_i\\&=\sum_{i=1}^{p+1}(\lambda_i-\lambda_{p+1})\,x_i=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i-\lambda_{p+1})\,x_i.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall i\in[\![1,p]\!]\quad(\lambda_i-\lambda_{p+1})\,x_i=0.$$

Les λ_j étant deux à deux distincts, on a $\lambda_i\neq\lambda_{p+1}$, pour $i\neq p+1$, et donc $x_i=0$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$. L'égalité $x=x_{p+1}$ donne enfin $x_{p+1}=0$.

Exercice 4 On conserve les notations de l'exercice 3 de la page 59. On a vu dans cet exercice que chaque e_{λ_i} est vecteur propre de D pour la valeur propre λ_i. La famille $(e_{\lambda_1},\dots,e_{\lambda_n})$ est donc libre, puisque c'est une famille de vecteurs propres de D associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

Exercice 5 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $t>0$, on a :

$$u(f_\alpha)(t)=t\left(\alpha t^{\alpha-1}\right)=\alpha t^\alpha;$$

donc $u(f_\alpha)=\alpha f_\alpha$ et la fonction non nulle f_α est vecteur propre de u pour la valeur propre α.

Par suite, si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(f_{\alpha_1},\dots,f_{\alpha_n})$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$.

Corollaire 5 D'après la proposition 3 de la page 59, à toute famille de p valeurs propres deux à deux distinctes on peut associer une famille libre de p vecteurs propres, donc $p\leqslant n$.

Exercice 6

1. Soit λ une valeur propre de A. Considérons $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur propre associé. On a :

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=\lambda x_1\\x_1+x_2+\cdots+x_n=\lambda x_2\\\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\x_1+x_2+\cdots+x_n=\lambda x_n\end{cases}$$

Si $\lambda\neq0$, on en déduit que $x_1=\cdots=x_n$ puis, comme il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_i\neq0$, on obtient $\lambda=n$.

Si $\lambda=0$, alors le système devient $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$.

Réciproquement, tout vecteur colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ appartient à $E_n(J)$ et tout vecteur appartenant à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ appartient au noyau de J.

Ainsi, $\text{sp}(J) = \{0, n\}$, $E_n(J) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et le noyau de J est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $AX = \lambda X$ si, et seulement si, $\alpha JX = (\lambda - \beta)X$.
   Si $\alpha = 0$, alors $A = \beta I_n$ donc la seule valeur propre de A est β et le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   Sinon, λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\frac{\lambda-\beta}{\alpha} \in \text{sp}(J) = \{0, n\}$.
   Ainsi, $\text{sp}(A) = \{\beta, \alpha n + \beta\}$ et les sous-espaces propres associés sont respectivement $E_0(J)$ et $E_n(J)$.

Exercice 7
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A_θ si, et seulement si, la matrice $A_\theta - \lambda I_2$ n'est pas inversible, ce qui équivaut à :

$$\det(A_\theta - \lambda I_2) = \big(\cos(\theta) - \lambda\big)^2 + \sin^2\theta = 0.$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela équivaut à $\lambda = \cos\theta \pm i \sin\theta$. Ainsi, $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

- Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A_\theta) = \varnothing$.
- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A_\theta) = \{1\}$.
- Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A_\theta) = \{-1\}$.

Exercice 8 Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$ tel que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \overline{V_j} = 0$. En conjuguant, on obtient $\sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} V_j = 0$ et, comme la famille $(V_1, \ldots, V_k)$ est libre, on en déduit :

$$\overline{\alpha_1} = \cdots = \overline{\alpha_k} = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Par suite la famille $\left(\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_k}\right)$ est libre et la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre $\overline{\lambda}$ est supérieure ou égale à k.

Le résultat obtenu, $\dim E_\lambda(A) \leqslant \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$, étant vrai pour toute valeur propre de A, s'applique en particulier à $\overline{\lambda}$, pour fournir l'autre sens de l'inégalité ; on en déduit que les sous-espaces propres de A pour des valeurs propres conjuguées ont même dimension.

La famille $\left(\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_k}\right)$, étant une famille libre de cardinal k de l'espace $E_{\overline{\lambda}}(A)$ de dimension k, c'en est une base ; d'où la conclusion.

Proposition 10 Si $u(x) = \lambda x$, on établit, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, on en déduit $P(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k u^k(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.

Lemme 16 Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, le résultat est évident.

Supposons le résultat vrai au rang $n-1 \in \mathbb{N}^*$.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, un développement par rapport à la première colonne donne :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \det(xB - A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (x b_{i,1} - a_{i,1})\, \Delta_{i,1}(x),$$

où $\Delta_{i,1}(x)$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la première colonne de la matrice $xB - A$. D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $\Delta_{i,1}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$; la conclusion résulte facilement du développement précédent de $\det(xB - A)$.

Proposition 17

- Prouvons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynomiale de degré n dont les coefficients de x^n et x^{n-1} sont respectivement 1 et $-\operatorname{Tr}(A)$.

  Pour $n = 1$, le résultat est évident.

  Supposons le résultat vrai au rang $n-1 \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, un développement par rapport à la dernière ligne donne :

  $$\forall x \in \mathbb{K} \quad \det(xI_n - A) = (x - a_{n,n})\, \Delta_{n,n}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} \Delta_{n,j}(x),$$

  où $\Delta_{n,j}(x)$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la n-ième ligne et la j-ème colonne de la matrice $xI_n - A$.

  * Pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, on constate que $\Delta_{n,j}(x)$ est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n-1$ dont la j-ème ligne ne dépend pas de x. Un développement de $\Delta_{n,j}(x)$ par rapport à sa j-ème ligne montre, à l'aide du lemme, que $\Delta_{n,j}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-2$. Les coefficients de x^n et de x^{n-1} de $\det(xI_n - A)$ sont donc ceux de $(x - a_{n,n})\, \Delta_{n,n}(x)$.
  * Si l'on note $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de A, on a $\Delta_{n,n}(x) = \det(xI_{n-1} - A_1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, les coefficients de x^n et de x^{n-1} de $\det(xI_n - A)$ sont ceux de $(x - a_{n,n})\left(x^{n-1} - \operatorname{Tr}(A_1)\, x^{n-2}\right)$. Le coefficient de x^n est donc égal à 1 et celui de x^{n-1} à $-a_{n,n} - \operatorname{Tr}(A_1) = -\operatorname{Tr}(A)$.

- Enfin, le coefficient constant de la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est égal à la valeur en 0 de cette fonction, c'est-à-dire à $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Exercice 9 En développant $\det(XI_3 - A)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = (X-1)\left((X-\cos\theta)^2 + \sin\theta^2\right) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\theta X + 1\right).$$

Ainsi, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ ou $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1\}$ (si $\theta \equiv \pi[2\pi]$).

Exercice 10 Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \cdots + X^{p-1}L_p$, la matrice $XI_p - A$ se transforme en :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X & a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Un développement suivant la première ligne donne alors :

$$\chi_A(X) = (-1)^{p+1}P(X) \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

donc

$$\chi_A(X) = (-1)^{p+1}P(X)(-1)^{p-1} = P(X).$$

Proposition 27 Soit p la dimension de F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.

La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$. Le polynôme caractéristique de u, égal à $\chi_A(X)\chi_D(X)$ est donc divisible par le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de u_F.

Proposition 30 Notons $n(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Comme $E_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$, on a $1 \leqslant n(\lambda)$. De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$; son polynôme caractéristique vaut donc $(X-\lambda)^{n(\lambda)}$. D'après la proposition 27, il divise $\chi_u(X)$, ce qui donne $n(\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

Proposition 32 S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u, alors la matrice de u dans cette base est diagonale donc u est diagonalisable.

Réciproquement, s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit diagonale, alors cette base est constituée de vecteurs propres de u.

Proposition 33

- Soit p un projecteur de E. On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de p. Ainsi p est diagonalisable.

  On peut même préciser que le spectre de p est $\{0,1\}$ sauf :

  * si $p = 0$, auquel cas $\mathrm{sp}(p) = \{0\}$;
  * ou si $p = \mathrm{Id}_E$, auquel cas $\mathrm{sp}(p) = \{1\}$.

- Soit s une symétrie de E. On a $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de s. Ainsi, s est diagonalisable.

  On peut même préciser que son spectre est $\{-1,1\}$ sauf :

  * si $s = \mathrm{Id}$, auquel cas $\mathrm{sp}(s) = \{1\}$;
  * ou si $s = -\mathrm{Id}_E$,auquel cas $\mathrm{sp}(s) = \{-1\}$.

Exercice 11

- Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & -2 \\ X-1 & X-5 & -2 \\ 1-X & 3 & X \end{vmatrix}.$$

  En notant cette fois L_1, L_2 et L_3 les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent :

$$\chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2.$$

  Ainsi, $\mathrm{sp}(A) = \{1,2\}$.

- On obtient le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système $AX = X$ soit :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

  Notons E_1, E_2 et E_3 les équations de ce système. En effectuant les opérations $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 + E_1$, on montre que ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi $E_1(A) = \mathbb{K} v_1$, où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  L'étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

équivalent à $2x - 3y - 2z = 0$. On obtient $E_2(A) = \mathbb{K}v_2 \oplus \mathbb{K}v_3$ où :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Comme les sous-espaces propres sont en somme directe d'après la proposition 3 de la page 59, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre donc une base de vecteurs propres. Ainsi, la matrice A est diagonalisable.
  La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ est :
  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  On peut donc conclure que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 36 D'après la proposition 3 de la page 59, la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe.

- Supposons (i). Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de u, la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ contient E, ce qui implique (ii).
- La somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ étant directe, on a :
  $$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u).$$
  On en déduit que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
- Supposons (iii). En réunissant des bases de chaque sous-espace propre de u, on obtient, d'après la proposition 3 de la page 59, une famille libre de n vecteurs propres de u ; ce qui prouve (i).

Exercice 12 La matrice A est triangulaire, de polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)^3$. Elle possède donc 1 comme valeur propre triple. Si elle était diagonalisable, son endomorphisme canoniquement associé serait égal à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, ce qui équivaut à $A = I_3$. Comme ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 13 Pour $P \neq 0$, on a $\deg(P') < \deg(P)$; par suite $P' = D_n(P) = \lambda P$ est impossible avec $\lambda \neq 0$. Ainsi $\mathrm{sp}(D) \subset \{0\}$.

Comme $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathbb{K}_0[X] \neq \mathbb{K}_n[X]$, l'unique valeur propre de D_n est 0 et D_n n'est pas diagonalisable.

Corollaire 38 Comme $\deg(\chi_u) = n$, l'endomorphisme u possède n valeurs distinctes si, et seulement si, χ_u est scindé à racines simples.

D'après le corollaire 31 de la page 70, chaque sous-espace propre est alors de dimension 1.

Si $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = n = \dim E$. On conclut avec la proposition 36 de la page 72.

Exercice 14 Le polynôme caractéristique de A, égal à $(X-1)(X-4)(X-6)$ est scindé simple donc A est diagonalisable.

Exercice 15

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En retranchant la deuxième colonne de la matrice $xI_3 - A$ de la première, puis en ajoutant la dernière colonne à la deuxième, on obtient :

$$\chi_u(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -x & x-2 & -1 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{vmatrix}.$$

   En ajoutant la première ligne à la deuxième, on obtient :

$$\chi_u(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ x-2 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2).$$

   Comme χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable. On obtient facilement les résultats suivants :

$$E_0(u) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_1(u) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E_2(u) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u sur F. D'après la proposition 27 de la page 69, χ_{u_F} divise χ_u et, comme χ_u est scindé à racines simples, il en est de même de χ_{u_F}.

   Par suite, u_F est diagonalisable et, comme un vecteur propre de u_F est un vecteur propre de u élément de F, on en déduit que F est une somme de sous-espaces propres de u, puisque ces sous-espaces propres sont de dimension 1.

   Il est clair que, réciproquement, toute somme de sous-espaces propres de u est stable par u.

   En conclusion, les sous-espaces stables par u sont :

   - $\{0\}$ et E ;
   - les trois droites propres $E_0(u)$, $E_1(u)$ et $E_2(u)$;
   - les trois plans $E_0(u) \bigoplus E_1(u)$, $E_1(u) \bigoplus E_2(u)$ et $E_2(u) \bigoplus E_0(u)$.

Théorème 39 On pose $F = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} E_\lambda(u)$.

D'après la proposition 36 de la page 72, u est diagonalisable si, et seulement si, $F = E$ donc si, et seulement si, $\dim F = \dim E$. Or, d'après la proposition 30 de la page 70, pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$, on a $\dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$. Ainsi, :

$$\dim F = \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} m(\lambda) \leqslant \deg(\chi_u) = \dim E.$$

Par suite, u est diagonalisable si, et seulement si :

$$\forall \lambda \in \operatorname{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} m(\lambda) = \deg(\chi_u);$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\forall \lambda \in \operatorname{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \chi_u \text{ est scindé.}$$

Exercice 16

1. Soit $x \in \mathbb{K}$. En retranchant la troisième ligne de la matrice $xI_3 - A$ de la première ligne, on obtient :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & -3 \\ -2 & x-2 & -6 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & -x-2 \\ -2 & x-2 & -6 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la première colonne à la troisième, puis en développant par rapport à la première ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+2 & -2 & 0 \\ -2 & x-2 & -8 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x+2)\left((x-2)^2 - 16\right) \\ &= (x+2)(x+2)(x-6) = (x+2)^2(x-6). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique χ_A est donc scindé.

- La valeur propre 6 étant simple, on a $\dim E_6(A) = 1$.
- La valeur propre -2 est double et $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est de rang 1. On déduit du théorème du rang que $\dim E_{-2}(A) = 2$.

Les deux conditions du théorème 39 de la page 74 étant vérifiées, la matrice A est diagonalisable.

2. - En reprenant la matrice $A + 2I_3$, on constate qu'une équation de $E_{-2}(A)$ est $x + 2y + 3z = 0$. On en déduit qu'une base de ce sous-espace propre est, par exemple :

$$(U, V) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ étant de rang 2, le sous-espace propre $E_6(A)$ est caractérisé par deux équations linéairement indépendantes, par exemple :

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 0 & (E_1) \\ x + 2y - 5z = 0 & (E_2) \end{cases}$$

On obtient un système équivalent, en remplaçant l'équation (E_1) par l'équation $\frac{1}{2} \times (E_1) + (E_2)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}+2y} - 2z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

On en déduit facilement que $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 6.

La famille (U, V, W) est alors une base de vecteurs propres de A et si l'on note P la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17

- Soit $x \in \mathbb{K}$. On a $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -1 & x & -2 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$.

  En ajoutant la deuxième colonne à la première, on obtient :

  $$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ x-1 & x & -2 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & x & -2 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix}.$$

  En retranchant la première ligne de la deuxième ligne, puis en développant par rapport à la première colonne, il vient :

  $$\chi_A(x) = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)^2 (x-3).$$

  Le polynôme χ_A est donc scindé, et la matrice A admet 3 pour valeur propre simple et 1 pour valeur propre double. D'après le corollaire 31 de la page 70 et le théorème 39 de la page 74, A est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est de dimension 2, c'est-à-dire si, et seulement si, $\operatorname{rg}(A - I_3) = 1$. C'est le cas puisque $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Une équation du sous-espace propre pour la valeur propre 1 est $x - y + 2z = 0$. On en déduit qu'une base de ce sous-espace propre est, par exemple :

  $$(U, V) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est élément de $E_3(A)$ si, et seulement si :

  $$x + y - 2z = x - 3y + 2z = x - y = 0.$$

  Cela équivaut à $x = y = z$.

  On en déduit que $E_3(A) = \operatorname{Vect}(W)$, avec $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La famille (U,V,W) est donc une base de vecteurs propres de A et, en notant $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Pour inverser la matrice P, on résout le système $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$. On obtient :

$$\begin{cases}x&=\ X+Y-2Z\\y&=-X+Y\\z&=\ X-Y+2Z\end{cases}\qquad\text{donc}\qquad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

- Un dernier calcul donne finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&1-3^n&2\times3^n-2\\3^n-1&3-3^n&2\times3^n-2\\3^n-1&1-3^n&2\times3^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 18 Le polynôme caractéristique associée à cette récurrence linéaire est :

$$P=X^3+6X^2+11X+6.$$

On constate que -1 est racine de P, puis que :

$$P=(X+1)\left(X^2+5X+6\right)=(X+1)(X+2)(X+3).$$

En utilisant la méthode présentée, on prouve qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\alpha(-1)^n+\beta(-2)^n+\gamma(-3)^n.$$

Pour déterminer α, β et γ, on utilise les valeurs de u_0, u_1 et u_2, ce qui conduit à la résolution du système :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\\alpha+2\beta+3\gamma=0\\\alpha+4\beta+9\gamma=2.\end{cases}$$

Les opérations élémentaires $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$ donnent le système équivalent :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\\beta+2\gamma=-1\\3\beta+8\gamma=1.\end{cases}$$

L'opération $L_3\leftarrow L_3-3L_2$ donne le système équivalent :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\\beta+2\gamma=-1\\2\gamma=4.\end{cases}$$

On en déduit $\gamma=2$, $\beta=-5$ et $\alpha=4$. On a donc établi :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=4(-1)^n-5(-2)^n+2(-3)^n.$$

Exercice 19

1. On a immédiatement :
$$\forall k \in [\![0, p-2]\!] \quad AE_k = E_{k+1},$$
d'où l'on déduit par récurrence :
$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad A^k E_0 = E_k.$$
2. On a $AE_{p-1} = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k E_k$, c'est-à-dire :
$$A^p E_0 = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k E_0.$$
Par suite, $\chi_A(A)\, E_0 = 0$.
3. Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a :
$$\chi_A(A)\, E_k = \chi_A(A)\, A^k E_0 = A^k \chi_A(A)\, E_0 = 0,$$
en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[A]$.
Comme $(E_0, \ldots, E_{p-1})$ est une base de $\mathbb{K}^p$, on en déduit $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 20 Notons $F_x = \mathrm{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}}\Big)$.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x, on a :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) \in F,$$
donc $F_x \subset F$. Comme F_x est stable par u et contient x, F_x est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.
- La famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ de vecteurs de F_x contient p éléments, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice pour conclure.
Soit $y \in F_x$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$.
Par ailleurs, la famille à $p+1$ éléments, $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p}$, est liée donc il existe $T \in \mathbb{K}_p[X]$ non nul tel que $T(u)(x) = 0$.
On effectue la division euclidienne de P par T :
$$P = QT + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < p.$$
On en déduit $y = P(u)(x) = Q(u) \circ T(u)(x) + R(u)(x)$. Comme $T(u)(x) = 0$ et $\deg(R) < p-1$, on a alors $y \in \mathrm{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}\Big)$.
En conclusion, la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ engendre F_x, c'est est donc une base.

Théorème 43 Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et F_x le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x dont on note p la dimension. D'après le lemme précédent, $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de F_x donc il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$. Il en résulte que la matrice A de l'endomorphisme induit u_{F_x} par u sur F_x dans la base $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une matrice compagnon.

Or, d'après les exercices 10 et 19, comme A est une matrice compagnon, $\chi_A(A) = 0$. Par conséquent, $\chi_{u_{F_x}}(u_{F_x}) = 0$ D'après la proposition 27, χ_{u_x} divise χ_u donc $\chi_u(u_{F_x}) = 0$. Comme $x \in E_x$, on peut écrire :

$$\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_{F_x})(x) = 0.$$

Cette dernière égalité a été établie pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et elle est évidente pour $x = 0$. On en déduit que $\chi_u(u) = 0$.

Exercice 21 On a vu que $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3 = 0$. On en déduit :

$$A\left(\frac{A^2}{2} - \frac{3A}{2} + \frac{3I_3}{2}\right) = I_3.$$

Par suite, A est inversible et l'on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3A + 3I_3\right).$$

Exercice 22

1. La famille $(P_1, \ldots, P_r)$ est constituée de $r = \dim \mathbb{K}_{r-1}[X]$ éléments de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$. Il suffit donc de prouver sa liberté pour en déduire qu'elle est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.

   Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \mu_i P_i = 0$.

   Soit $k \in [\![1, r]\!]$, on a $0 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i P_i(\alpha_k) = \mu_k P_k(\alpha_k)$. Comme les α_i sont distincts, on a $P_k(\alpha_k) \neq 0$ donc $\mu_k = 0$. Par suite, la famille $(P_1, \ldots, P_r)$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.
2. Comme le polynôme constant égal à 1 appartient à $\mathbb{K}_{r-1}[X] = \operatorname{Vect}(P_1, \ldots, P_r)$, il existe des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i P_i$. Par conséquent, en évaluant en u cette relation, on a $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{r} \mu_i P_i(u)$.
3. Soit $x \in E$ et $i \in [\![1, r]\!]$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(P_i(u)(x)) = P(u)(x) = 0$ donc :

   $$P_i(u)(x) \in \operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E).$$
4. Pour tout $x \in E$, on a $x = \mathrm{Id}_E(x) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\mu_i P_i(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)}$ donc :

   $$E \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E).$$

   Une base adaptée à cette décomposition est alors une base de diagonalisation de u.

   Remarque On n'est pas assuré que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)$ ne soient pas réduit à $\{0_E\}$. Par conséquent les α_i ne sont pas nécessairement tous valeurs propres, mais on a l'inclusion $\operatorname{sp}(u) \subset \{\alpha_1, \ldots \alpha_r\}$.

Corollaire 47 En effet, u étant diagonalisable il admet, d'après le théorème 45, un polynôme annulateur scindé à racines simples. Celui-ci annule également u_F donc d'après le même théorème, u_F est diagonalisable.

Exercice 23 Comme u est diagonalisable, on a, d'après la proposition 36 de la page 72 :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de u.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$, d'après la proposition 2 de la page 59, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Si l'on note v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$, alors, d'après le corollaire 47 de la page 82, il est diagonalisable. Il existe donc une base de $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres de v et de u (car ils appartiennent à $E_{\lambda_i}(u)$).

Par conséquent, il existe une base de constituée de vecteurs propres de v et de u, c'est-à-dire une base de diagonalisation commune à u et v.

Théorème 50 D'après la proposition 48 de la page 83, il est équivalent d'établir le résultat pour les matrices ou pour les endomorphismes.

- Si un endomorphisme u est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est égal à celui d'une matrice triangulaire supérieure ; il est donc scindé sur $\mathbb{K}$, d'après la proposition 19 de la page 67.
- Montrons la réciproque par récurrence. Pour $n = 1$ il n'y a rien à prouver.

  Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n+1$ et χ_u soit scindé.

  Comme χ_u est scindé il possède une racine. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Complétons x en une base $\mathcal{B}$ de E de sorte que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

  où le bloc nul est une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  En développant le polynôme caractéristique de u par rapport à la première colonne, on obtient $\chi_u(X) = (X - \lambda)\chi_A(X)$. Comme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, on en déduit que χ_A l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable, il existe donc $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P_n^{-1} A P_n$ soit triangulaire supérieure.

  Notons P_{n+1} la matrice par blocs $P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice inversible d'inverse $P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix}$.

  Un produit par blocs donne alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P_n^{-1} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & L P_n \\ 0 & P_n^{-1} A P_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Ainsi $P_{n+1}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{n+1}$ est triangulaire supérieure, ce qui permet de conclure que u est trigonalisable.

Exercice 24 Le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u qui est scindé. Ainsi, le polynôme caractéristique de u_F est scindé donc u_F est trigonalisable.

Exercice 25 Comme cela a été vu en remarque, il existe une base (u, v, w) telle que, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base, on ait :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose $w' = au + bv + cw$ avec c non nul de sorte que la famille (u, v, w') soit une base.

On a alors :

$f(w') = a\lambda u + b\mu v + c\,(\alpha u + \beta v + \mu w) = (a\lambda + c\alpha - a\mu)\,u + (b\mu + c\beta - b\mu)\,v + \mu w'.$

Ainsi, on prend $a = \frac{c\alpha}{\mu - \lambda}$, de sorte que la matrice de f dans la base (u, v, w') soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & c\beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Comme $\dim E_\mu(f) = 1$, on a $\beta \neq 0$ et l'on prend $c = 1/\beta$ pour obtenir la forme annoncée.

Exercice 26

1. Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 2X & -3 \\ 1 & X & -6 \\ -2 & -X & X+10 \end{vmatrix}.$$

En notant cette fois L_1, L_2 et L_3 les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donnent :

$$\chi_A(X) = X \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & X+4 \end{vmatrix} = X\,(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et -1 de multiplicité respectives 1 et 2. De plus, comme la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 1, on a $\dim E_{-1}(A) \neq 2$.

D'après le corollaire 40 de la page 74, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable, d'après le théorème 50 de la page 83. En étudiant les systèmes $AX = 0$ et $AX = -X$, on obtient facilement que :

   - $E_0(A) = \text{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   - $E_{-1}(A) = \text{Vect}(v)$, avec $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   On peut compléter (u, v) en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ à l'aide, par exemple, du vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En notant $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à la base (u, v, w), il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

   On peut soit calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et obtenir, par un simple calcul matriciel, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   On peut aussi obtenir $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u - v - w$ par résolution d'un système ; on en déduit que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 27

1. Soit $x \in \mathbb{K}$. Pour calculer $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-14 & -18 & -18 \\ 6 & x+7 & 9 \\ 2 & 3 & x+1 \end{vmatrix}$, retranchons la deuxième colonne de la troisième ; il vient :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-14 & -18 & 0 \\ 6 & x+7 & -x+2 \\ 2 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-14 & -18 & 0 \\ 6 & x+7 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

   En ajoutant la dernière ligne à la deuxième, puis en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\chi_A(x) = (x-2) \begin{vmatrix} x-14 & -18 & 0 \\ 8 & x+10 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)\left(x^2 - 4x + 4\right) = (x-2)^3.$$

Ainsi χ_A est scindé et admet 2 pour racine triple.

Comme $A \neq 2I_3$, on a $E_2(A) \neq \mathbb{K}^3$ et donc A n'est pas diagonalisable.

2. Le sous-espace propre de A pour la valeur propre 2 est de dimension 2 puisque la matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 18 \\ -6 & -9 & -9 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 1 : c'est le plan de $\mathbb{K}^3$ d'équation $2x + 3y + 3z = 0$.

3. On constate que $U = (A - 2I_3)\,V = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'est pas nul et appartient au plan d'équation $2x + 3y + 3z = 0$; c'est donc un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.

   Le vecteur $W = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $E_2(A)$ et, comme la famille (U, W) est libre, c'est une base de ce plan.

   Comme $(A - 2I_3)\,V \neq 0$, le vecteur V n'appartient pas à $E_2(A)$. On en déduit que la famille (U, V, W) est libre ; c'est une base de $\mathbb{K}^3$, puisqu'elle comporte trois vecteurs.

4. La base (U, V, W) de $\mathbb{K}^3$ vérifie :

$$\begin{cases} AU &= 2U \\ AV &= U + 2V \\ AW &= 2W. \end{cases}$$

   D'après la formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à la base (U, V, W) convient.

   En conclusion, la matrice $P = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ vérifie :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28

La matrice A, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, étant trigonalisable, donnons-nous une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Notons :

$$T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad T^k = \left(t_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Comme T est triangulaire supérieure, on sait que les T^k sont également triangulaires supérieures et l'on connaît leurs coefficients diagonaux :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad t_{i,i}^{(k)} = t_{i,i}^k.$$

Par ailleurs, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A, chacune répétée autant de fois que son ordre. Vu les hypothèses, on a :

$$\forall j \in [\![2, p]\!] \quad \lambda_j^k = \mathrm{o}\left(\lambda_1^k\right) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

Si l'on note α_1 l'ordre de la valeur propre λ_1, on a donc $\operatorname{Tr}\left(T^k\right) \sim \alpha_1 \lambda_1^k$. Comme les matrices T^k et A^k sont semblables, elles ont même trace et, par suite, $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) \sim \alpha_1 \lambda_1^k$. Par quotient d'équivalents (possible, car $\lambda_1 \neq 0$), il vient :

$$\frac{\operatorname{Tr}\left(A^{k+1}\right)}{\operatorname{Tr}\left(A^k\right)} \sim \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1}}{\alpha_1 \lambda_1^k} = \lambda_1.$$

Le résultat annoncé est donc établi.

S'entraîner et approfondir

2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

2.2 Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. La matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que matrice B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.3 Diagonaliser la matrice réelle de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les éléments d'indices (i, j) avec $|i - j| = 1$ valent 1, les autres sont nuls).

Indication : Il s'agit d'un exercice classique où il est difficile d'obtenir le polynôme caractéristique de A sous forme factorisé. On déterminera donc les éléments propres par la résolution de systèmes.

⋆ **2.4** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrer que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan, stable par u et en somme directe avec F.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et, qu'en particulier, n est pair.

2.5 Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que -1 et 1 sont des valeurs propres de A et que $A^4 = A^2$. Montrer que A est diagonalisable.

2.7 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

1. Donner un exemple en dimension 2.
2. Montrer que les racines du polynôme caractéristique de f sont imaginaires pures. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout $x \in E$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
4. On pose $\dim(E) = 2n$. Montrer l'existence d'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E telle que $(e_1, f(e1), \ldots, e_n, f(e_n))$ soit une base de E.
5. Écrire la matrice de f dans cette base.

2.8 Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Montrer que $M{}^tM$ et ${}^tMM$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Donner un exemple où elles n'ont pas les mêmes valeurs propres.

2.9 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A^2 + A + I_n) = 0$.

Montrer que le rang de A est pair.

2.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^3 - 3A - 5I_n = 0$$

Montrer que A est de déterminant strictement positif.

2.11 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$.

Déterminer la dimension de $\mathcal{C}_A = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Indication. On pourra commencer par prouver l'existence d'un vecteur X tel que la famille (X, AX, A^2X) soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis utiliser cette base pour démontrer que $\mathcal{C}_A = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$.

2.12 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.

Montrer que $A^{12} = I_2$.

2.13 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f^2 = g^2 = \operatorname{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g sont représentés par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

2.14 Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P)(X) = P(6-X)$.

Déterminer les éléments propres de φ ; l'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

2.15 Soit a, b, c dans $\mathbb{K}^*$. Étudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1/a & 0 & c \\ 1/b & 1/c & 0 \end{pmatrix}$.

2.16 Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \varnothing$.

1. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.
3. Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

2.17 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$, avec $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$. On définit $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E)\big)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E) \quad \varphi(f) = \frac{1}{2}\,(p \circ f + f \circ p).$$

Montrer que φ est diagonalisable.

On pourra utiliser une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et raisonner matriciellement.

2.18 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Déterminer les éléments propres de la matrice A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.19 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \neq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$.

Le but de l'exercice est de montrer que A et B ont une valeur propre commune.

1. Traiter le cas où $P = J_r$, avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $r \geqslant 1$.

   Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $UPV = J_r$.
3. Conclure.

2.20 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On considère $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $g \circ f - f \circ g = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k$.
2. En déduire que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

   On pourra utiliser $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & g \circ u - u \circ g. \end{array}$

2.21 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall M \in E \quad u(M) = aM + b\,{}^tM.$$

1. Montrer que u est diagonalisable. Déterminer ses éléments propres.
2. Calculer $\operatorname{Tr}(u)$ et $\det(u)$.

2.22 Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$, où E est un espace vectoriel complexe de dimension finie. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

2.23 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

⋆ **2.24** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. On considère deux endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures.

2.25 Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

⋆ **2.26** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle commutant de u le sous-espace vectoriel suivant de $\mathcal{L}(E)$:

$$C(u) = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; v \circ u = u \circ v \right\}.$$

Trouver la dimension du commutant de u dans les cas suivants.

1. Le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.
2. L'endomorphisme u est diagonalisable, avec $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, les valeurs propres étant d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.
3. Il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E. On fournira une base de $C(u)$.

   On pourra utiliser l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} C(u) & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x_0). \end{array}$

2.27 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$(u_0, u_1, u_2) = (-1, 3, 2) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 16u_n - 20u_{n+1} + 8u_{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$.

1. Déterminer une matrice A vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{5}{2} \times 2^n + 6\,n\,2^n - \frac{7}{2} \times 4^n.$$

Solution des exercices

2.1 L'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux deux autres, on a alors :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\,(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.

On détermine le sous-espace propre E_1 en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y-2z &=& 0 \\ 2x \quad\; -2z &=& 0 \\ 2x+2y-4z &=& 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à $x=y=z$. On a donc $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On détermine le sous-espace propre E_{-1} en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-2z &=& 0 \\ 2x+2y-2z &=& 0 \\ 2x+2y-2z &=& 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à $2x+2y-2z=0$ donc :

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y,z)\in\mathbb{K}^2 \right\}.$$

Ainsi $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$, la matrice A est diagonalisable et (f_1, f_2, f_3) est une base de diagonalisation. Par conséquent :

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 1. En développant par rapport à la deuxième colonne, il vient $\chi_B(X) = (X+1)^3$. La matrice B n'a donc qu'une valeur propre : -1. Si elle était diagonalisable, alors elle serait égale à la matrice $-I_3$ ce qui n'est pas le cas. La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

2. On cherche une base (f_1, f_2, f_3) telle que f_1 et f_2 soit des vecteurs propres de B et que $Bf_3 = f_2 - f_3$ c'est-à-dire $Cf_3 = f_2$ avec $C = B + I_3$.

   Si l'on prend un vecteur f_3, alors comme $C^2 = 0$, le vecteur Cf_3, s'il est non nul, est un vecteur propre de B. Il suffit donc de ne pas prendre f_3 dans E_{-1} puis de compléter $f_2 = Cf_3$ en une base (f_1, f_2) de E_{-1} pour conclure.

   On détermine E_{-1} en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+8z &=& 0 \\ 3x+6z &=& 0 \\ -2x-4z &=& 0 \end{array}\right.$$

   qui est équivalent à $x + 2z = 0$.

   Ainsi, le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_{-1}. Comme les vecteurs :

$$f_2 = Cf_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   forment une base de E_{-1}, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base dans laquelle l'endomorphisme u_B canoniquement associé à B a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice B est donc semblable à la matrice annoncée.

   Plus précisément, on a $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.3 Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un vecteur propre de A associé au scalaire λ. Il est donc non nul et vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -\lambda x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 &=& 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n &=& 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n &=& 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est le début d'une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$x_{k-2} - \lambda x_{k-1} + x_k = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $X^2 - \lambda X + 1$ de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$. On étudie les différents cas suivant le signe de Δ.

- Si $\Delta = 0$ c'est-à-dire si $\lambda = \pm 2$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $\varepsilon = \pm 1$ et il existe des scalaires α et β tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha\varepsilon^k + \beta k \varepsilon^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$ ce qui contredit la non nullité de X.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et $r_2 = 1/r_1$ et il existe des scalaires α et β tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et $\frac{\alpha}{r_1^{n+1}}\left(r_1^{2n+2} - 1\right) = 0$, ce qui est impossible car $r_1 \neq 1$ et $X \neq 0$.

Par conséquent, si λ est valeur propre, alors $\Delta < 0$. Il existe donc $\theta \in \,]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$. Les racines de $X^2 - \lambda X + 1$ étant $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, il existe des scalaires α et β tels que :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}.$$

La relation $x_0 = 0$ entraîne $\alpha + \beta = 0$ et :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = 2\alpha i \sin(k\theta).$$

La relation $x_{n+1} = 0$ et la non nullité de X implique que $\sin\big((n+1)\theta\big) = 0$, c'est-à-dire que θ est de la forme $\dfrac{\ell\pi}{n+1}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Il suffit alors de remonter les calculs, pour prouver que, pour tout ℓ de $[\![1, n]\!]$, le vecteur :

$$X_\ell = \left(\sin\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$$

est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_\ell = 2\cos\dfrac{\ell\pi}{n+1}\cdot$

Les réels λ_ℓ, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$, étant deux à deux distincts du fait de l'injectivité de la fonction cos sur $[0, \pi]$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de spectre :

$$\mathrm{sp}(A) = \left\{2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \ ; \ \ell \in [\![1, n]\!]\right\}$$

et la famille $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base de diagonalisation.

Remarque En fait, la matrice A est symétrique réelle et le théorème spectral (*cf.* le théorème 16 de la page 185) prouve *a priori* qu'elle est diagonalisable et que la

base $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ dont les vecteurs sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est orthogonale. Nous allons redémontrer cette propriété.

Notons $\varphi = \dfrac{\pi}{n+1}\cdot$ Pour tous ℓ et ℓ' de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}(X_\ell \mid X_{\ell'}) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(k\ell\varphi)\sin(k\ell'\varphi)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell-\ell')k\varphi\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell+\ell')k\varphi\right).\end{aligned}$$

Pour $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(\frac{n+2}{2})x}\sin(\frac{nx}{2})}{e^{i\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2})}\right)\\ &= \frac{\cos(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\cdot\end{aligned}$$

En particulier, si p est un entier non multiple de $2(n+1)$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(pk\varphi)$ est nul si p est pair et égal à -1 sinon.
Comme ℓ et ℓ' ont la même parité et appartiennent à $[\![1,n]\!]$, il vient :

$$(X_\ell \mid X_{\ell'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \ell' \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Finalement, la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}X_\ell\right)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée de diagonalisation de A.
La matrice de passage P correspondante est donc orthogonale et $P^{-1} = {}^tP$.

2.4 1. Supposons par l'absurde que $\operatorname{Vect}\big(x,u(x)\big)$ ne soit pas un plan. Comme le vecteur x est non nul, il existe donc un réel λ tel que $u(x) = \lambda x$. Le réel λ étant une valeur propre de u, c'est une racine du polynôme annulateur X^2+X+1, ce qui est absurde car ce polynôme n'a pas de racine réelle. Par conséquent, $\operatorname{Vect}\big(x,u(x)\big)$ est un plan.

Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$u\left(\lambda x + \mu u(x)\right) = -\mu x + (\lambda-\mu)u(x) \in \operatorname{Vect}\big(x,u(x)\big)$$

donc $\operatorname{Vect}\big(x,u(x)\big)$ est stable par u.

Supposons par l'absurde qu'il existe y non nul dans $F \cap \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$. Comme cette intersection est stable par u, elle contient $\operatorname{Vect}\big(y, u(y)\big)$, qui, d'après ce qui précède, est un plan. Pour des raisons de dimensions, on a donc :

$$F \cap \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big),$$

puis $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) \subset F$, ce qui n'est pas possible car $x \notin F$.

Ainsi, F et $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ sont en somme directe.

2. Commençons par remarquer que si la matrice de u dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ est de la forme annoncée, alors n est pair et pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$, $u(e_{2k-1}) = e_{2k}$.

   Réciproquement, s'il existe une base de la forme $\big(e_1, u(e_1), \ldots, e_{n/2}, u(e_{n/2})\big)$, alors pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$:

$$u(e_{2k}) = u^2(e_{2k-1}) = -u((e_{2k-1})) - (e_{2k-1}) = -e_{2k} - e_{2k-1}$$

   donc la matrice de u dans cette base est de la forme annoncée.
   On considère donc l'ensemble A des entiers k tels qu'il existe $x_1, \ldots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ avec $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_k, u(x_k)\big)$ libre.

   En utilisant la question précédente avec $F = \{0\}$, on montre que A est non vide. Elle est également bornée puisqu'une famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n. Elle admet donc un maximum que nous noterons p. Il existe alors des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big)$ soit libre. Le sous-espace :

$$F = \operatorname{Vect}\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\big(x_k, u(x_k)\big)$$

   est stable par u. S'il n'est pas égal à $\mathbb{R}^n$, alors il existe $x_{p+1} \notin F$ et, d'après la question précédente, $\operatorname{Vect}\big(x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est en somme directe avec F.

   La famille $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est alors libre ce qui contredit la définition de p. On a donc $F = \mathbb{R}^n$, et par conséquent $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme désirée. On a aussi $n = 2p$.

2.5 Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ et les sous-espaces propres sont $E_1 = \mathbb{R}e_1$ et $E_{-1} = \mathbb{R}e_{-1}$ avec :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit F un sous-espaces stable par l'endomorphisme u.

- Si F est de dimension 0 ou 3, il est respectivement égal à $\{0\}$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Si F est de dimension 1, alors F est une droite engendrée par un vecteur propre de A c'est-à-dire $F = \mathbb{R}e_1$ ou $F = \mathbb{R}e_{-1}$.

- Si F est de dimension 2, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est un polynôme de degré deux divisant χ_A.

  Il vaut donc $(X-1)^2$ ou $(X-1)(X+1)$.

  Dans le premier cas, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, F est contenu dans le noyau de $(A-I_3)^2$ qui est égal au plan d'équation $2x-2y-z=0$. Pour des raisons de dimension, F est donc le plan d'équation $2x-2y-z=0$.

  Dans le second cas, F contient un vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à -1. Il est donc égal à $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$.

Ainsi, les sous-espaces stables par u sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_{-1}$, $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$ et le plan d'équation $2x-2y-z=0$.

2.6 Le polynôme $X^4-X^2=X^2(X^2-1)$ annule A donc $\operatorname{sp}(A)\subset\{0,-1,1\}$.

Il y a deux possibilités :

- Soit 0 est valeur propre et alors A est une matrice carrée de taille 3 ayant trois valeurs propres distinctes ; elle est donc diagonalisable.
- Soit 0 n'est pas valeur propre et alors A étant inversible, on peut simplifier par A^2 pour obtenir $A^2=I_3$. La matrice A est alors annulée par le polynôme scindé à racines simples X^2-1, ce qui implique qu'elle est diagonalisable.

Dans les deux cas, A est diagonalisable.

2.7 1. On peut considérer une rotation d'angle $\pi/2$.

2. Notons A une matrice représentant f.

   La matrice A est annulée par le polynôme X^2+1 dont les racines sont imaginaires pures. Par conséquent, les valeurs propres complexes de A sont imaginaires pures. Ainsi, les racines du polynôme caractéristique de f sont imaginaires pures car $\chi_A=\chi_f$.

   Le polynôme X^2+1 étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En notant n_1 et n_2 les dimensions des sous-espaces propres $E_i(A)$ et $E_{-i}(A)$, on a $\chi_A=(X-i)^{n_1}(X+i)^{n_2}$. Comme $\chi_A=\chi_f$ est réel et de degré n, on a $n_1=n_2$ et $n_1+n_2=n$ donc n est pair.

3. Soit $x\in E$ et $y\in\operatorname{Vect}(x,f(x))$.

   Par définition, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y=\lambda x+\mu f(x)$ donc :

   $$f(y)=\lambda f(x)+\mu f^2(x)=\lambda f(x)-\mu x\in\operatorname{Vect}(x,f(x)).$$

   Par conséquent, $\operatorname{Vect}(x,f(x))$ est stable par f.

4. On pose $\dim(E)=2n$ et l'on va procéder par récurrence finie.

   Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $\mathcal{H}(i)$ l'assertion « il existe une famille $(e_1,\dots,e_i)$ de vecteurs de E telle que $(e_1,f(e_1),\dots,e_i,f(e_i))$ soit libre. »

   Initialisation : considérons un vecteur e_1 non nul de E et vérifions que la famille $(e_1,f(e_1))$ est libre. Si ce n'était pas le cas, comme e_1 est non nul, il existerait $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(e_1)=\lambda e_1$, ce qui est absurde car f ne possède aucune valeur propre réelle.

Hérédité : Supposons $\mathcal{H}(i)$ vraie pour un certain $i \in [\![1, n-1]\!]$. Il existe donc une famille $(e_1, \ldots, e_i)$ de vecteurs de E telle que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_i, f(e_i))$ soit libre. Comme $2i < \dim(E)$, on a $E_i = \mathrm{Vect}(e_1, f(e1), \ldots, e_i, f(e_i)) \neq E$. Soit $e_{i+1} \in E \setminus E_i$. Prouvons que la famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{i+1}, f(e_{i+1}))$ est libre, c'est-à-dire que :

$$f(e_{i+1}) \notin \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1), \ldots, e_i, f(e_i), e_{i+1}).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_i, \mu_i, \alpha) \in \mathbb{R}^{2i+1}$ tel que :

$$f(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{i} (\lambda_k e_k + \mu_k f(e_k)) + \alpha e_{i+1}.$$

En appliquant f, on obtient :

$$f^2(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{i} \left(\lambda_k f(e_k) + \mu_k f^2(e_k)\right) + \alpha f(e_{i+1})$$

donc

$$-e_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} \left(\lambda_k f(e_k) + \mu_k f^2(e_k)\right) + \alpha \sum_{k=1}^{i} (\lambda_k e_k + \mu_k f(e_k)) + \alpha^2 e_{i+1}.$$

Par conséquent, $(\alpha^2 + 1)e_{i+1} \in E_i$. Comme $\alpha^2 + 1 \neq 0$ et $e_{i+1} \notin E_i$, on aboutit à une contradiction.

Ainsi, la famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{i+1}, f(e_{i+1}))$ est libre.

Par récurrence finie, nous avons donc prouvé l'existence d'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E telle que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ soit une base de E.

5. La matrice de f dans cette base est diagonale par blocs et égale à $\begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix}$

où $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.8 Soit λ une valeur propre non nulle de $M{}^tM$. Il existe alors $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $M{}^tMX = \lambda X$. En multipliant à gauche par ${}^tM$, on obtient ${}^tMM{}^tMX = \lambda{}^tMX$. De plus, comme λX est non nul, ${}^tMX$ aussi. Par conséquent, λ est également valeur propre de ${}^tMM$.

En échangeant les rôles joués par M et ${}^tM$, on a donc prouvé que $M{}^tM$ et ${}^tMM$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

En prenant $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{sp}\left(M{}^tM\right) = \{2\}$ et $\mathrm{sp}\left({}^tMM\right) = \{0, 2\}$ donc $M{}^tM$ et ${}^tMM$ n'ont pas les mêmes valeurs propres.

2.9 Comme A est annulée par le polynôme $X(X^2+X+1)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la dimension de son noyau est égal à la multiplicité de 0 dans χ_A De plus, ses valeurs propres appartiennent à $\{0, j, j^2\}$ donc il existe des entiers p et q tels que Son polynôme caractéristique χ_A soit égal à :

$$\chi_A(X) = X^{n-p-q}\,(X-j)^p\,\left(X-j^2\right)^q.$$

La matrice A étant réelle, son polynôme caractéristique aussi, donc $p=q$. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} A = 2p$.

2.10 La matrice A est annulée par le polynôme $P = X^3-3X-5$. L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3-3x-5$ montre que P a une unique racine réelle α strictement positive. Ses deux autres racines dans $\mathbb{C}$ sont donc complexes conjuguées. Il existe donc $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tel que :

$$P = (X-\alpha)(X-\omega)(X-\overline{\omega})$$

Puisque P annule A ses valeurs propres appartiennent à $\{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$ donc il existe des entiers p et q tels que

$$\chi_A(X) = (X-\alpha)^{n-p-q}(X-\omega)^p(X-\overline{\omega})^q.$$

Comme A est une matrice réelle, le polynôme χ_A aussi, d'où $p=q$. Par conséquent :

$$\det A = (-1)^n\chi_A(0) = \alpha^{n-2p}\,|\omega|^{2p} > 0.$$

2.11 On a déjà $\operatorname{Vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathcal{C}_A$.

Réciproquement, considérons $B \in \mathcal{C}_A$. Comme $A^2 \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^2X \neq 0$. Prouvons que la famille (X, AX, A^2X) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha X + \beta AX + \gamma A^2X = 0$. En multipliant à gauche par A^2, on obtient $\alpha A^2X = 0$ donc $\alpha = 0$ et $\beta AX + \gamma A^2X = 0$. En multipliant à gauche par A, on obtient $\beta A^2X = 0$ donc $\beta = 0$ et $\gamma A^2X = 0$. Ainsi, $\alpha=\beta=\gamma=0$, ce qui prouve la liberté de la famille (X, AX, A^2X). Comme elle est de cardinal 3, il s'agit donc d'une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $BX = \alpha X+\beta AX+\gamma A^2X$. Déduisons-en que $B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.

On a $BX = \alpha X + \beta AX + \gamma A^2X$ et B commute avec A donc :

$$BAX = ABX = A\left(\alpha X + \beta AX + \gamma A^2X\right) = \left(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2\right)AX$$

puis $BA^2X = A^2BX = A^2\left(\alpha X + \beta AX + \gamma A^2X\right) = \left(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2\right)A^2X.$

Comme la famille (X, AX, A^2X) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que :

$$B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \in \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2).$$

Ainsi, $\operatorname{Vect}(I_3, A, A^2) = \mathcal{C}_A$.

De plus, la famille (I_3, A, A^2) est libre, car sinon la famille (X, AX, A^2X) serait liée, donc $\dim \mathcal{C}_A = 3$.

2.12 La matrice A annule le polynôme $X^p - 1$ dont les racines complexes sont simples. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont des racines p-ièmes de l'unité. Ainsi, A est semblable, à une matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\alpha, \beta)$ où α et β sont des racines p-ième de l'unité.

D'un autre côté, le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$ de A est à coefficients entiers. La relation $a = -\operatorname{Tr} A = -(\alpha + \beta)$ montre, du fait de l'inégalité triangulaire, que a est un entier de module inférieur ou égal à 2 et que $b = \det A = \alpha\beta$ est un entier de module 1 c'est-à-dire $b = \pm 1$.

- Si A possède un valeur propre réelle, alors comme a est réel, l'autre valeur propre est également réelle. Comme α et β sont des racines p-ièmes de l'unité, la matrice A est alors semblable à $\operatorname{Diag}(1,1)$, $\operatorname{Diag}(1,-1)$ ou $\operatorname{Diag}(-1,-1)$ et $A^2 = I_2$.
- Si A possède une valeur propre non réelle, $e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$, alors l'autre est conjuguée et leur produit b vaut 1. On en déduit que $a = -2\cos\theta \in \{-1, 0, 1\}$ car a est un entier et $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Le polynôme caractéristique est alors égal à $X^2 + X + 1$, $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + 1$. La matrice A est semblable à :
  * $\operatorname{Diag}(j, j^2)$ et dans ce cas $A^3 = I_2$;
  * $\operatorname{Diag}(-j^2, -j)$ et dans ce cas $A^6 = I_2$
  * ou $\operatorname{Diag}(i, -i)$ et dans ce cas $A^4 = I_2$.

Dans tous les cas, $A^{12} = I_2$ et 12 est le plus petit entier convenable.

2.13 Comme f est annulé par le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, il est diagonalisable et :

$$E = F_1(f) \oplus F_{-1}(f) \quad \text{avec} \quad F_1(f) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \quad \text{et} \quad F_{-1}(f) = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_E),$$

notations liées au fait que l'on n'est pas assuré que 1 et -1 soient valeurs propres de f.
Soit $x \in F_1(f)$, on a $g(x) = g \circ f(x) = -f \circ g(x)$ donc $g(x) \in F_{-1}(f)$. Ainsi :

$$g\left(F_1(f)\right) \subset F_{-1}(f).$$

De même, si $x \in F_{-1}(f)$, on a $g(x) = -g \circ f(x) = f \circ g(x)$ donc $g(x) \in F_1(f)$. Ainsi :

$$g\left(F_{-1}(f)\right) \subset F_1(f).$$

Comme l'endomorphisme g est annulé par le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, il ne possède pas 0 comme valeur propre et est donc bijectif. Par suite, les inclusions précédentes impliquent $\dim F_1(f) \leqslant \dim F_{-1}(f)$ et $\dim F_{-1}(f) \leqslant \dim F_1(f)$. Par conséquent, $\dim F_1(f) = \dim F_{-1}(f) = \dim E/2$ puisque $\dim E = \dim F_1(f) + \dim F_{-1}(f)$.
Considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $F_1(f)$. Comme l'endomorphisme g est injectif, la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est libre. Pour des raisons de dimension, il s'agit donc d'une base de $F_{-1}(f)$. Par suite, la famille $(e_1, \ldots, e_n, g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base de E. Comme $g^2 = \operatorname{Id}_E$, dans cette base f et g sont représentés par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

2.14 On a $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, il s'agit donc d'une symétrie. Comme $\varphi \neq \pm \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(X-3)^k$ appartient à $E_1(\varphi)$ si k est pair et à $E_{-1}(\varphi)$ sinon. Par conséquent, la famille $\big((X-3)^k\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué de vecteurs propres donc :

$$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{(X-3)^k,\ k \in [\![0, n]\!]\ \text{pair}\right\}$$

et :

$$E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{(X-3)^k,\ k \in [\![0, n]\!]\ \text{impair}\right\}.$$

2.15 On a $\chi_A(X) = X^3 - 3X - \underbrace{\left(\dfrac{b}{ac} + \dfrac{ac}{b}\right)}_{\alpha}\cdot$

Il s'agit d'un polynôme annulateur de A d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Par suite, il suffit que χ_A soit scindé à racines simples pour que A soit diagonalisable.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors χ_A est scindé. Il suffit donc que χ_A et sa dérivée n'aient pas de racine complexe commune. Or, $\chi_A'(X) = 3(X-1)(X+1)$.

Comme $\chi_A(1) = -2 - \alpha$ et $\chi_A(-1) = 2 - \alpha$, on peut déjà affirmer que si $\alpha \neq \pm 2$, alors A est diagonalisable.

Comme $x + 1/x = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ et $x + 1/x = -2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$, on a les équivalences :

$$\alpha = 2 \Leftrightarrow b = ac \qquad \text{et} \qquad \alpha = -2 \Leftrightarrow b = -ac.$$

Supposons $b = ac$. On a alors $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$. La matrice A est donc diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{-1}(A) = 2$. Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & ac \\ 1/a & 1 & c \\ 1/(ac) & 1/c & 1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1, on en déduit que A est diagonalisable.

Supposons $b = -ac$. On a alors $\chi_A = (X+2)(X-1)^2$. La matrice A est donc diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1(A) = 2$. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & -ac \\ 1/a & -1 & c \\ -1/(ac) & 1/c & -1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1, on en déduit que A est diagonalisable.
Par conséquent, dans tous les cas, A est diagonalisable.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on étudie les variations de χ_A. On obtient que χ_A est scindé à racines simples si, et seulement si, $\alpha \in]-2, 2[$. Les cas $\alpha = \pm 2$ ont été traités et conduisent à la diagonalisabilité de A.

Si $\alpha \notin [-2, 2]$, alors χ_A n'a qu'une racine réelle λ. Elle est donc diagonalisable si, et seulement si, elle est égale à λI_3, ce qui n'est clairement pas le cas.

Ainsi, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \in [-2, 2]$.

2.16 1. Comme un produit de matrices inversibles est encore inversible et comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et a pour racines les valeurs propres de A, si $\chi_A(B)$ n'était pas inversible, alors il existerait $\lambda \in \text{sp}(A)$ tel que la matrice $B - \lambda I_n$ soit non inversible. Le complexe λ serait alors une valeur propre commune à A et B, ce qui est absurde. Par conséquent, $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $X = 0$, alors on a évidement $AX = XB$.
Réciproquement, supposons que $AX = XB$. On prouve aisément par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k X = XB^k$. Ainsi, $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $X\chi_A(B) = 0$ puis $X = 0$ du fait de l'inversibilité de la matrice $\chi_A(B)$.

3. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ X \mapsto AX - XB$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ injectif du fait de la question précédente.
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, φ est un automorphisme. Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = M$.

2.17 Soit $k = \dim(\operatorname{Im} f)$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Les hypothèses $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$ se traduisent par $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Notant $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de p dans cette base, il s'agit de prouver que l'endomorphisme $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ F & \longmapsto & \frac{1}{2}(PF + FP) \end{array}$ est diagonalisable.

Décomposant toute matrice $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en blocs :

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K}),$$

on obtient :

$$PF = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad FP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \Phi(F) = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}C & 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ, en résolvant, selon $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $\Phi(F) = \lambda F$ qui équivaut au système :

$$\begin{cases} A = \lambda A \\ \frac{1}{2}B = \lambda B \\ \frac{1}{2}C = \lambda C \\ 0 = \lambda D. \end{cases}$$

- Si $\lambda \notin \left\{0, 1, \frac{1}{2}\right\}$, ce système équivaut à $F = 0$; donc $\lambda \notin \text{sp}(\Phi)$.
- Si $\lambda = 0$, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Par suite, $0 \in \mathrm{sp}(\Phi)$ et $E_0(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \; ; \; D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C}) \right\}$, donc :

$$\dim E_0(\Phi) = \dim \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C}) = (n-k)^2 .$$

- Si $\lambda = 1$, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= 0. \end{cases}$$

Par suite, $1 \in \mathrm{sp}(\Phi)$ et $E_1(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \right\}$, donc :

$$\dim E_1(\Phi) = \dim \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) = k^2.$$

- Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} A &= 0 \\ D &= 0. \end{cases}$$

Par suite, $\frac{1}{2} \in \mathrm{sp}(\Phi)$ et :

$$E_{\frac{1}{2}}(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \; ; \; (B, C) \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C}) \right\},$$

donc :

$$\dim E_{\frac{1}{2}}(\Phi) = \dim \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C}) + \dim \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C}) = 2k(n-k) .$$

On déduit de cette étude que $\mathrm{sp}(\Phi) = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}\right\}$, avec :

$$\begin{aligned} \dim E_0(\Phi) + \dim E_1(\Phi) + \dim E_{\frac{1}{2}}(\Phi) &= (n-k)^2 + k^2 + 2k(n-k) \\ &= n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

D'après la proposition 36 de la page 72, l'endomorphisme Φ est diagonalisable. Il en est donc de même de φ.

2.18 1. La matrice $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. On en déduit que -1 est valeur propre de A et que $\dim E_{-1}(A) = 2$, une équation de ce plan étant $x+y+z = 0$. Une base de ce sous-espace propre est, par exemple :

$$(V, W) \quad \text{avec} \quad V = {}^t(1, -1, 0) \quad \text{et} \quad W = {}^t(0, 1, -1).$$

Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = (X+1)^2 (X - \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est donc scindé et l'on déduit de la proposition 28 de la page 69 que :

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 = 2(-1) + \lambda \quad \text{donc} \quad \lambda = 2.$$

On obtient facilement que $U = {}^t(1,1,1)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 2. Comme la valeur propre 2 est simple, le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Cette étude prouve que A est diagonalisable et que (U,V,W) est une base de vecteurs propres.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à la base (U,V,W). On a alors $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour inverser la matrice P, on peut appliquer la méthode de Gauss-Jordan ou résoudre le système :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

dont la solution est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X+Y+Z}{3} \\ \frac{2X-Y-Z}{3} \\ \frac{X+Y-2Z}{3} \end{pmatrix},$$

ce qui fournit $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Un dernier calcul donne :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.19 1. Utilisons les décompositions en blocs $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, avec A_1 et B_1 éléments de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. On obtient facilement :

$$AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La relation $AP = PB$ équivaut à $A_1 = B_1$, $A_3 = 0$ et $B_2 = 0$.

Par suite $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ sont triangulaires par blocs ; d'après la proposition 20 de la page 67, on a $\chi_A=\chi_{A_1}\chi_{A_4}$ et $\chi_B=\chi_{A_1}\chi_{B_4}$.

Le polynôme $\chi_{A_1}\in\mathbb{C}[X]$ est de degré $r\geqslant 1$ et scindé sur $\mathbb{C}$; toute racine de ce polynôme est valeur propre de A et de B.

2. Cette question a été traitée dans l'exercice 1.3 de la page 41.
3. Si $r=\operatorname{rg}(P)$, il existe, d'après la question précédente, $(U,V)\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $UPV=J_r$. La relation $AP=PB$ s'écrit :

$$AU^{-1}J_rV^{-1}=U^{-1}J_rV^{-1}B,$$

ou encore :

$$UAU^{-1}J_r=J_rV^{-1}BV.$$

D'après le premier cas, les matrices $A'=UAU^{-1}$ et $B'=V^{-1}BV$ ont une valeur propre commune. Comme A' est semblable à A, on a, d'après le lemme 22 de la page 68, $\operatorname{sp}(A')=\operatorname{sp}(A)$. De même, $\operatorname{sp}(B')=\operatorname{sp}(B)$. En conclusion, A et B ont une valeur propre commune.

2.20 1. Procédons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

- Le résultat est évident pour $k=0$, puisque $f^0=\mathrm{Id}_E$.
- Supposons le résultat vrai au rang $k\in\mathbb{N}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} g\circ f^{k+1}-f^{k+1}\circ g &= \left(g\circ f^k-f^k\circ g\right)\circ f+f^k\circ(g\circ f-f\circ g)\\ &=\alpha k f^k\circ f+f^k\circ(\alpha f)\\ &=\alpha(k+1)f^{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat au rang $k+1$.

2. L'application φ est bien sûr linéaire ; c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Supposons f non nilpotent. On a, d'après la question précédente :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \varphi\left(f^k\right)=\alpha k f^k.$$

Comme f^k n'est pas nul, il est vecteur propre de φ pour la valeur propre αk. Comme α n'est pas nul, les αk sont deux à deux distincts et φ possède une infinité de valeurs propres ; c'est impossible car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie.

On déduit de cette contradiction que f est nilpotent.

2.21 1. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, avec $\dim\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\frac{n(n-1)}{2}\cdot$ On a :

$$\begin{cases} \forall M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & u(M)=(a+b)M\\ \forall M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & u(M)=(a-b)M. \end{cases}$$

Dans une base adaptée à $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la matrice de u est diagonale ; donc u est diagonalisable.

- Si $b \neq 0$, on a $\operatorname{sp}(u) = \{a+b, a-b\}$ et :

$$\forall M \in E \quad u(M) - (a+b)\,M = b\left({}^tM - M\right).$$

 Comme $b \neq 0$, on en déduit :

$$\forall M \in E \quad u(M) = (a+b)\,M \Longleftrightarrow M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

 Par suite, $E_{a+b}(u) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On prouve de même que $E_{a-b}(u) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Si $b = 0$, on a $u = a\,\mathrm{Id}_E$; donc a est l'unique valeur propre et $E_a(u) = E$.

2. En utilisant la proposition 28 de la page 69, on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{Tr}(u) = \frac{n(n+1)}{2}\,a + \frac{n(n-1)}{2}\,b \\[2ex] \det(u) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}\,b^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{cases}$$

2.22 L'endomorphisme f^2 étant diagonalisable, il existe, d'après le théorème 45 de la page 81, un polynôme scindé à racines simples annulant f^2. Notons $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ un tel polynôme.

Par conséquent, le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i)$ annule f. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, comme λ_i est non nul, il possède deux racines carrées complexes distinctes notées μ_i et $-\mu_i$. Ainsi, $Q = \prod_{i=1}^{r}(X - \mu_i)(X + \mu_i)$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $\mu_i^2 = (\mu_i)^2 \neq \mu_j^2 = (-\mu_j)^2$ donc Q est à racines simples. Par conséquent, f est diagonalisable.

2.23 On peut commencer par vérifier que $\chi_A = (X-1)^3$.

On cherche une base (U, V, W) de $\mathbb{K}^n$ telle que :

$$\begin{cases} (A - I_3)\,U = 0 \\ (A - I_3)\,V = U \\ (A - I_3)\,W = V, \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} (A - I_3)^3\,W = 0 \\ (A - I_3)^2\,W = U \\ (A - I_3)\,W = V. \end{cases}$$

Un petit calcul donne $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, puis $(A - I_3)^3 = 0$.

On choisit W tel que $(A - I_3)^2\,W \neq 0$, par exemple $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on calcule ensuite $V = (A - I_3)\,W = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis $U = (A - I_3)\,V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La relation $(A-I_3)\,U=0$ est vérifiée, puisque $(A-I_3)\,U=(A-I_3)^3\,W$.

Comme $\det\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}=1$, la famille (U,V,W) est une base.

En conclusion, $P=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ est inversible et l'on a $P^{-1}AP=B$.

2.24 Procédons par récurrence sur $n=\dim E$.

- Pour $n=1$, il n'y a rien à démontrer.
- Supposons le résultat vrai pour un entier $n\geqslant 1$ et donnons-nous $u\in\mathcal{L}(E)$ et $v\in\mathcal{L}(E)$ commutant, avec $\dim E=n+1$.

  Comme E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, u possède au moins une valeur propre, notée λ, et le sous-espace propre associé $E_\lambda(u)$ est stable par v, puisque u et v commutent. L'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ possède de même une valeur propre, notée μ. Soit e_1 un vecteur propre associé. Ce vecteur e_1 est vecteur propre de v et de u, car élément de $E_\lambda(u)$.

  Complétons e_1 en une base $\mathcal{B}$ de E. On a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda&L_u\\0&A\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}\mu&L_v\\0&B\end{pmatrix},$$

  avec $(L_u,L_v)\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})^2$ et $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. En effectuant des produits par blocs, on obtient :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u\circ v)=\begin{pmatrix}\lambda\mu&\lambda L_v+L_uB\\0&AB\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v\circ u)=\begin{pmatrix}\mu\lambda&\mu L_u+L_vA\\0&BA\end{pmatrix}.$$

  La commutation de u et v entraîne donc en particulier, celle de A et B. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes canoniquement associés à A et B, on prouve l'existence de $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

  Soit $Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}$. En procédant comme dans l'exercice 23 de la page 82, on prouve que Q est inversible et que les matrices $Q^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,Q$ et $Q^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\,Q$ sont triangulaires supérieures. D'après l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, cela prouve l'existence d'une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures, ce qui achève la récurrence.

2.25 Notons (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'endomorphisme canoniquement associé à U et a celui associé à $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}$.

Si $U^2 = A$, u commute avec u^2, c'est-à-dire avec a. D'après la proposition 2 de la page 59, les sous-espaces propres de a sont stables par u. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux ; on a donc $\operatorname{sp}(A) = \{1, 4\}$.

La matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Par suite $\dim \operatorname{Ker}(a - \operatorname{Id}) = 1$ et, comme $e_2 \in \operatorname{Ker}(a - \operatorname{Id})$, on a $\operatorname{Ker}(a - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(e_2)$.

La valeur propre 4 étant simple, $\dim \operatorname{Ker}(a - 4\operatorname{Id}) = 1$ et, comme $e_3 \in \operatorname{Ker}(a - 4\operatorname{Id})$, on a $\operatorname{Ker}(a - 4\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(e_3)$.

On déduit de ce qui précède que U a la forme suivante :

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \gamma & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice U est solution si, et seulement si, $U^2 = A$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \beta(\alpha + \delta) & \delta^2 & 0 \\ \gamma(\alpha + \varepsilon) & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = A.$$

- La relation $\varepsilon^2 = 4$ donne $\varepsilon = \pm 2$.
- La relation $\delta^2 = 1$ donne $\delta = \pm 1$.
- La relation $\alpha^2 = 1$ donne $\alpha = \pm 1$, donc $\alpha = \pm\delta$. Comme $\beta(\alpha + \delta) = 1 \neq 0$, on a $\alpha = \delta$.
- Les deux dernières relations donnent $\beta = \frac{1}{2\delta}$ et $\gamma = \frac{1}{\varepsilon + \delta}$.

En conclusion, les matrices U solutions s'écrivent :

$$U = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\delta} & \delta & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon+\delta} & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\delta, \varepsilon) \in \{-1, 1\} \times \{-2, 2\}.$$

2.26 1. Dans ce cas, u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Si v commute avec u, sa matrice dans une base de vecteurs propres de u est diagonale, d'après la proposition 2 de la page 59 ; la réciproque est évidente, puisque deux matrices diagonales commutent.

La dimension du commutant de u est donc égale à celle de l'espace des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire à n.

2. Notons E_i le sous-espace propre de u pour la valeur propre λ_i. Comme u est diagonalisable, on a $\dim E_i = \alpha_i$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.
   - Si v commute avec u, il laisse stables les sous-espaces propres de u.
   - Réciproquement, supposons que v laisse stable chaque E_i. Soit $x \in E$; il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$. On a :

$$u \circ v(x) = \sum_{i=1}^{p} u\big(v(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i),$$

puisque, chaque E_i étant stable par v, on a $v(x_i) \in E_i$, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
On a de même :

$$v \circ u(x) = v\left(\sum_{i=1}^{p} u(x_i)\right) = v\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i),$$

puisque $x_i \in E_i$, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
On a donc établi que v commute avec u.

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_i$. On déduit alors de ce qui précède que $v \in \mathcal{L}(E)$ est élément de $C(u)$ si, et seulement s'il laisse stable tous les E_i donc si, et seulement si, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs. Or, l'espace des matrices $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$ diagonales par blocs avec $A_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, est isomorphe à $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$. (Pour cette réciproque, on aurait pu aussi raisonner matriciellement en utilisant d'emblée une base B adaptée à $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_i$.) En conclusion, on a :

$$\dim C(u) = \dim \prod_{i=1}^{p} \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2.$$

3. L'application φ est, de façon évidente, linéaire.
Montrons que φ est injective. Soit $v \in \operatorname{Ker} \varphi$; on a donc $v(x_0) = 0$ et $v \circ u = u \circ v$. On établit facilement, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad v \circ u^k = u^k \circ v.$$

On en déduit $v\big(u^k(x_0)\big) = u^k\big(v(x_0)\big) = 0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. L'endomorphisme v, nul sur les vecteurs d'une base, est donc nul.
L'application de la formule du rang à φ donne $\dim C(u) \leqslant \dim E = n$. Montrons que $\dim C(u) = n$ et que $\left(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$ est une base de $C(u)$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k commute avec u. La famille $\left(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$ est donc à éléments dans $C(u)$.
- Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0$. Une évaluation en x_0 donne $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$; comme la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est libre, on en déduit $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Donc la famille $\left(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$ est libre ; on en déduit $\dim C(u) \geqslant n$.
On a donc établi que $\dim C(u) = n$ et que $\left(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$ est une base du commutant de u.

2.27 1. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 16 & -20 & 8 \end{pmatrix}$.

2. On a $\chi_A = X^3 - 8X^2 + 20X - 16 = (X-2)^2 (X-4)$. donc A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_2(A) = 2$. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 16 & -20 & 6 \end{pmatrix}$

3. • Soit $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$. Comme la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible et que les deux premières équations du système $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ ne sont pas liées, ce système équivaut à ces deux équations :

$$y - \lambda x = z - \lambda y = 0.$$

On en déduit que $E_\lambda(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

• Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Cherchons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AV = U + 2V$; on vérifie facilement que ce système équivaut à :

$$2x - y + 1 = 4x - z + 4 = 0.$$

Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ convient donc. Notons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour la valeur propre 4. On vérifie que (U, V, W) est une base de $\mathbb{K}^3$ en calculant, par développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ est donc inversible et l'on a $P^{-1}AP = B$.

4. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = PB^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

- Pour calculer B^n, on peut décomposer B en blocs :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + J.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Comme I_2 et J commutent, on peut utiliser la formule du binôme, sachant que $J^2 = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_1^n = 2^n I_2 + \binom{n}{1} 2^{n-1} J = 2^n I_2 + n\, 2^{n-1} J. \quad \text{(valable pour } n = 0\text{)}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\, 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

- La résolution du système $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ fournit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - \frac{w}{4} \\ -4u + 3v - \frac{w}{2} \\ u - v + \frac{w}{4} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -4 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- En effectuant le produit matriciel, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^n P^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{2} \times 2^n + 6\, n\, 2^n - \frac{7}{2} \times 4^n. \end{aligned}$$

Chapitre 3 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

Espaces préhilbertiens et euclidiens



Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.

I Produit scalaire et norme associée

1 Produit scalaire

Définition 1

On appelle **produit scalaire** toute forme bilinéaire symétrique définie positive c'est-à-dire toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- $\forall (x, y_1, y_2, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{R} \quad \varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Remarque Les deux premiers points traduisent la symétrie et la linéarité par rapport à la première variable, elles prouvent que φ est une forme bilinéaire symétrique et en particulier la linéarité par rapport à la deuxième variable.
Le dernier point est une équivalence mais l'autre implication n'a pas besoin d'être prouvée car elle découle de la bilinéarité.

Notation

- Si φ est un produit scalaire et si $(x,y) \in E^2$, alors le réel $\varphi(x,y)$ est appelé le produit scalaire de deux éléments x et y de E et est noté généralement $(\, x \mid y \,)$ ou $\langle x \mid y \rangle$ ou $x \cdot y$.
- En géométrie, on privilégie souvent la notation $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemples

1. L'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il est appelé **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$**.

   Plus généralement, dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut définir un produit scalaire en posant $(\, x \mid y\,) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, où x_1, x_2,..., x_n (respectivement y_1, y_2,..., y_n) sont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur x (respectivement y).

2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. L'application :

   $$(f,g) \mapsto \int_a^b f\, g$$

   est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0\big([a,b], \mathbb{R}\big)$.

3. L'application :

   $$(A,B) \mapsto (\, A \mid B\,) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{i,j} = \operatorname{Tr}\left({}^t\!AB\right)$$

   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Il est appelé **produit scalaire canonique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Plus généralement, l'application :

   $$(A,B) \mapsto (\, A \mid B\,) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} B_{i,j} = \operatorname{Tr}\left({}^t\!AB\right)$$

   est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

   Il est appelé **produit scalaire canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

p.153

Exercice 1 Vérifier que l'application :

$$\varphi \,:\, (A,B) \mapsto (\, A \mid B\,) = \operatorname{Tr}\left({}^t\!AB\right)$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Les deux exemples qui suivent sont classiques et doivent être connus.

p.153

Exercice 2 Montrer que l'application :

$$\varphi \,:\, (f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

p.153

Exercice 3 Montrer que l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

p.153

Exercice 4 Montrer que l'application S définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$S\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

On pourra commencer par mettre sous forme canonique, c'est-à-dire par déterminer des réels a, b, c, d, e, f, *tels que, pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$S\big((x, y, z), (x, y, z)\big) = (ax + by + cz)^2 + (dy + ez)^2 + (fz)^2.$$

Définition 2

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'**espace vectoriel euclidien**.

Remarque Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\ |\ )$, alors l'application induite :

$$\begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (\,x \mid y\,) \end{array}$$

est un produit scalaire sur F.

On peut donc considérer F comme un espace préhilbertien réel pour ce produit scalaire qui, par abus, sera encore noté $(\ |\ )$.

Utilisation du produit scalaire en géométrie

Le produit scalaire usuel apparait naturellement en géométrie.

• Dans le plan, la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur (α, β) admet pour équation cartésienne :

$$\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0.$$

En notant $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(-\beta, \alpha)$, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite $\mathcal{D}$.

• Dans l'espace, un plan $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$$ax + by + cz = d \text{ avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Si l'on considère un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{P}$, alors $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Ainsi, un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n}\,(a,b,c)$.
Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** au plan $\mathcal{P}$.
Nous généraliserons cette notion en définissant les vecteurs normaux à un hyperplan.

2 Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\ |\ )$.

Définition 3

On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(\ |\ )$ l'application :

$$\begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{(\,x \mid x\,)} \end{array}$$

et **distance euclidienne** associée au produit scalaire $(\ |\ )$ l'application :

$$\begin{array}{ccl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\|. \end{array}$$

Proposition 1

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(\,x \mid y\,) \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\,x \mid y\,).$$

Démonstration page 154

Remarque En additionnant les deux formules de la proposition précédente, on obtient l'égalité suivante, appelée **égalité du parallélogramme** :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \\ &= 2\left(AB^2 + BC^2\right). \end{aligned}$$

La norme euclidienne d'un espace vectoriel préhilbertien est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, si l'on connaît la norme euclidienne, on peut retrouver le produit scalaire grâce aux égalités suivantes appelées **formules ou identités de polarisation**

Proposition 2 (Formules de polarisation)

Soit $(x,y) \in E^2$, on a :

- $2(\, x \mid y\,) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$;
- $2(\, x \mid y\,) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$;
- $4(\, x \mid y\,) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$.

Démonstration. Découle de la proposition 1 de la page précédente. □

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

La norme euclidienne associée au produit scalaire $(\ \mid\ )$ vérifie :

1. $\forall (x,y) \in E^2 \quad \big|(\, x \mid y\,)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.
2. Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathrm{IR} \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathrm{IR} \quad x = \lambda y.$$

Principe de démonstration. Si $y \neq 0$, considérer le discriminant de la fonction polynomiale : $P : \lambda \mapsto (\, x + \lambda\, y \mid x + \lambda\, y\,)$.

Démonstration page 154

Exemples

1. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux vecteurs de IR^n. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur IR^n s'écrit :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $\mathcal{C}^0\big([a,b],\mathrm{IR}\big)$ défini par :
$$(f,g) \mapsto (\, f \mid g\,) = \int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$$
s'écrit :
$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Proposition 4

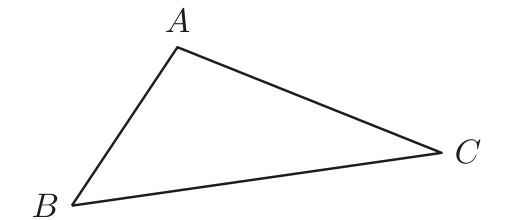
La norme euclidienne $\|\ \|$ associée au produit scalaire $(\ \mid\ )$ vérifie :

- $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ **(Séparation)**
- $\forall (\lambda, x) \in \mathrm{IR} \times E \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\,\|x\|$ **(Homogénéité)**
- $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ **(Inégalité triangulaire)**

  avec égalité si, et seulement si, x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathrm{IR}_+ \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathrm{IR}_+ \quad x = \lambda y.$$

Démonstration page 154

Remarque
Dans un triangle ABC, les inégalités triangulaires se traduisent par :



$$|AB - AC| \leqslant BC \leqslant AB + AC,$$
$$|AB - BC| \leqslant AC \leqslant AB + BC,$$
$$|BC - AC| \leqslant AB \leqslant BC + AC.$$

Remarque Soit a, b et c trois réels positifs.
Il existe un triangle dont les côtés sont de longueurs respectives a, b et c si, et seulement si, $|a-b| \leqslant c \leqslant a+b$.
Ce résultat est démontré dans le chapitre de calcul différentiel, exercice 15.4 de la page 900 pour trouver les triangles d'aire maximale parmi ceux de périmètre donné.

II Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme euclidienne $\| \ \|$ associée.

1 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 4

On appelle vecteur **normé**, ou **unitaire**, tout vecteur de norme 1.

Définition 5

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si $(\,x \mid y\,) = 0$.
On note alors $x \perp y$.

Remarques

- Par symétrie du produit scalaire, si $(\,x \mid y\,) = 0$, alors $(\,y \mid x\,) = 0$. Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Si un vecteur x est orthogonal à lui même, alors il est nul car :
$$\|x\|^2 = (\,x \mid x\,) = 0.$$
Ainsi, un vecteur est orthogonal à lui même si, et seulement s'il est nul.
- En particulier, le seul vecteur orthogonal à tous les autres vecteurs est le vecteur nul.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont normés et orthogonaux deux à deux.

p.155 **Exercice 5** Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x,$$

les éléments sin et cos sont unitaires et orthogonaux.

Définition 6

On appelle **orthogonal** d'une partie A de E, l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A \quad (\, a \mid x\,) = 0\}\,.$$

Proposition 5

L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration page 155

Exemples

1. L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E.
2. L'orthogonal de E est $\{0_E\}$. En effet :
   - 0_E est orthogonal à tout élément de E,
   - si $x \in E^\perp$, alors en particulier x est orthogonal à lui même, ce qui prouve que x est nul.
3. Soit $\vec{u} = (a,b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $D = \operatorname{Vect}\vec{u}$. Un vecteur (x,y) appartient à $D^\perp$ si, et seulement si, $ax+by=0$ donc $D^\perp = \operatorname{Vect}(-b,a)$.
4. Soit (a,b,c) un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et $D = \operatorname{Vect}(a,b,c)$ alors l'orthogonal de D est le plan d'équation $ax+by+cz=0$.

Remarque Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe car le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

p.156 **Exercice 6** Soit a est un vecteur non nul de E. Montrer que l'orthogonal H de $\{a\}$ est un hyperplan.

Proposition 6

Si A et B sont deux parties de E, alors on a :

$$A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

Démonstration. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in B^\perp$ et $a \in A$.

Comme $A \subset B$, on a $a \in B$, donc $(\, a \mid x\,) = 0$. Ainsi, $x \in A^\perp$. □

Proposition 7

Étant donné une partie A de E, alors $A^{\perp} = (\operatorname{Vect} A)^{\perp}$.

Principe de démonstration. Procéder par double inclusion. Démonstration page 156

Définition 7

- On appelle **famille orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.
- On appelle **famille orthonormée** (ou **orthonormale**) de E toute famille de vecteurs de E normés et deux à deux orthogonaux.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une famille orthonormée.

p.156 **Exercice 7** Montrer que, dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x,$$

les fonctions $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\big(f_k : x \mapsto \cos(kx)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(g_k : x \mapsto \sin(kx)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment une famille orthonormée.

Proposition 8

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

En particulier, toute famille orthonormée de E est libre.

Démonstration page 156

Remarque Une famille de vecteurs (orthogonaux) n'est pas libre si elle contient le vecteur nul. L'hypothèse de non nullité est donc fondamentale.

Proposition 9 (Théorème de Pythagore)

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si, l'on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration.
Conséquences de la proposition 1 de la page 133 et de la définition de l'orthogonalité. □

Remarque On retrouve le résultat bien connu suivant : trois points A, B et C forment un triangle rectangle en A si, et seulement si :

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

Proposition 10

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

Démonstration page 157

Théorème 11 (Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormée $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)\,.$$

Principe de démonstration. Procéder par récurrence sur p en cherchant un vecteur orthogonal aux vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de la forme $g_{p+1} = e_{p+1} - \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i$.

Démonstration. Construisons la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ par récurrence.

- Le vecteur f_1 doit être un vecteur normé colinéaire à e_1. Il suffit de prendre $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, ce qui est possible car, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant libre, le vecteur e_1 est non nul.
- Supposons que pour un certain $p \in [\![1, n-1]\!]$, on ait construit une famille orthonormée $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_k)\,.$$

Comme $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, tout vecteur de $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et e_{p+1}.
Cherchons donc g_{p+1} orthogonal aux vecteurs f_1, f_2,..., f_p sous la forme :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i.$$

Le vecteur g_{p+1} répond au problème si, et seulement si :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad 0 = (\, f_j \mid g_{p+1}\,) = (\, f_j \mid e_{p+1}\,) - \lambda_j.$$

En posant :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}(\, f_i \mid e_{p+1}\,)\, f_i.$$

on obtient donc un vecteur g_{p+1} orthogonal aux vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et appartenant à $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$.
Le vecteur g_{p+1} est non nul puisque, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant libre, on a :

$$e_{p+1} \notin \text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

et l'on peut donc le normer en posant $f_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.
La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_{p+1})$ est alors une famille orthonormée (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$. Elle en est donc une base et l'on a :

$$\text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}) = \text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})\,.$$

Point méthode

Le procédé de construction de la démonstration précédente est le suivant :

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant 2 \quad f_i = \frac{e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (\, e_i \mid f_k \,) f_k}{\left\| e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (\, e_i \mid f_k \,) f_k \right\|}.$$

On l'appelle **l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

Remarques

- À partir d'une famille libre $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, l'algorithme de Gram-Schmidt donne une famille orthonormée $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ telle que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:

  $$(\, e_p \mid f_p \,) > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_p)\,.$$

  En effet, si pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $g_p = e_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} (\, e_p \mid f_k \,) f_k$, on a $f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}$ et donc $0 < (\, f_p \mid g_p \,) = (\, f_p \mid e_p \,)$ car le vecteur f_p est orthogonal aux vecteurs $f_1, \ldots, f_{p-1}$.

  Nous verrons dans l'exercice 12 de la page 146 que c'est la seule famille orthonormée qui vérifie ces conditions.

- Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ forment une famille orthonormale, alors il est immédiat de voir que ce procédé les conserve.

- On peut généraliser le résultat au cas d'un famille infinie indexée par $\mathbb{N}$.

  Soit $\mathcal{F} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E, c'est-à-dire telle que $(e_0, \ldots, e_n)$ soit libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Il existe une famille orthonormée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que :

  $$\forall p \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_p) = \operatorname{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_p)\,.$$

2 Bases orthonormées

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Définition 8

On appelle **base orthonormée** (ou **base orthonormale**) de E toute base de E qui est une famille orthonormée.

En particulier, si F un sous-espace vectoriel de E, on appelle base orthonormée de F toute base de F qui est aussi une famille orthonormée.

Proposition 12

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Il existe alors une base orthonormée $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)\,.$$

Démonstration. La famille obtenue par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est orthonormée donc libre et possède n éléments dans un espace vectoriel E de dimension n. C'est donc une base de E. □

Corollaire 13

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. Conséquence du fait que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base et de la proposition précédente. □

p.157 **Exercice 8** Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure.

p.157 **Exercice 9** Construire une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire de l'exercice 4 de la page 132 défini sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z).$$

Proposition 14

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Si x est un vecteur de E, alors on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\,e_i \mid x\,)\,e_i$.
2. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\,e_i$ sont deux vecteurs de E, alors on a :
$$(\,x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i = {}^t\!XY \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t\!XX,$$
où X et Y sont les matrices colonnes constituées des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y.

Démonstration page 157

Remarque Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E.

La famille$\left(\dfrac{e_1}{\|e_1\|}, \dfrac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \dfrac{e_n}{\|e_n\|}\right)$ étant une base orthonormée, on obtient les résultats suivants.

1. Si x est un vecteur de E, alors on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(\,e_i \mid x\,)}{\|e_i\|^2}\,e_i$.

2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ sont deux vecteurs de E, alors on a :

$$(\, x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \|e_i\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|e_i\|^2.$$

Proposition 15

Si f est une forme linéaire sur un espace euclidien E, alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E \quad f(x) = (\, a \mid x\,).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 158

Faire une analyse-synthèse après avoir fixé une base orthonormale de E.

Attention Ce résultat n'est plus nécessairement vrai en dimension infinie. L'exercice 3.9 de la page 165 en donne un exemple.

3 Matrices orthogonales

Définition 9

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée.

Remarque Le produit scalaire considéré est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, pour lequel la base canonique est une base orthonormée.

Exemples

1. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale car ses colonnes sont, à permutation près, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Un calcul immédiat des produits scalaires des colonnes montre que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ est orthogonale.

Proposition 16

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ${}^t\!M\, M = I_n$.

Démonstration. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, le produit scalaires de C_i et C_j est ${}^tC_i\, C_j$. Comme ${}^t\!M\, M = \left({}^tC_i\, C_j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, le résultat est immédiat. □

Corollaire 17

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il y a équivalence entre :

(i) $M\,{}^t\!M = I_n$,

(ii) M est inversible et $M^{-1} = {}^t\!M$,

(iii) ${}^t\!M\,M = I_n$.

En particulier, si M est orthogonale, alors ${}^t\!M$ est orthogonale.

Démonstration. En effet, les implications $(ii) \Rightarrow (i)$ et $(ii) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes et, comme M est carrée, si l'on suppose (i) ou (iii), par passage au déterminant, on obtient que M est inversible puis, par multiplication par M^{-1} que ${}^t\!M = M^{-1}$. □

Point méthode

- Lorsqu'une matrice est orthogonale, il est aisé de calculer son inverse : il suffit de la transposer.
- Pour montrer qu'une matrice est orthogonale, il suffit de vérifier que ses colonnes (ou ses lignes) forment une famille orthonormale. Il y a donc n normes et $\frac{n(n-1)}{2}$ produits scalaires à calculer.

  Ce procédé est plus rapide que le calcul de ${}^t\!MM$ qui nécessite le calcul de n^2 coefficients, à moins de remarquer qu'il s'agit d'une matrice symétrique.

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormale si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors il existe deux bases orthonormales de E tel que M soit la matrice de passage de l'une à l'autre.

Démonstration page 158

Remarque Le résultat précédent traduit le fait qu'une matrice orthogonale est une matrice de changement de base orthonormale. Il est à mettre en parallèle avec le fait que toute matrice inversible est une matrice de changement de base.

Proposition 19

- Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Démonstration page 158

Définition 10

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ et est appelé **groupe orthogonal**.

Proposition 20

Si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det P = \pm 1$.

Démonstration. Si P est une matrice orthogonale alors $\det\left(P\,{}^tP\right) = \det I_n$ donc :

$$(\det P)^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \det P = \pm 1. \qquad \square$$

Attention La réciproque de ce résultat est évidemment fausse dès que $n \geqslant 2$.

Définition 11

Une matrice orthogonale est dite **positive** si elle est de déterminant 1 et **négative** sinon.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales positives est appelé **groupe spécial orthogonal** et est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$.

Remarque L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et passage à l'inverse.

III Espaces euclidiens orientés

1 Orientation

Définition 12

On dit que deux bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont de **même sens** si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à $\mathcal{SO}(n)$.

Proposition 21

La relation « être de même sens que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormales de E.

Principe de démonstration.

Vérifier les trois propriétés : réflexivité, symétrie, transitivité. Démonstration page 158

Définition 13 (Orientation d'un espace euclidien)

On dit que l'on **oriente l'espace E** lorsque l'on choisit une base $\mathcal{B}_0$ orthonormale et qu'on la décrète **directe**. Alors :

- toute base orthonormale de même sens que $\mathcal{B}_0$ est dite **directe** ;
- toute base orthonormale de sens opposé à $\mathcal{B}_0$ est dite **indirecte**.

p.159 **Exercice 10** Soit E un espace euclidien orienté. Montrer que si deux bases orthonormales sont indirectes, alors elles sont de même sens.

Conséquence de l'exercice précédent
Il n'y a que deux orientations possibles sur un espace euclidien.

2 Produit mixte

Proposition 22

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes. Alors, on a :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Démonstration. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ car les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales directes. □

Définition 14

On appelle **produit mixte** de n vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ leur déterminant dans n'importe quelle base orthonormale directe. On le note :

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Det}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

3 Produit vectoriel en dimension 3

Proposition 23

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.

Il existe un unique vecteur de E, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et appelé **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que :

$$\forall \vec{w} \in E \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\, \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w}\,).$$

En particulier, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{w} & \longmapsto & [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \end{array}$ est une forme linéaire sur E, et la proposition 15 de la page 141 nous donne alors l'existence et l'unicité du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

En particulier, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puisque :

$$(\, \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{u}\,) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0 \quad \text{et} \quad (\, \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{v}\,) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0.$$ □

Proposition 24

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

Si (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont les coordonnées respectives de u et de v dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$, alors les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont :

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Démonstration page 159

Remarque On retrouve ainsi les composantes du *produit vectoriel* dans toute base orthonormale directe vues en physique, en sciences industrielles et en géométrie.

Proposition 25

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration page 159

Corollaire 26

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un espace euclidien orienté de dimension 3. L'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la droite engendrée par le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Démonstration page 159

Proposition 27

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormale d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors la base $\mathcal{B}$ est directe si, et seulement si, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, et indirecte si, et seulement si, $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Démonstration page 159

p.159 **Exercice 11** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace euclidien E orienté de dimension 3.

Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \big(\vec{u} \cdot \vec{w}\big)\ \vec{v} - \big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big)\ \vec{w}$.

IV Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un espace vectoriel préhilbertien muni de sa norme euclidienne $\|\ \|$.

1 Supplémentaire orthogonal

Définition 15

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **orthogonaux** si :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad (\, x \mid y \,) = 0,$$

c'est-à-dire si $F \subset G^{\perp}$, ce qui est équivalent à $G \subset F^{\perp}$.

Remarque Si F est un sous-espace vectoriel de E, les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux, puisque par définition les éléments de $F^{\perp}$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Proposition 28

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** de F.

Principe de démonstration. Démonstration page 160

Raisonner par analyse-synthèse en utilisant une base orthonormale de F.

Attention

- Soit E de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet, en général, pas un unique supplémentaire. En revanche, il admet un unique supplémentaire orthogonal.
- Soit E de dimension quelconque. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet pas forcément de supplémentaire orthogonal. L'exercice 3.9 de la page 165 donne un tel exemple.

Notation On écrit parfois $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ pour signifier que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.

Corollaire 29

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si E est de dimension finie, alors :

1. $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E$,
2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Principe de démonstration. Démonstration page 160

Pour le deuxième point, montrer l'inclusion évidente puis raisonner sur les dimensions.

Exemple En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est donc une droite, et le supplémentaire orthogonal d'une droite, un hyperplan.
On retrouve ainsi facilement le résultat du corollaire 26 de la page précédente, puisque si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs indépendants d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au plan $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

p.160 **Exercice 12** Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et deux familles orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ de E telles que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p) = \text{Vect}\,(g_1, g_2, \ldots, g_p)$$

et :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad (\, e_p \mid f_p \,) > 0 \quad \text{et} \quad (\, e_p \mid g_p \,) > 0.$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 30

Soit E de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont des bases orthonormées de deux supplémentaires orthogonaux.
- Soit F un sous-epace vectoriel de E. Si F et $F^\perp$ admettent respectivement $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ comme bases orthonormées, alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

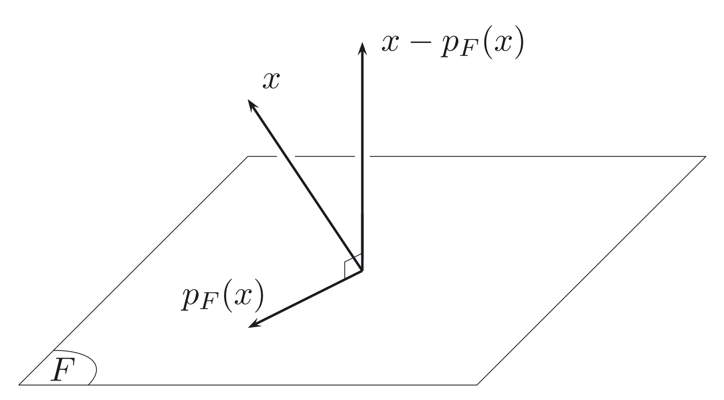
2 Projection orthogonale

Définition 16

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale** sur F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$.

L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.

Notation Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
La projection orthogonale sur F est souvent notée p_F, c'est ce que nous ferons dans la suite.



Proposition 31 (Inégalité de Bessel)

Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F. On a alors :

$$\forall x \in E \quad \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On a $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}$ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \leqslant \|p_F(x)\|^2$. Les quantités considérées étant positives, on en déduit l'inégalité souhaitée. □

Remarque Dans l'exercice 3.5 de la page 164, on prouve qu'une projection est orthogonale si, et seulement si, elle vérifie cette propriété.

Proposition 32

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de E. Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E est :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,)\, e_i.$$

Démonstration page 161

Exemples

1. Si a est un vecteur **normé**, la proposition précédente nous donne l'expression de la projection orthogonale $p_{\mathbb{R}a}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}a$:

$$p_{\mathbb{R}a} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\, x \mid a \,)\, a. \end{array}$$

   Si le vecteur a n'est pas normé, on le norme pour obtenir :

$$\forall x \in E \quad p_{\mathbb{R}a}(x) = \frac{(\, a \mid x \,)}{\|a\|^2}\, a.$$

   Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (respectivement $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) sont les composantes de x (respectivement de a) dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, on a :

$$p_{\mathbb{R}a}(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\, a.$$

2. Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe un vecteur non nul a tel que $H = (\mathbb{R}a)^{\perp}$. On a donc $\mathrm{Id}_E = p_H + p_{\mathbb{R}a}$. Pour obtenir la projection orthogonale sur H d'un vecteur, il suffit donc de lui retirer sa projection orthogonale sur $H^{\perp}$, c'est-à-dire :

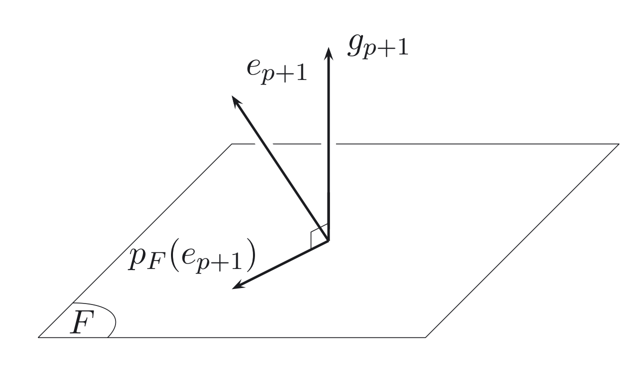
$$\forall x \in E \quad p_H(x) = x - \frac{(\, a \mid x \,)}{(\, a \mid a \,)}\, a.$$

3. De façon général, si F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, alors $\mathrm{Id}_E = p_F + p_{F^{\perp}}$. Ainsi, si on connaît p_F, alors on connaît $p_{F^{\perp}}$.

Remarque Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit le vecteur :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \lambda_i = (\, f_i \mid e_{p+1} \,).$$

On obtient donc le vecteur g_{p+1} en retranchant à e_{p+1} sa projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.



Pour normer le vecteur g_{p+1}, il suffit alors d'appliquer le théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $p_F(e_{p+1})$ et g_{p+1}. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\|g_{p+1}\|^2 &= \|e_{p+1}\|^2 - \|p_F(e_{p+1})\|^2 \\ &= \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2.\end{aligned}$$

Proposition 33

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie engendrée par une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Étant donnés deux vecteurs x et y de E, on a :

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\, x - y \mid e_i \,) = 0. \end{cases}$$

Démonstration page 161

Point méthode

- lorsque l'on dispose d'une base orthonormée (ou plus généralement orthogonale) de F, on a directement l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur x sur F mais il ne faut pas oublier que l'obtention d'une base orthogonale peut être longue.
- Pour trouver le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de dimension finie, sans avoir à déterminer une base orthonormée de F, il suffit de résoudre le système obtenu en traduisant les égalités $(\, x - y \mid e_i \,) = 0$ sur les coordonnées de y.

p.161

Exercice 13 Déterminer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\varphi \,:\, (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 17

Soit $\mathcal{X}$ est une partie non vide de E et a un point de E. On appelle **distance** de a à $\mathcal{X}$ la quantité :

$$d(a, \mathcal{X}) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \|a - x\|.$$

L'existence de cette quantité $d(A,\mathcal{X})$ vient du fait que $\{d(A,M)\,;\ M\in\mathcal{X}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

Proposition 34

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E. La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

1. $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$;
2. $\forall y\in E \quad d(x,F)=\|x-y\| \iff y = p_F(x)$.

Démonstration page 162

p.162 **Exercice 14**

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Calculs de distances en géométrie

Cas du plan Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Proposition 35

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Démonstration page 162

Proposition 36

La distance d'un point $M(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{n}=(a,b)$.

Soit $A(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$. La proposition précédente donne :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\big|(x-\alpha)a+(y-\beta)b\big|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Comme A appartient à la droite $\mathcal{D}$, on a $a\alpha+b\beta=-c$ donc $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

Proposition 37

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

La distance d'un point M à la droite est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM},\vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration page 162

Cas de la dimension 3

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Proposition 38

La distance d'un point M de $\mathbb{R}^3$ à la droite $A + \operatorname{Vect}\vec{u}$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration page 162

Proposition 39

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La distance d'un point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Démonstration page 163

Corollaire 40

La distance de $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d = 0$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Démonstration. Soit A un point du plan de coordonnées (x_A, y_A, z_A). D'après la proposition 39, le vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ étant normal au plan $\mathcal{P}$, on a :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Mais comme $A \in \mathcal{P}$, on a aussi $-ax_A - by_A - cz_A = d$, ce qui conduit à la formule annoncée. □

Proposition 41

Soit M un point de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Démonstration page 163

Distance à un hyperplan d'un espace euclidien

Définition 18

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien. On appelle vecteur normal à H tout vecteur non nul de $H^\perp$.

Remarque Soit H un hyperplan d'un espace euclidien. D'après le corollaire 29 de la page 146, $H^\perp$ est une droite vectorielle. Deux vecteurs normaux à H sont donc proportionnels.

Proposition 42

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E de vecteur normal n.

La distance d'un vecteur x de E à H est donnée par :

$$d(x,H) = \frac{|x\cdot n|}{\|n\|}.$$

Démonstration page 163

p.163 **Exercice 15** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\}$.

1. Prouver que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, en fonction de M, sa distance à H.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 L'application φ est bien définie, car si A et B sont dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et le produit ${}^tA\,B$ a un sens et est une matrice (carrée) de $\in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Elle est bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition et de la trace. Enfin, φ est symétrique car :

$$\forall (A,B) \in E^2 \quad \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tBA\right).$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in E$, alors ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et :

$$\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{p}\left({}^tAA\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left({}^tA\right)_{i,j} a_{j,i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, la matrice A est nulle.

Exercice 2 Pour $(f,g) \in E^2$, la fonction $f\,g$ est continue, donc $\varphi(f,g)$ est bien définie. Le fait que φ soit une forme bilinéaire positive découle de la linéarité et de la positivité de l'intégrale.

Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$ ce qui implique sa nullité puis celle de f sur $[0, 2\pi]$.

Comme f est 2π-périodique, on en déduit qu'elle est nulle.

Ainsi, φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3 Le fait que φ soit une forme bilinéaire positive se montre de la même façon que dans l'exemple précédent.

Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto P^2(x)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, ce qui implique sa nullité sur $[0,1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui prouve sa nullité.

Ainsi, φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4 L'application S est clairement symétrique.

De plus, si l'on fixe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors l'application :

$$(x',y',z') \mapsto x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z)$$

est de la forme $(x',y',z') \mapsto Ax' + By' + Cz'$, où A, B et C sont des constantes, il s'agit donc d'une application linéaire.

De plus, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} S\big((x,y,z),(x,y,z)\big) &= x^2 + y^2 + z^2 + x\,y + x\,z + y\,z \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 + z^2\right) + \frac{yz}{2} \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{1}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

et $S\big((x,y,z),(x,y,z)\big) = 0 \Rightarrow x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = y + \dfrac{1}{3}z = z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$

Proposition 1 Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (\, x+y \mid x+y \,) \\ &= (\, x \mid x \,) + (\, x \mid y \,) + (\, y \mid x \,) + (\, y \mid y \,) && \text{(bilinéarité)} \\ &= (\, x \mid x \,) + 2(\, x \mid y \,) + (\, y \mid y \,) && \text{(symétrie.)} \end{aligned}$$

En appliquant l'égalité précédente à x et $-y$, on obtient la deuxième égalité en utilisant la bilinéarité.

Proposition 3

1. • Si $y = 0$, l'inégalité est évidente (c'est une égalité).
   • Sinon, on considère la fonction polynomiale :
   $$P : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & (\, x+\lambda y \mid x+\lambda y \,) = \lambda^2 (\, y \mid y \,) + 2\lambda (\, x \mid y \,) + (\, x \mid x \,). \end{array}$$
   Alors P est une fonction polynomiale de degré 2 (puisque $(\, y \mid y \,) > 0$) vérifiant :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad P(\lambda) \geqslant 0.$$
   Son discriminant :
   $$\Delta = 4(\, x \mid y \,)^2 - 4(\, x \mid x \,)(\, y \mid y \,)$$
   est donc négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité annoncée.
2. • Si x et y sont proportionnels, il existe un réel λ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$. Les vecteurs x et y jouant un rôle symétrique, on peut supposer que $y = \lambda x$. Alors :
   $$(\, x \mid y \,)^2 = (\, x \mid \lambda x \,)^2 = \lambda^2 (\, x \mid x \,)^2 = (\, x \mid x \,)(\, y \mid y \,).$$
   • Réciproquement, supposons $(\, x \mid y \,)^2 = (\, x \mid x \,)(\, y \mid y \,)$.
   * Si $y = 0$, alors x et y sont proportionnels.
   * Sinon, le discriminant Δ est nul. Il existe donc un scalaire λ tel que $P(\lambda) = 0$. On a alors :
   $$(\, x+\lambda y \mid x+\lambda y \,) = 0.$$
   Par définition du produit scalaire, on en déduit $x + \lambda y = 0$ et donc que x est proportionnel à y.

Proposition 4

• Soit $x \in E$. On a :
$$\|x\| = 0 \Longrightarrow (\, x \mid x \,) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$
• Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :
$$(\, \lambda x \mid \lambda x \,) = \lambda (\, x \mid \lambda x \,) = \lambda^2 (\, x \mid x \,)$$
et donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

• Soit $(x, y) \in E^2$. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (\, x+y \mid x+y \,) \\ &= (\, x \mid x \,) + (\, y \mid y \,) + 2(\, x \mid y \,) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\big|(\, x \mid y \,)\big| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| && \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$
D'où $\|x+y\|^2 \leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$.

- Si l'inégalité précédente est une égalité, alors :
$$(x \mid y) = \big|(x \mid y)\big| = \|x\|\,\|y\|.$$
En particulier, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, quitte à échanger les vecteurs x et y, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Ainsi :
$$(x \mid y) = \lambda(x \mid x) = \|x\|\,\|y\| = |\lambda|\|x\|^2.$$
Soit x est le vecteur nul et alors $x = 0y$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dans les deux cas, les vecteurs x et y sont positivement proportionnels.
Réciproquement, si les vecteurs x et y sont positivement proportionnels, alors on a, à permutation près, l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$. Ainsi, comme le réel λ est positif, on a :
$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = |1+\lambda|\|x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|.$$
Par conséquent, on a $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, les vecteurs x et y sont positivement liés.

Exercice 5

- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x),$$
donne :
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} = 1,$$
ce qui prouve que $\sin$ est unitaire.
- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
permet de déduire que $\cos$ est unitaire.
- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2\cos x \sin x = \sin(2x),$$
donne :
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi}\big[\cos(2x)\big]_0^{2\pi} = 0.$$
Pour prouver la nullité de l'intégrale précédente, on aurait aussi pu remarquer que la fonction à intégrer est 2π-périodique donc son intégrale sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est égale à celle sur $[-\pi, \pi]$ qui est nulle par imparité.

Proposition 5 Soit A une partie de E.

- La partie $A^{\perp}$ contient le vecteur nul puisque celui-ci est orthogonal à tout élément de A.
- Soit x et y deux éléments de $A^{\perp}$, ainsi que λ et μ deux scalaires.
Pour tout $a \in A$, la bilinéarité du produit scalaire donne :
$$(a \mid \lambda\, x + \mu\, y) = \lambda\,(a \mid x) + \mu\,(a \mid y) = 0$$
et donc $\lambda\, x + \mu\, y \in A^{\perp}$.

Donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 Un vecteur appartient à H si, et seulement s'il est orthogonal au vecteur a. Le sous-espace vectoriel H est donc le noyau de la forme linéaire $\varphi_a \,:\, x \mapsto (\, a \mid x\,)$.

Comme $\varphi_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$, la forme linéaire φ_a est non nulle. Son noyau H est donc un hyperplan.

Proposition 7

- Comme $A \subset \operatorname{Vect} A$, on a déjà l'inclusion $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$.
- Soit $x \in A^\perp$. Pour tout $y \in \operatorname{Vect} A$, il existe des éléments $a_1, \ldots, a_p$ de A et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, a_i$ donc, par bilinéarité du produit scalaire :

$$(\, x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, (\, x \mid a_i\,) = 0,$$

ce qui prouve que $x \in (\operatorname{Vect} A)^\perp$. Ainsi, $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$

Exercice 7

- On a $\|f_0\|^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = 1 \quad \text{et} \quad \|g_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = 1,$$

ce qui prouve que la famille est composée de vecteurs unitaires.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(\, f_0 \mid f_k\,) = \frac{1}{k\pi\sqrt{2}}\big[\sin(kx)\big]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{et} \quad (\, f_0 \mid g_k\,) = -\frac{1}{k\pi\sqrt{2}}\big[\cos(kx)\big]_0^{2\pi} = 0$$

Pour tout $(k,k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \neq k'$, on a :

$$(\, f_k \mid f_{k'}\,) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k+k')x)}{k+k'} + \frac{\sin((k-k')x)}{k-k'}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(\, g_k \mid g_{k'}\,) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k-k')x)}{k-k'} - \frac{\sin((k+k')x)}{k+k'}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Enfin, pour tout $(k,k') \in (\mathbb{N}^*)^2$, la fonction $f_k g_{k'}$ est 2π-périodique donc le produit scalaire $(\, f_k \mid g_{k'}\,)$ est égal à l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction impaire $f_k g_{k'}$, ce qui implique sa nullité.

Par suite, la famille est orthogonale.

Ainsi, la famille considérée est orthonormale.

Proposition 8 Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E et une famille de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \,\middle|\, e_k\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\, e_i \mid e_k\,) = \lambda_k \|e_k\|^2.$$

Le vecteur e_k étant non nul, on en déduit que $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.

Comme une famille orthonormée est orthogonale et composée de vecteurs non nuls, elle est libre.

Proposition 10 Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\, x_i \mid x_j \,) = \sum_{i=1}^{n} (\, x_i \mid x_i \,),$$

puisque $(\, x_i \mid x_j \,) = 0$ si $i \neq j$.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall p \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Alors :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad f_j \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_j).$$

Si l'on note $P = (P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on en déduit que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow P_{i,j} = 0$$

c'est-à-dire que la matrice P est triangulaire supérieure.

Exercice 9 On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, ce qui donne :

$$f_1 = (1,0,0), \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,2,0) \qquad \text{et} \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,3).$$

Proposition 14

1. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, la linéarité à droite du produit scalaire donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad (\, e_i \mid x \,) = \left(e_i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k (\, e_i \mid e_k \,) = x_i$$

Donc $x = \sum_{i=1}^{n} (\, e_i \mid x \,)\, e_i$.

2. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ deux vecteurs de E.

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$(\, x \mid y \,) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\, e_i \mid e_j \,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = {}^tXY$$

et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX$.

Proposition 15 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- Si le vecteur $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ convient alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$f(e_i) = (\, a \mid e_i \,) = a_i,$$

  donc $a = \sum_{i=1}^{n} (\, a \mid e_i \,) e_i = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i$. L'unicité est donc assurée.

- Si l'on pose $a = \sum_{i=1}^{n} (\, a \mid e_i \,) e_i$, alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = (\, a \mid x \,).$$

Proposition 18

- Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

  Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a, d'après la proposition 14 de la page 140 :

$$(\, e'_i \mid e'_j \,) = \sum_{k=1}^{n} P_{k,i} P_{k,j} = \left({}^t PP\right)_{i,j}$$

  Ainsi, la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si, et seulement si, ${}^t PP = I_n$, c'est-à-dire si, et seulement si, P est orthogonale.

- Comme E est un espace euclidien, il possède une base orthonormale $\mathcal{B}$. Considérons la base $\mathcal{B}'$ telle que M soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. D'après le résultat précédent, $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E.

Proposition 19

- Si les matrices A et B sont orthogonales, alors

$${}^t(AB)(AB) = {}^t B {}^t A AB = {}^t BB = I_n$$

  donc la matrice AB est orthogonale.

- Soit M une matrice orthogonale. D'après le corollaire 17 de la page 142, elle est inversible et :

$${}^t\left(M^{-1}\right) M^{-1} = \left(M {}^t M\right)^{-1} = I_n,$$

  donc M^{-1} est orthogonale.

Proposition 21

- *Réflexivité.* La matrice de passage d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ vers elle-même est la matrice I_n qui appartient à $\mathcal{SO}(n)$, donc $\mathcal{B}$ est bien de même sens qu'elle-même.

- *Symétrie.* Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est la matrice P^{-1}.
  Or, si P appartient à $\mathcal{SO}(n)$, alors P^{-1} également.

- *Transitivité.* Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases orthonormales de E. Si P et Q sont les matrices de passage respectivement de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}''$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}''$ est la matrice PQ.
  Si P et Q appartiennent à $\mathcal{SO}(n)$, alors la matrice PQ également.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B}_0$ la base orthonormale directe choisie pour définir l'orientation de l'espace E. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormales indirectes. Alors si l'on note P_1 et P_2 les matrices de passage respectivement de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_2$, les deux matrices P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{O}_n(\mathrm{IR})$ et sont de déterminant -1. Par suite, la matrice $P_1^{-1}P_2$ de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ appartient à $\mathcal{SO}(n)$, ce qui prouve que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont de même sens.

Proposition 24 Pour un vecteur $\vec{x}$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $\mathcal{B}$, on a :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{x}] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} . = (\,\vec{w} \mid \vec{x}\,)$$

où $\vec{w}$ est le vecteur dont les composantes dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ sont :

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

L'unicité de la proposition 23 permet alors de conclure à l'égalité $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.

Proposition 25 Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors pour tout vecteur $\vec{w}$, on a $0 = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\,\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w}\,)$ donc le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors il existe un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base. En particulier, $(\,\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w}\,) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ donc le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est non nul.

Corollaire 26 Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, ils engendrent un plan P et leur produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est non nul et orthogonal à P. Le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à P est donc de dimension au moins 1, et il est en somme directe avec P puisque le seul vecteur de P orthogonal à P (donc à lui-même) est 0. C'est donc la droite engendrée par $\vec{w}$.

Proposition 27 Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ appartiennent à la droite $(\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}))^{\perp}$, ils sont donc proportionnels. Soit $\lambda \in \mathrm{IR}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda\vec{w}$, alors $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \lambda\|\vec{w}\|^2 = \lambda$. Ainsi, $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 1$ si, et seulement si, $\lambda = 1$ et $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -1$ si, et seulement si, $\lambda = -1$.

Exercice 11 Si le vecteur $\vec{u}$ est nul, alors le résultat est évident.

Sinon, on pose $\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et on considère un plan P contenant $\vec{\imath}$ et $\vec{v}$. On prenant un vecteur $\vec{\jmath}$ tel que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ soit une base orthonormée de P puis $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$, on obtient

une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E dans laquelle les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont respectivement de la forme :

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b,c,d,e,f) \in \mathrm{IR}^6.$$

Les coordonnées de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ dans $\mathcal{B}$ sont alors :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -abe + acd \\ -abf \end{pmatrix} = ad \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} - ab \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Ce sont donc celles du vecteur $(\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$.

Proposition 28 Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(y,z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Pour cela, raisonnons par analyse-synthèse.

Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Analyse : supposons qu'il existe $(y,z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Comme $z \in F^{\perp}$, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad 0 = (\, e_i \mid z\,) = (\, e_i \mid x - y\,) = (\, e_i \mid x\,) - (\, e_i \mid y\,).$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $y = \sum\limits_{i=1}^{p} (\, e_i \mid y\,)\, e_i = \sum\limits_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$ et $z = x - y = \sum\limits_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$. Ainsi, si un tel couple (y,z) existe, il est unique.

Synthèse : si l'on pose $y = \sum\limits_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$ et $z = x - y$, alors $x = y + z$, $y \in F$ et $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\, e_i \mid z\,) = (\, e_i \mid x - y\,) = (\, e_i \mid x\,) - (\, e_i \mid y\,) = 0$, donc $z \in F^{\perp}$.

Par suite, les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Corollaire 29

1. Comme E est de dimension finie, F l'est également et donc F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, ce qui implique l'égalité souhaitée.
2. Par définition, tout élément de F est orthogonal à tout élément de $F^{\perp}$ ce qui prouve que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Comme :

$$\dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim E - \dim F^{\perp} = \dim F,$$

on en déduit que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 12 Toute sous-famille d'une famille libre étant libre, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est de dimension k.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Dans l'espace euclidien :

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_p),$$

les vecteurs f_p et g_p sont orthogonaux à l'hyperplan :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{p-1}) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_{p-1}).$$

Ils appartiennent donc à une même droite. Les vecteurs f_p et g_p étant normés, on en déduit que $f_p = \pm g_p$. Les conditions $(\, e_p \mid f_p \,) > 0$ et $(\, e_p \mid g_p \,) > 0$ impliquent alors que $f_p = g_p$.

Proposition 32 Décomposons $p_F(x)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, e_i.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^{\perp}$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$(\, e_i \mid x \,) = (\, e_i \mid x - p_F(x) \,) + (\, e_i \mid p_F(x) \,) = (\, e_i \mid p_F(x) \,) = \left(e_i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, e_k \right) = \lambda_i,$$

ce qui donne le résultat.

Proposition 33 Si $y = p_F(x)$, alors $y \in F$ et $x - y = p_{F^{\perp}}(x)$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $(\, x - y \mid e_i \,) = 0$.

Réciproquement, supposons $y \in F$ et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $(\, x - y \mid e_i \,) = 0$.

On a alors $x - y \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)^{\perp} = F^{\perp}$, d'où $x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{x - y}_{\in F^{\perp}}$.

Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$, on en déduit que $y = p_F(x)$.

Exercice 13 On cherche le projeté orthogonal P du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. Le polynôme P doit vérifier

$$(\, X^3 - P \mid 1 \,) = (\, X^3 - P \mid X \,) = (\, X^3 - P \mid X^2 \,) = 0,$$

ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c & = 3 \\ 15a + 20b + 30c & = 12 \\ 12a + 15b + 20c & = 10. \end{cases}$$

L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c & = 3 \\ a + b + 2c & = 1 \\ 12a + 15b + 20c & = 10. \end{cases}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a + b + 2c & = 1 \\ 2b + 4c & = -1 \\ 3b - 4c & = -2. \end{cases}$$

On obtient ainsi $P = \dfrac{30X^2 - 12X + 1}{20}$.

Proposition 34 Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$y - x = y - p_F(x) + p_F(x) - x \qquad \text{avec} \qquad (\, x - p_F(x) \mid y - p_F(x)\,) = 0,$$

et donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|y - p_F(x)\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2.$$

Par conséquent, $d(x, F) \geqslant \|x - p_F(x)\|$ et on a même égalité puisque, $p_F(x)$ étant dans F, on a aussi $d(x, F) \leqslant \|x - p_F(x)\|$.

De plus :

$$d(x, F) = \|x-y\| \iff \|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 \iff \|y-p_F(x)\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

Exercice 14 On remarque que :

$$\inf_{(a,b)\in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \inf_{g\in F} \|f - g\|^2$$

où $f : x \mapsto x$, $F = \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$ et où $\| \ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire :

$$(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x$$

Donc :

$$\inf_{(a,b)\in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \|f - p_F(f)\|^2$$

où $p_F(f)$ est le projeté orthogonal de f sur F.

Comme la famille $(\cos, \sin)$ est une base orthonormée de F, on a :

$$p_F(f) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\cos x \,\mathrm{d}x\right) \cos + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\sin x \,\mathrm{d}x\right) \sin = -2\sin$$

Ainsi :

$$\inf_{(a,b)\in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (x + 2\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = -4\pi + \frac{8\pi^3}{3}\cdot$$

Proposition 35 Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La famille $(\vec{u}, \vec{n})$ étant une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{n}$.

Soit B un point de $\mathcal{D}$, il est de la forme $A + t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{BM}\|^2 = (\lambda - t)^2 \, \|\vec{u}\|^2 + \mu^2 \|\vec{n}\|^2.$$

Par conséquent, la distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à $|\mu| \|\vec{n}\|$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \mu \|\vec{n}\|^2$, ce qui conduit au résultat.

Proposition 37 Si $\vec{u}$ a pour coordonnées (α, β), alors le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-\beta, \alpha)$ est un vecteur normal et pour tout vecteur $\vec{w}$, on a $\vec{w} \cdot \vec{n} = [\vec{w}, \vec{u}]$. Le résultat découle alors de la proposition 35 de la page 150 .

Proposition 38 Soit $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. On complète ce vecteur en une base orthonormée $(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$.

Il existe alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}' + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$.

Soit B un point de $\mathcal{D}$. Il est de la forme $A+t\vec{u}'$ avec $t\in \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2=(\lambda-t)^2+\mu^2+\nu^2.$$

Par conséquent, la distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à $\sqrt{\mu^2+\nu^2}$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{AM}\wedge u=\mu\,\vec{v}\wedge\vec{u}+\nu\,\vec{w}\wedge\vec{u}=-\mu\vec{w}+\nu\vec{v}$. Le résultat découle alors du théorème de Pythagore.

Proposition 39 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\mathcal{P}=A+\operatorname{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, il existe $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\mu\vec{n}$.

Soit B un point de $\mathcal{P}$. Il est de la forme $A+t\vec{u}+s\vec{v}$ avec $(t,s)\in\mathbb{R}^2$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2=(\lambda-t)^2\,\|\overrightarrow{u}\|^2+(\mu-s)^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2+\nu^2\|\overrightarrow{n}\|^2.$$

Par conséquent, la distance de M à $\mathcal{P}$ est égale à $|\nu|\|\overrightarrow{n}\|$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\nu\|\overrightarrow{n}\|^2$, ce qui conduit au résultat.

Proposition 41 Comme les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dirigent le plan $\mathcal{P}$, ils ne sont pas colinéaires et le vecteur $\vec{v}\wedge\vec{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, ainsi, d'après la proposition 39 de la page 151, on a :

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})\right|}{\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|}=\frac{\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Proposition 42 D'après la proposition 28 de la page 146, comme $H^\perp$ est une droite dirigée par n, il existe $(h,\lambda)\in H\times\mathbb{R}$ tel que $x=h+\lambda n$.

Soit $h'\in H$, on a donc, grâce au théorème de Pythagore, $\|x-h'\|^2=\|h-h'\|^2+\lambda^2\|n\|^2$. Par conséquent, $d(x,H)=|\lambda|\|n\|$. Par ailleurs, comme $n\in H^\perp$, on a $x\cdot n=\lambda\|n\|^2$, ce qui conduit au résultat.

Exercice 15

1. L'espace vectoriel H est le noyau de la forme linéaire non nulle Tr ; il s'agit donc d'un hyperplan.
2. La matrice I_n est telle que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A\cdot I_n=\operatorname{Tr}A$; il s'agit donc d'un vecteur normal à H. Par conséquent, $d(M,H)=\dfrac{|M\cdot I_n|}{\|I_n\|}=\dfrac{|\operatorname{Tr}M|}{n}$.

S'entraîner et approfondir

⋆ **3.1** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$.
2. Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

   On pourra considérer sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *le produit scalaire canonique défini par :*

$$(\, M \mid N \,) = \operatorname{Tr}\left({}^t\! M\, N\right).$$

3.2 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit orthogonale.

3.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E.

Démontrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base orthonormée de E.

3.4 On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

⋆ **3.5** Soit E un espace euclidien de norme associée $\|.\|$. On considère deux projecteurs p et q de E.

1. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

2. Montrer que p et q commutent si, et seulement si, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par q.
3. On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux de E.
   (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, x \mid p(y) \,) = (\, p(x) \mid y \,)$.
   En déduire que $\operatorname{Ker} p$ est stable par q si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ l'est.
   (b) Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
      (i) $p \circ q = q \circ p$;
      (ii) $q \circ p$ est un projecteur.

⋆ **3.6** Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathrm{IR})$ et $\varphi:\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (fg+f'g')\,. \end{array}$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F=\{f\in E\,|\,f(0)=f(1)=0\}$ et $G=\{f\in E\,|\,f''=f\}$.
   Montrer que les espaces vectoriels F et G sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale de E sur G.
3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $E_{a,b}=\{f\in E\,|\,f(0)=a \text{ et } f(1)=b\}$.
   (a) Trouver un élément f_0 de $E_{a,b}$, puis prouver que $E_{a,b}=\{f_0+h\,;\ h\in F\}$ et enfin donner le projeté orthogonal de f_0 sur F.
   (b) À l'aide de la décomposition de f_0, déterminer la valeur de :
   $$\inf_{f\in E_{a,b}}\int_0^1\left(f^2+f'^2\right).$$

3.7 Soit a_0, a_1, …, a_n des réels et :

$$\varphi\,:\,\mathrm{IR}_n[X]\times\mathrm{IR}_n[X]\to\mathrm{IR},\ (P,Q)\mapsto\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a_k pour que φ soit un produit scalaire.
2. Déterminer la distance de X^n à $F=\left\{P\in\mathrm{IR}_n[X]\mid\sum\limits_{k=0}^n P(a_k)=0\right\}$.
3. Dans cette question $n=3$ et $\forall k\in[\![0,3]\!]$, $a_k=k$. Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{IR}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

3.8 Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que F possède un supplémentaire orthogonal, c'est-à-dire qu'il existe un supplémentaire G de F orthogonal à F.
   Prouver que G est égal à $F^\perp$.
2. On suppose que F admet un supplémentaire orthogonal. Montrer qu'alors $F^\perp$ admet aussi un supplémentaire orthogonal et que l'on a $\left(F^\perp\right)^\perp=F$.

⋆ **3.9** Soit $E=\mathrm{IR}[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $F=\{P\in E\mid P(0)=0\}$. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E=F\oplus F^\perp$?
   En utilisant l'exercice 3.8, on a donc prouvé que F ne possède pas de supplémentaire orthogonal.
2. Soit $\varphi:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{IR}. \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array}$ Prouver que φ est une forme linéaire sur E mais qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que $\forall P\in E\quad \varphi(P)=(\,P\mid Q\,)$.

3.10 On munit alors $E = \mathcal{C}\big([-1,1],\mathrm{IR}\big)$, et donc aussi $\mathrm{IR}[X]$, du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (\, f \mid g \,) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ de $\mathrm{IR}[X]$ telle que, pour tout entier n, Q_n soit de degré n et de coefficient dominant 1.
2. En remarquant qu'il est équivalent de dire que Q_n est de degré n, de coefficient dominant 1 et orthogonal à $\mathrm{IR}_{n-1}[X]$, montrer l'unicité de la famille $(Q_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.
3. Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.
4. Pour $f \in E$, on note $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$. Montrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, on a :

$$(\, \tilde{f} \mid g \,) = (\, f \mid \tilde{g} \,).$$

   En déduire la parité de Q_n en fonction de n.

3.11 On considère les polynômes construits dans l'exercice 3.10.
Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$, Q_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.
On pourra introduire le polynôme $\prod_{a\in S}(X-a)$ *où* S *est l'ensemble des racines de* Q_n *appartenant à l'intervalle* $]-1,1[$ *et d'ordre impair.*

Solution des exercices

3.1 1. Notons X le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coordonnées valent 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, on a, A étant une matrice orthogonale :

$$\left|(\, AX \mid X\,)\right| \leqslant \|AX\|\,\|X\| = \|X\|^2.$$

Cela donne le résultat souhaité car :

$$\left|(\, AX \mid X\,)\right| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = n.$$

2. Considérons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire canonique défini par :

$$(\, M \mid N\,) = \operatorname{Tr}\left({}^t\!MN\right).$$

- On a d'une part $\|A\|^2 = \operatorname{Tr}(I_n) = n$.
- D'autre part, considérons $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} = 0 \\ \dfrac{a_{i,j}}{|a_{i,j}|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $|b_{i,j}| \leqslant 1$, donc :

$$\|B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 = n^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée avec les matrices A et B donne alors :

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|\right)^2 = (\, A \mid B\,)^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2 = n^2 \times n.$$

On en déduit l'inégalité demandée.

3.2 Soit $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$ une base orthonormale de $\operatorname{Im} u$. Considérons une famille $(e_1,\ldots,e_r)$ d'antécédents, c'est-à-dire telle que $u(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. Considérons maintenant une base $(f_1,\ldots,f_s)$ de $\operatorname{Ker} u$.

D'après le théorème du rang, $r+s = n = \dim E$ donc la famille $(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_s)$ est une base de E si, et seulement si, elle est libre.

Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^s \beta_j f_j = 0$. En appliquant u, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_i = 0$ puis, par liberté de la famille $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)$, on a :

$$\forall i \in [\![1,r]\!] \quad \alpha_i = 0.$$

On a donc $\sum_{j=1}^{s} \beta_j f_j = 0$, et par liberté de la famille $(f_1, \dots, f_s)$, on obtient :

$$\forall j \in [\![1, s]\!] \quad \beta_j = 0.$$

Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ est une base de E et la famille :

$$(u(e_1), \dots, u(e_r), u(f_1), \dots, u(f_s)) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0_E, \dots, 0_E)$$

est orthogonale.

3.3 Procédons par analyse-synthèse.

Supposons qu'un tel produit scalaire existe et notons-le φ. D'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, si l'on considère deux vecteurs x et y de E de coordonnées respectives $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Ainsi, si un tel produit scalaire existe, alors il est unique.

Considérons maintenant l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$, qui à deux vecteurs x et y de E de coordonnées respectives $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, associe $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. L'application φ est alors clairement bilinéaire symétrique et positive. De plus, si un vecteur x de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vérifie $\varphi(x, x) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, puis $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc x est le vecteur nul. Enfin, pour tout $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $\varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j}\delta_{i,k} = \delta_{j,k}$, donc la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Ainsi, il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base orthonormée de E.

3.4 Les vecteurs $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base orthonormale de F, donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad p(x) = (\, x \mid e_1 \,)e_1 + (\, x \mid e_2 \,)e_2$$

où p est la projection orthogonale sur F. La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 1. • Soit p la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.Si x est un vecteur de E, alors $x = \underbrace{p(x)}_{x\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{x\in F^\perp}$ donc :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

• Réciproquement supposons que p vérifie la condition.Il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G. Montrons que F et G sont orthogonaux, ce qui, par des arguments de dimension prouvera que $G = F^\perp$. Soit $(f, g) \in F \times G$ alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad p\,(f + \lambda g) = f.$$

Par conséquent :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|f\|^2 \leqslant \|f + \lambda g\|^2,$$

soit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda(\, f \mid g\,) \geqslant 0.$$

La fonction polynomiale $\lambda \mapsto \lambda^2\|g\|^2 + 2\lambda(\, f \mid g\,)$ est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ donc on en déduit que :

$$\Delta = (2(\, f \mid g\,))^2 \leqslant 0,$$

puis que $(\, f \mid g\,) = 0$. Par suite, les espaces vectoriels F et G sont orthogonaux, donc p est une projection orthogonale.

2. Supposons $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ stables par q.

Soit $x \in E$. Comme $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$, on a alors :

$$q \circ p(x) = q(x_2) \qquad \text{et} \qquad p \circ q(x) = p(\underbrace{q(x_1)}_{\in \operatorname{Ker} p}) + p(\underbrace{q(x_2)}_{\in \operatorname{Im} p}) = q(x_2).$$

Ainsi, p et q commutent.

Réciproquement, si p et q commutent, alors les espaces propres de p sont stables par q ; en particulier $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ le sont.

3. (a) Soit $(x, y) \in E^2$. Comme $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, il existe $(x_1, y_1) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ et $(x_2, y_2) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. On a alors :

$$(\, x \mid p(y)\,) = (\, x_1 + x_2 \mid y_2\,) = (\, x_2 \mid y_2\,)$$

car $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$; et de même :

$$(\, p(x) \mid y\,)(\, x_2 \mid y_1 + y_2\,) = (\, x_2 \mid y_2\,).$$

Ainsi, $(\, x \mid p(y)\,) = (\, p(x) \mid y\,)$.

Supposons $\operatorname{Ker} p$ stable par q et montrons que $\operatorname{Im} p$ l'est également.

Soit $x \in \operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$. On veut montrer que $q(x)$ appartient à $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$.

Pour cela considérons $y \in \operatorname{Ker} p$, on a alors $q(y) \in \operatorname{Ker} p$ puis :

$$(\, q(x) \mid y\,) = (\, x \mid q(y)\,) = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Im} p$ stable par q.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} p$ stable par q et montrons que $\operatorname{Ker} p$ l'est aussi. Soit $x \in \operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$. On veut montrer que $q(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$. Pour cela considérons $y \in \operatorname{Im} p$, on a alors $q(y) \in \operatorname{Im} p$ puis :

$$(\, q(x) \mid y\,) = (\, x \mid q(y)\,) = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} p$ stable par q.

(b) Supposons (i). On a alors $q \circ p \circ q \circ p = q \circ q \circ p \circ p = q \circ p$ donc $q \circ p$ est un projecteur.
Supposons désormais (ii) et montrons que $\operatorname{Im} p$ est stable par q ; ce qui, à l'aide des questions précédentes, prouvera (i).
Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Il existe donc $t \in E$ tel que $x = p(t)$.
Pour montrer que $q(x) = q \circ p(x)$ appartient à $\operatorname{Im} p$, il suffit de prouver que $\|p\,(q \circ p(x))\| = \|q \circ p(x)\|$. Or, comme p et q sont des projecteurs orthogonaux, on a :

$$\|q \circ p\,(q \circ p(x))\| \leqslant \|p\,(q \circ p(x))\| \leqslant \|q \circ p(x)\|.$$

Comme $q \circ p \circ q \circ p = q \circ p$, on en déduit que $\|p\,(q \circ p(x))\| = \|q \circ p(x)\|$.
Ainsi, $\operatorname{Im} p$ est stable par q ; ce qui achève de prouver l'équivalence.

3.6 1. On montre aisément que φ est une forme bilinéaire symétrique. De plus,

$$\forall f \in E \qquad \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right) \geqslant 0.$$

Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$ alors, la fonction $f^2 + f'^2$ étant continue et positive sur $[0,1]$, on en déduit que cette fonction est nulle, puis que f est nulle. Donc φ est un produit scalaire sur E.

2. • Montrons d'abord que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires. Soit $f \in E$. Il faut prouver l'existence d'un unique couple $(f_1, f_2) \in F \times G$ tel que $f = f_1 + f_2$. On procède par analyse-synthèse.
   ∗ Supposons qu'il existe un couple $(f_1, f_2) \in F \times G$ tel que $f = f_1 + f_2$. Comme G est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre deux dont l'équation caractéristique a pour racines 1 et -1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f_2(x) = \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x.$$

   Comme $f(0) = f_2(0)$ et $f(1) = f_2(1)$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(1) = \alpha \operatorname{ch} 1 + \beta \operatorname{sh} 1 \end{cases} ;$$

   ce qui est équivalent à $\alpha = f(0)$ et $\beta = \dfrac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}\cdot$ D'où l'unicité sous réserve d'existence.
   • Réciproquement, si l'on pose $f_2 : x \mapsto \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x$ avec $\alpha = f(0)$ et $\beta = \dfrac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$ et $f_1 = f - f_2$, alors on a $(f_1, f_2) \in F \times G$ et $f = f_1 + f_2$.

Par suite, les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

3. Enfin montrons que F et G sont orthogonaux. Si $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$, alors la fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\varphi(f_1, f_2) &= \int_0^1 (f_1 f_2 + f_1' f_2') \\ &= \int_0^1 f_1 f_2 + [f_1' f_2]_0^1 - \int_0^1 f_2 f_1'' \\ &= \int_0^1 f_2 (f_1 - f_1'') = 0.\end{aligned}$$

Les espaces F et G sont donc supplémentaires orthogonaux.

Le projeté orthogonal sur G de f est égale à :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh} 1}\big(f(0)\operatorname{sh}(1-x) + f(1)\operatorname{sh} x\big).$$

4. (a) La fonction $x \mapsto a + (b-a)x$ appartient à $E_{a,b}$. De plus :

$$\forall f \in E \quad f \in E_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = f_0(0) \\ f(1) = f_0(1) \end{cases} \Leftrightarrow f - f_0 \in F.$$

Par conséquent, $E_{a,b} = \{f_0 + h\,;\ h \in E_{0,0}\}$.

Le projeté orthogonal de f_0 sur G est $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}\,(a\operatorname{sh}(1-x) + b\operatorname{sh} x)$.

(b) Soit $f \in E_{a,b}$, il existe $h \in F$ tel que $f = f_0 + h$ donc

$$f = f_0 + h = \underbrace{f_0 - f_1}_{\in G = F^\perp} + \underbrace{f_1}_{\in F} + \underbrace{h}_{\in F}$$

puis :

$$\int_0^1 \big(f^2 + f'^2\big) = \|f_0 + h\|^2 = \|f_0 - f_1\|^2 + \|f_1 + h\|^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 \big(f^2 + f'^2\big) = \|f_0 - f_1\|^2.$$

On peut même préciser que cette borne inférieure est atteint de façon unique en $f_2 = f_0 - f_1 \in G$. Par suite :

$$\begin{aligned}\|f_2\|^2 = \int_0^1 \big(f_2^2 + f_2'^2\big) &= \int_0^1 f_2^2 + [f_2 f_2']_0^1 - \int_0^1 f_2 f_2'' \\ &= [f_2 f_2']_0^1 = \frac{b(b\operatorname{ch} 1 - a) - a(b - a\operatorname{ch} 1)}{\operatorname{sh} 1} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)\operatorname{ch} 1 - 2ab}{\operatorname{sh} 1}\cdot\end{aligned}$$

3.7 1. L'application φ est clairement une forme bilinéaire symétrique positive. Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire si, et seulement si, les réels a_k sont distincts.
Supposons les réels a_k distincts et prouvons que φ est définie. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, on a alors $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$, donc P a $n+1$ racines distinctes, puis P est le polynôme nul. Par conséquent, φ est un produit scalaire.
Supposons désormais les réels a_k non distincts. Quitte à renuméroter ces réels, supposons $a_1 = a_2$. En posant $P = \prod\limits_{i=2}^{n}(X - a_i)$. On a alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \neq 0$ et $\varphi(P,P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$, ce qui prouve que φ n'est pas un produit scalaire.
Par suite, φ est un produit scalaire si, et seulement si, les réels a_k sont distincts.

2. En tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)$ qui est non nulle, l'espace vectoriel F est un hyperplan. De plus, $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \varphi(P,1) = 0\}$ donc le polynôme constant à 1 est normal à F. En utilisant la proposition 42 de la page 152, on a donc :

$$d(X^n, F) = \frac{\left|\varphi(X^n, 1)\right|}{\sqrt{\varphi(1,1)}} = \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^n\right|}{\sqrt{n}}.$$

3. En considérant une famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2 \quad L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, on obtient une base orthonormale pour φ. Il suffit donc de prendre :

$$\forall i \in [\![0,3]\!] \quad L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} (X - j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} (i - j)}.$$

3.8 1. Supposons $E = F \bigoplus G$ avec $G \subset F^{\perp}$.
Soit $x \in F^{\perp}$, en écrivant $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, le vecteur $f = x - g$ appartient à F et $F^{\perp}$, il est donc nul, ce qui implique que $F^{\perp} \subset G$. On a donc l'égalité $G = F^{\perp}$.

2. Puisque $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$, la question précédente montre que $F^{\perp}$ admet un supplémentaire orthogonal et prouve $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

3.9 1. Soit $Q \in F^{\perp}$. On a $(\, Q \mid XQ \,) = 0$ donc la fonction $f \,:\, t \mapsto tQ(t)^2$ est continue, positive sur $[0,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$; elle est donc nulle sur $[0,1]$. Le polynôme Q a donc une infinité de racines, ce qui prouve sa nullité.
Par suite $F^{\perp} \subset \{0\}$ puis $F^{\perp} = \{0\}$.
Comme $E \neq F$, on n'a pas $E = F \oplus F^{\perp}$.

2. Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall P \in E \quad \varphi(P) = (\, P \mid Q \,)$.

   On aurait donc $Q \in F^{\perp}$ donc $Q = 0$, l'application linéaire φ serait alors identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas.

   Par conséquent, il n'existe pas de polynôme Q tel que $\forall P \in E \quad \varphi(P) = (\, P \mid Q \,)$.

3.10 1. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire en posant $Q_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\, X^n \mid Q_k \,)}{\|Q_k\|^2} Q_k$$

   on obtient une famille orthogonale telle que, pour tout entier n, on ait $\deg(Q_n) = n$ et Q_n de coefficient dominant 1.

2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de polynômes de coefficient dominant 1 telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_n)$. Donc $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si, et seulement si, P_n est orthogonal à $P_0, \ldots, P_{n-1}$. D'où l'équivalence demandée.

   Soit alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrons que $P_n = Q_n$.

   Par hypothèse, le polynôme $P_n - Q_n$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad (\, P_n - Q_n \mid P \,) = (\, P_n \mid P \,) = (\, Q_n \mid P \,) = 0$$

   donc le polynôme $P_n - Q_n$ est nul.

3. On a $Q_0 = 1$. On cherche Q_1 de la forme $X + a$ de sorte que $(\, Q_1 \mid 1 \,) = 0$ et l'on obtient $Q_1 = X$.

   On cherche Q_2 de la forme $X^2 + aX + b$ de sorte que :

$$(\, Q_2 \mid 1 \,) = (\, Q_2 \mid X \,) = 0$$

   et l'on obtient $Q_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

   On cherche Q_3 de la forme $X^3 + aX^2 + bX + c$ de sorte que :

$$(\, Q_3 \mid 1 \,) = (\, Q_3 \mid X \,) = \left(\, Q_3 \,\middle|\, X^2 \,\right) = 0$$

   et l'on obtient $Q_3 = X^3 - \dfrac{3}{5}X$.

4. Le premier résultat est immédiat par changement de variable $t \mapsto -t$ dans l'intégrale.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a :

$$\left(\, \tilde{Q}_n \,\middle|\, P \,\right) = \left(\, Q_n \,\middle|\, \tilde{P} \,\right) = 0$$

   puisque Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\tilde{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   La suite de polynômes $\left((-1)^n \tilde{Q}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc les conditions de la première question, donc est égale à $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après la deuxième.

   Finalement, $\tilde{Q}_n = (-1)^n Q_n$, ce qui prouve que Q_n est de même parité que n.

3.11 Supposons, par l'absurde, que Q_n ne possède pas n racines simples dans l'intervalle $]-1,1[$ et posons $R = \prod_{a \in S}(X-a)$ où S est l'ensemble des racines de Q_n appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ et d'ordre impair (si S est vide, alors $R=1$). Le polynôme R appartient alors à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En particulier, on a $(Q_n \mid R) = 0$ c'est-à-dire $\int_{-1}^{1} Q_n(t)\, R(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Or, la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est continue et de signe constant $[-1,1]$. En effet, les racines de Q_nR appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ sont de multiplicité paire donc la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est de signe constant sur $]-1,1[$ puis sur le segment $[-1,1]$ par continuité.

Par conséquent, la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est nulle sur $]-1,1[$ donc le polynôme Q_nR est le polynôme nul car il possède une infinité de racines, ce qui est absurde.

On aboutit donc à une contradiction ; ce qui prouve que le polynôme Q_n possède n racines simples dans l'intervalle $]-1,1[$.

Chapitre 4 : Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien



Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Généralités

Définition 1

Un endomorphisme f de E est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

p.186 **Exercice 1** Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle ?

Proposition 1

Une isométrie vectorielle est un automorphisme

Démonstration page 186

Proposition 2

Un endomorphisme f de E est une isométrie si, et seulement s'il conserve le produit scalaire c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y).$$

Démonstration page 186

Remarque Cette propriété explique pourquoi une isométrie vectorielle est aussi appelée un **automorphisme orthogonal**. Il s'agit en effet d'un automorphisme qui conserve l'orthogonalité, au sens où deux vecteurs orthogonaux ont des images orthogonales.

Exemples

1. Les seules homothéties qui soient des isométries sont Id et $-\mathrm{Id}$.
2. Contrairement à ce que le terme pourrait laisser penser, une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal sauf si c'est l'identité puisque, sinon, elle n'est pas bijective.
3. Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

   En effet, soit s la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F. Pour tout $x \in E$, il existe un couple (unique) $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. On a alors $s(x) = y - z$. Par le théorème de Pythagore, on a :

   $$\left\|s(x)\right\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2.$$

   Donc la symétrie s conserve la norme.

   L'exercice suivant prouve que les symétries orthogonales sont les seules qui conservent la norme.

p.186

Exercice 2 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Montrer que, si s est une isométrie, alors s est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que F et G sont orthogonaux.

Proposition 3

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Démonstration page 186

Proposition 4

Soit f une isométrie vectorielle et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par f, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par f.

Principe de démonstration. Commencer par prouver que $f(F) = F$.

Démonstration page 186

p.187

Exercice 3 Soit f une isométrie de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Prouver que l'endomorphisme induit par f sur F est orthogonal.

Proposition 5

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si, et seulement s'il transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée.

Démonstration page 187

Proposition 6

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Démonstration page 187

2 Isométries d'un espace euclidien de dimension 2

L'objet de ce qui suit est la description complète de $\mathcal{O}(E)$ lorsque E est un plan. Dans la suite, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Proposition 7

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

- appartient à $\mathcal{SO}(2)$ si, et seulement si, elle est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}\ ;$$
- appartient à $\mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2)$ si, et seulement si, elle est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 187

Dire que M est une matrice orthogonale signifie que ses deux colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, et que son déterminant vaut 1 dans un cas, -1 dans l'autre.

Terminologie Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de rotation d'angle** $\boldsymbol{\theta}$.

Proposition 8

Pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$R(\theta_1)\,R(\theta_2) = R(\theta_2)\,R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2).$$

Démonstration.
C'est une simple vérification calculatoire utilisant les formules trigonométriques d'addition. □

Remarques

- En particulier, deux éléments de $\mathcal{SO}(2)$ commutent.
- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{SO}(2) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) \end{array}$ est surjective, mais pas injective.

Proposition 9 (Isométries directes d'un plan vectoriel)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a $u \in \mathcal{SO}(E)$ si, et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta).$$

Le réel θ, unique à 2π près, ne dépend pas de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Il est appelé **angle de la rotation u**. On dit également que u est la **rotation d'angle θ**.

Démonstration page 188

p.188 **Exercice 4** Soit r une rotation d'angle θ. Déterminer la matrice de u dans une base orthonormale indirecte de E. Justifier que la matrice obtenue ne dépend pas de la base orthonormale indirecte choisie.

Proposition 10 (Isométries indirectes d'un plan vectoriel)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ si, et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est alors la réflexion par rapport à la droite vectorielle :

$$\mathrm{Vect}(v_\theta) \qquad \text{avec} \qquad v_\theta = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) e_2.$$

Principe de démonstration. Traduire le fait que la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale et de déterminant -1. Pour la seconde partie, s'intéresser aux sous-espaces propres de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration page 188

p.189 **Exercice 5** Montrer que toute rotation vectorielle de E peut s'écrire comme le produit de deux réflexions, la première étant choisie arbitrairement.

p.190 **Exercice 6** Déterminer les matrices de $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables.

3 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Proposition 11

Soit f est une isométrie d'un espace euclidien orienté de dimension 3.
Il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Démonstration page 190

p.191

Exercice 7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

p.191

Exercice 8 Soit θ un réel et $\vec{u}$ un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

On considère deux bases orthonormales directes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E commençant par $\vec{u}$, et f l'endomorphisme tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Prouver que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Grâce au résultat de cet exercice, on peut poser la :

Définition 2

Soit θ un réel et $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

On appelle **rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$**, l'isométrie dont la matrice dans toute base orthonormale directe commençant par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarques

- La rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par le vecteur $\vec{u}$ est aussi la rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $-\vec{u}$. L'angle θ n'est donc pas unique.
- Mais il y a unicité au signe près, puisque si r est une rotation d'angle θ, alors $\mathrm{Tr}\, r = 1 + 2\cos\theta$. L'exercice qui suit permet de déterminer ce signe, grâce au signe de $\sin\theta$.

p.191

Exercice 9

Soit r la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par le vecteur **unitaire** $\vec{u}$.

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à l'axe. Prouver que $r(\vec{v}) = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. Pour tout vecteur $\vec{v}$, montrer que $r(\vec{v}) = (1 - \cos\theta)\ (\vec{v} \cdot \vec{u})\ \vec{u} + \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3. En déduire que, pour tout $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$, le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, r(\vec{v})]$ est du signe de $\sin\theta$.

Remarque Le dernier résultat est très utile en pratique car comme $\cos\theta$ est facilement obtenu à l'aide de la trace, il suffit de connaître le signe de $\sin\theta$ pour déterminer θ. Ce résultat est conservé si $\vec{u}$ n'est pas unitaire.

Point méthode

Pour déterminer la direction et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice M dans une base orthonormée directe :

- on détermine la droite invariante et on en choisit un vecteur directeur $\vec{u}$;
- on détermine son angle non orienté θ avec la relation $\operatorname{Tr} M = 1 + 2\cos\theta$;
- on détermine l'angle de la rotation autour de l'axe dirigé par le vecteur $\vec{u}$ en utilisant la fait que $\sin\theta$ est du même signe que $\left[\vec{u}, \vec{v}, r(\vec{v})\right]$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple Soit r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que les colonnes C_1, C_2 et C_3 de M forment une base orthonormée, donc $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Comme plus $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$, on en déduit que $C_3 = C_1 \wedge C_2$ (et non pas $C_3 = -C_1 \wedge C_2$ qui était l'autre possibilité), donc $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Par suite, r est une rotation
Déterminons ses éléments géométriques caractéristiques (axe et angle).

L'axe de r, c'est-à-dire $E_1(r)$, est engendré par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'angle θ de la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{u}$ vérifie $1 + 2\cos\theta = \operatorname{Tr} M = 2$ donc $\theta \equiv \pm\pi/3 [2\pi]$. De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Ainsi, r est la rotation d'angle $-\pi/3$ autour de l'axe orienté par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

p.192 **Exercice 10** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Point méthode

Pour déterminer la matrice d'une rotation r, on peut :

- déterminer une base adaptée à r et effectuer un changement de base ;
- ou utiliser la formule de l'exercice 9 de la page 180 (en n'oubliant pas de prendre un vecteur unitaire pour diriger l'axe de rotation) : pour tout vecteur $\vec{v}$:

$$r(\vec{v}) = (1-\cos\theta)\ (\vec{v}\cdot\vec{u})\ \vec{u} + \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{u}\wedge\vec{v}.$$

Exemple Déterminons la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par $\vec{u} = (1,2,2)$.

Première méthode. On détermine une base adaptée à r et l'on effectue un changement de base.

Pour cela, construisons une base orthonormale dont le premier vecteur soit colinéaire à $\vec{u}$. On considère :

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ donc la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r est égale à :

$$\begin{pmatrix}1/3 & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}}\\ 2/3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ 2/3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire à $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-4&8\\8&4&1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

Deuxième méthode. On utilise la formule de l'exercice 9 de la page 180 : pour tout vecteur $\vec{v}$, on a $r(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u}')\ \vec{u}' + \vec{u}'\wedge\vec{v}$ où $\vec{u}' = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. En déterminant l'image des trois vecteurs de la base canonique $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on obtient le même résultat.

Par exemple, $r(\vec{e}_1) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$.

p.192 **Exercice 11** Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r d'angle $\pi/3$ et d'axe dirigé par $\vec{u} = (1,1,1)$.

II Endomorphismes et matrices symétriques

1 Généralités

Définition 3

Un endomorphisme u de E est dit **symétrique** s'il vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid y \,) = (\, x \mid u(y) \,).$$

Notation On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Exemple Toute homothétie est un endomorphisme symétrique.

p.193 **Exercice 12** Soit p une projection de E. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, p est symétrique.

p.193 **Exercice 13** Soit s une symétrie de E. Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est symétrique.

Proposition 12

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration page 194

Attention La composée de deux endomorphismes symétriques n'est pas, en général, un endomorphisme symétrique, comme le précise l'exercice suivant.

p.194 **Exercice 14** Soit u et v deux endomorphismes symétriques. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si, et seulement si, u et v commutent.

Proposition 13

Soit u un endomorphisme symétrique de E. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors :

- l'endomorphisme induit par u sur F est symétrique ;
- on a $u(F^\perp) \subset F^\perp$, *i.e.* l'orthogonal de F est également stable par u.

Démonstration page 194

Remarque Dans l'énoncé de la proposition précédente, le sous-espace vectoriel F est un espace euclidien, implicitement muni de la restriction à F^2 du produit scalaire de E.

Caractérisation matricielle

p.195

Exercice 15 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Montrer qu'un endomorphisme u est symétrique si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big(u(e_i) \mid e_j\big) = \big(e_i \mid u(e_j)\big). \qquad (\star)$$

Proposition 14

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Principe de démonstration. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, les coefficients de la matrice de u dans cette base s'interprètent comme des produits scalaires. Démonstration page 195

Attention Dans le résultat précédent, il est important que la base considérée soit orthonormale.

Exemple Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et si u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

- u est un endomorphisme symétrique car sa matrice dans la base canonique (qui est orthonormale) est symétrique ;
- en revanche, si l'on écrit la matrice de u dans la base $(e_1 + e_2, e_2)$, on obtient $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas une matrice symétrique.

Rappel

L'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 15

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. En notant $n = \dim E$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, on a $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

2 Réduction des endomorphismes symétriques

Dans ce qui suit, l'espace euclidien E est supposé de dimension $n \geqslant 1$. Le résultat de l'exercice suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème 16.

p.195

Exercice 16

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre éventuellement complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

   En considérant le produit matriciel ${}^t\overline{X}\, A\, X$, montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que tout endomorphisme symétrique de E possède au moins une valeur propre.

Théorème 16 (Théorème spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

Principe de démonstration. Raisonner par récurrence sur la dimension de E.
Pour l'hérédité, considérer un vecteur propre unitaire x et considérer l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$. Démonstration page 196

p.196

Exercice 17 Soit E un espace euclidien, s un endomorphisme symétrique de E et $k \in \mathbb{R}_+$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E \quad \|s(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ $\qquad$ (ii) $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(s) \quad |\lambda| \leqslant k$.

Corollaire 17 (Interprétation matricielle)

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice diagonale *réelle* D ainsi que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme u canoniquement associé à A est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Donc, d'après le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de u.
En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, la formule de changement de base donne :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

où D est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, donc est une matrice diagonale.
La matrice P étant une matrice de passage d'une base orthonormale vers une autre base orthonormale, elle appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. □

Remarque

Dans le résultat ci-dessus, comme $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1} = {}^tP$, et donc :

$$A = PD\,{}^tP.$$

Attention Dans le résultat ci-dessus, le fait que la matrice soit réelle est important : une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable.

p.197

Exercice 18 Justifier le « Attention » ci-dessus à l'aide de la matrice complexe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

p.197

Exercice 19 Démontrer que les symétries orthogonales sont les seuls endomorphismes à la fois symétriques et orthogonaux.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Soit f une isométrie vectorielle et λ une valeur propre. Considérons x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. On a alors $f(x) = \lambda x$ puis, comme f est une isométrie $\|x\| = \big\|f(x)\big\| = |\lambda|\|x\|$. Comme x n'est pas le vecteur nul, on en déduit que $|\lambda| = 1$, c'est-à-dire que $\lambda = \pm 1$. Ainsi $\operatorname{sp} u \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 1 Soit f une isométrie de E. Comme E est de dimension finie, f est un automorphisme si, et seulement s'il est injectif.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors $\|x\| = \big\|f(x)\big\| = 0$ donc $x = 0$. Par suite, f est un automorphisme.

On aurait aussi pu conclure à l'aide de l'exercice précédent en remarquant que $0 \notin \operatorname{sp} f$.

Proposition 2

- Si l'endomorphisme f conserve le produit scalaire, alors pour tout $x \in E$, on a :
$$\big\|f(x)\big\|^2 = \big(\, f(x) \mid f(x) \,\big) = (\, x \mid x \,) = \|x\|^2$$
ce qui prouve que f est une isométrie.
- Si f est une isométrie, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, une identité de polarisation donne :
$$\begin{aligned} 4\big(\, f(x) \mid f(y) \,\big) &= \big\|f(x) + f(y)\big\|^2 - \big\|f(x) - f(y)\big\|^2 \\ &= \big\|f(x+y)\big\|^2 - \big\|f(x-y)\big\|^2 \qquad \text{(linéarité de } f\text{)} \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 4(\, x \mid y \,). \end{aligned}$$
Ce qui prouve que l'endomorphisme f conserve le produit scalaire

Exercice 2 Montrons que F et G sont orthogonaux. Soit $(x, y) \in F \times G$. Alors :
$$(\, x \mid y \,) = \big(\, s(x) \mid s(y) \,\big) = (\, -x \mid y \,).$$
Par conséquent, $G \subset F^\perp$, puis $G = F^\perp$ pour des raisons de dimension.

Proposition 3

1. Si les endomorphismes f et g conservent la norme, il en est de même pour $f \circ g$.
2. Si l'endomorphisme f est orthogonal, alors, pour $x \in E$, on a :
$$\big\|f^{-1}(x)\big\| = \big\|f\left(f^{-1}(x)\right)\big\| = \|x\|$$
ce qui prouve que l'endomorphisme f^{-1} conserve la norme.

Proposition 4 Comme f est un automorphisme et que F est de dimension finie, on a $\dim f(F) = \dim F$. La stabilité de F par f implique donc $f(F) = F$.

Pour tout $y \in F$, on a :
$$\big(\, f(x) \mid f(y) \,\big) = (\, x \mid y \,) = 0,$$
ce qui prouve que $f(x) \in f(F)^\perp = F^\perp$.

Donc $F^\perp$ est stable par f.

Exercice 3

Pour tout $x \in F$, on a $\left\|f_{|F}(x)\right\| = \left\|f(x)\right\| = \|x\|$ donc $f_{|F}$ est une isométrie.

Proposition 5 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et f un endomorphisme de E.

- Si f est une isométrie vectorielle, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big(f(e_i) \mid f(e_j) \big) = (\, e_i \mid e_j \,) = \delta_{i,j}$$

  donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

- Supposons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une base orthonormée de E.

  Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$. On a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i)$ et puisque $f(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées :

$$\left\|f(x)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

  Donc f est une isométrie.

Proposition 6 Un endomorphisme f est orthogonal si, et seulement si, l'image de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale donc si, et seulement si, la matrice de passage de $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans $\mathcal{B}$ est orthogonale, c'est-à-dire si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Proposition 7

- Supposons $M \in \mathcal{O}(2)$. La famille (C_1, C_2) des colonnes de M est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
  * La première colonne C_1 est de norme 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

  * La deuxième colonne C_2 est orthogonale à la première. Or, le supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{R}^2$ de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(C_1)$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

    On en déduit que C_2 est proportionnelle à $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.
  * Enfin, comme $\|C_2\| = 1$, il n'y a que deux possibilités :

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

  La matrice M est donc l'une des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La première étant de déterminant 1 et la seconde de déterminant -1, ces deux matrices correspondent respectivement aux cas $M \in \mathcal{SO}(2)$ et $M \in \mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2)$.

- Réciproquement, il est facile de vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

appartiennent respectivement à $\mathcal{SO}(2)$ et à $\mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2)$.

Proposition 9

- D'après la proposition 6 de la page 178, l'endomorphisme u appartient à $\mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{O}(2)$. Comme de plus :

$$\det(u) = \det\big(M_{\mathcal{B}}(u)\big),$$

on en déduit que $u \in \mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}(2)$, *i.e.* est de la forme $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. L'unicité de θ à 2π près est évidente car :

$$\forall(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \quad R(\theta_1) = R(\theta_2) \iff \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \end{cases} \iff \theta_1 \equiv \theta_2 \,[2\pi].$$

- Il reste à prouver que θ ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, la formule de changement de base donne :

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}\, M_{\mathcal{B}}(u)\, P.$$

Comme les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même sens, la matrice de passage P appartient à $\mathcal{SO}(2)$, donc est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La matrice P commute donc avec $R(\theta)$, d'où le résultat.

Exercice 4

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale indirecte de E.
  La famille $(e_1, -e_2)$ est alors une base orthonormale directe de E, dans laquelle la matrice de u est la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
  On obtient alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta).$$

- La matrice $R(-\theta)$ obtenue ne dépend pas de la base orthonormale indirecte choisie car, d'après la proposition 9 de la page 179, la matrice $R(\theta)$ de r dans la base $(e_1, -e_2)$ ne dépend pas de la base orthonormale directe $(e_1, -e_2)$.

Proposition 10

- La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale de déterminant -1, donc, d'après la proposition 7 de la page 178, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Le polynôme caractéristique de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est :

  $$\chi_{M_{\mathcal{B}}(u)} = X^2 - 1 = (X+1)(X-1).$$

  Par suite, l'endomorphisme u est diagonalisable et l'on a :

  $$E = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E).$$

  À ce stade, on sait déjà que u est une symétrie. L'étude des deux sous-espaces propres de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ nous donne deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 :

  $$V_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},$$

  ce qui donne, vis-à-vis de u, deux vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement :

  $$v_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2 \quad \text{et} \quad v_{-1} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2.$$

  Comme les vecteurs v_1 et v_{-1} sont orthogonaux, on en déduit que u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(v_1)$.
  Remarque. Ce vecteur v_1 est le même que le vecteur v_θ introduit dans l'énoncé de la proposition.

Exercice 5 Soit r_θ une rotation de E d'angle θ. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. On sait que la matrice de r_θ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(r_\theta) = M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Il s'agit alors de trouver deux réflexions s_1 et s_2 telles que la matrice de $s_2 \circ s_1$ dans la base $\mathcal{B}$ soit $M(\theta)$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, deux réflexions s_1 et s_2 ont des matrices dans la base $\mathcal{B}$ de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(s_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(s_2) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, la composée $s_2 \circ s_1$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(s_2 \circ s_1) = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suffit de choisir (α, β) tel que $\beta - \alpha \equiv \theta\,[2\pi]$ pour avoir $s_2 \circ s_1 = r_\theta$.
On peut donc choisir α comme on souhaite (ce qui revient à choisir la réflexion s_1 comme on souhaite), et fixer β (c'est-à-dire s_2) en fonction.

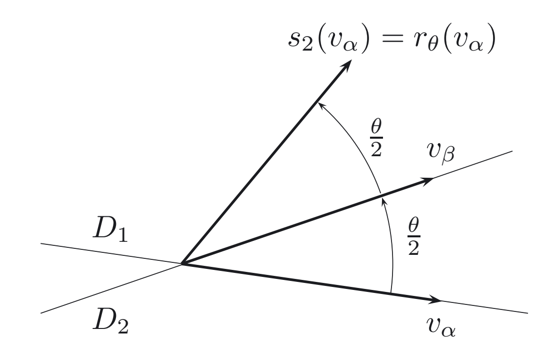
Remarque

En reprenant les notations de la proposition 10 de la page 179, s_1 et s_2 sont les réflexions par rapport aux droites :

$$D_1 = \mathrm{Vect}(v_\alpha) \quad \text{et} \quad D_2 = \mathrm{Vect}(v_\beta)$$

où v_α et v_β ont respectivement pour composantes dans la base orthonormale directe $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$



La condition $\beta \equiv \alpha + \theta\,[2\pi]$ signifie alors que l'on passe de la droite D_1 à la droite D_2 par rotation d'angle $\frac{\theta}{2}$.

Au passage, signalons une manière plus géométrique de justifier que la composée $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle θ :

- tout d'abord, $s_2 \circ s_1$ est une isométrie vectorielle directe, *i.e.* une rotation, car c'est la composée de deux isométries vectorielles indirectes ;
- il reste à déterminer l'angle de cette rotation ; pour cela, il suffit de déterminer l'image par $s_2 \circ s_1$ du vecteur v_α ; ce vecteur est invariant par la symétrie s_1, et son image par s_2 n'est rien d'autre que $r_\theta(v_\alpha)$.

Exercice 6 Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

- Supposons que $M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

  Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est donc $\chi_M(X) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$ dont le discriminant vaut $-4\sin^2\theta$. Ainsi :
  - si $\theta \neq 0[\pi]$, alors m ne possède pas de valeur propre réelle donc n'est pas diagonalisable ;
  - si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $M = I_2$ est diagonalisable ;
  - si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, alors $M = -I_2$ est diagonalisable.
- Supposons que $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

  Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est donc $\chi_M(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Il est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc M est diagonalisable. Dans ce cas, M est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 11 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, notons :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f étant de degré 3, il possède au moins une racine réelle λ donc λ est une valeur propre de f ; d'après l'exercice 1, elle est égale à ± 1. Considérons un vecteur propre u associé à λ. D'après la proposition 4 de la page 177, le plan $P = (\mathbb{R}u)^{\perp}$ est stable par f. L'endomorphisme induit par f sur P est alors orthogonal d'après l'exercice 3 de la page 177.

- Si $f_{|P}$ est une rotation, alors , dans une base orthonormée adaptée (en complétant $\frac{u}{\|u\|}$ avec une base orthonormale directe de P), la matrice de f est égale à $A(\theta)$ ou $B(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- Si $f_{|P}$ est une réflexion, alors, dans une base orthonormée adaptée (e_1, e_2, e_3), la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  * Si $\lambda = 1$, alors dans la base (e_3, e_1, e_2) la matrice de f égale à la matrice diagonale $B(0)$.
  * Si $\lambda = -1$, alors dans la base (e_2, e_3, e_1) la matrice de f égale à la matrice diagonale $A(\pi)$.

Dans tous les cas, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ dans laquelle la matrice de f est $A(\theta)$ ou $B(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{B}$ n'est pas directe, alors $\mathcal{B}' = (-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ l'est et la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est la même que celle dans $\mathcal{B}$.

Exercice 7 On a $A^{-1} = {}^tA(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2', e_3')$ sont orthonormales directes, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

De plus, $\mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2', e_3') = (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$ donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad \text{Par suite :}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne, grâce à la proposition 8 de la page 178, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 9

1. On pose $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, de sorte que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{w})$ soit une base orthonormale directe. Ainsi, la matrice de r dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
   donc $r(\vec{w}) = \cos\theta\,\vec{w} + \sin\theta\,\vec{u} \wedge \vec{w}$ puis $r(\vec{v}) = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. On décompose le vecteur $\vec{v}$ en $\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u}}_{\in \mathbb{R}\vec{u}} + \underbrace{\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u}}_{\in (\mathbb{R}\vec{u})^{\perp}}$. Les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ étant invariants, la linéarité de r et la question précédente donnent :
$$r(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + \cos\theta\,(\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u}) + \sin\theta\,\vec{u}\wedge(\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u}),$$
donc $r(\vec{v}) = (1-\cos\theta)\,(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{u}\wedge\vec{v}$
3. Soit $\vec{v}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{u}$. D'après la question précédente et les propriétés du produit vectoriel, on a :
$$\begin{aligned}\big[\vec{u},\vec{v},r(\vec{v})\big] &= \big[\vec{u},\vec{v},(1-\cos\theta)\,(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u}+\cos\theta\,\vec{v}+\sin\theta\,\vec{u}\wedge\vec{v}\big]\\ &= \big[\vec{u},\vec{v},\sin\theta\,\vec{u}\wedge\vec{v}\big] = \|\vec{v}\|^2\left[\vec{u},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},\sin\theta\,\vec{u}\wedge\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right] = \sin\theta\|\vec{v}\|^2,\end{aligned}$$
car la famille $\left(\vec{u},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},\sin\theta\,\vec{u}\wedge\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$ est une base orthonormale directe. Par suite, le signe de $\sin\theta$ est celui de $\big[\vec{u},\vec{v},r(\vec{v})\big]$.

Exercice 10 Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $\det M = 1$ donc $M \in \mathcal{SO}_3(R)$ et r est une rotation.

La droite invariante par M est engendrée par $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. L'angle θ de la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{u}$ vérifie $1+2\cos\theta = \operatorname{Tr} M = -1$ donc $\theta \equiv \pm\pi/2[2\pi]$. De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&-\sqrt{2}\\-1&0&-\sqrt{2}\end{vmatrix} = 2\sqrt{2}$.

Ainsi, r est la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe orienté par $\vec{u}$.

Exercice 11 **Première méthode.** On détermine une base adaptée à r et l'on effectue un changement de base.

Pour cela, construisons une base orthonormale dont le premier vecteur soit colinéaire à $\vec{u}$. On considère :
$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}$ donc la la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r est égale à :
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&-2\\\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\-2&1&1\end{pmatrix},$$
c'est-à-dire à $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

Deuxième méthode. On utilise la formule de l'exercice 9 : pour tout vecteur $\vec{v}$, on a $r(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{u}'\,\vec{u}' + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{u}'\wedge\vec{v}$ où $\vec{u}' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. En déterminant l'image des trois vecteurs de la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on obtient le même résultat.

Par exemple, $r(\vec{e}_1) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 12 Soit F et G les deux sous-espaces supplémentaires dans E tels que p soit la projection sur F parallèlement à G. Pour tout vecteur x de E s'écrivant $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, on a donc $p(x) = x_1$.

- Supposons que p soit une projection orthogonale, c'est-à-dire que F et G soient supplémentaires orthogonaux. Soit $(x, y) \in E^2$. En écrivant :
$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad y = y_1 + y_2 \qquad \text{avec} \qquad (x_1, y_1, x_2, y_2) \in F^2 \times G^2,$$
on a :
$$\big(p(x) \;\big|\; y\big) = (x_1 \mid y_1 + y_2) = (x_1 \mid y_1) + \underbrace{(x_1 \mid y_2)}_{=0 \text{ car } G = F^\perp}$$
$$\big(x \;\big|\; p(y)\big) = (x_1 + x_2 \mid y_1) = (x_1 \mid y_1) + \underbrace{(x_2 \mid y_1)}_{=0 \text{ car } F = G^\perp}.$$
On obtient donc $\big(p(x) \;\big|\; y\big) = \big(x \;\big|\; p(y)\big)$, ce qui prouve que p est un endomorphisme symétrique.
- Réciproquement, si p est symétrique, alors, pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a :
$$\big(p(x) \;\big|\; y\big) = \big(x \;\big|\; p(y)\big) \quad \text{ce qui donne} \quad (x \mid y) = (x \mid 0) = 0,$$
et donc $x \perp y$. Comme x et y ont été pris quelconques dans F et G respectivement, on obtient que F et G sont orthogonaux, c'est-à-dire que p est une projection orthogonale.

Exercice 13 Soit F et G les deux sous-espaces supplémentaires dans E tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Pour tout vecteur x de E s'écrivant $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, on a donc $s(x) = x_1 - x_2$.

- Supposons que s soit une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que F et G soient supplémentaires orthogonaux. Soit $(x, y) \in E^2$. Écrivons :
$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad y = y_1 + y_2 \qquad \text{avec} \qquad (x_1, y_1, x_2, y_2) \in F^2 \times G^2.$$
Comme F et G sont supplémentaires orthogonaux, on a $x_1 \perp y_2$ et $x_2 \perp y_1$.
On en déduit les deux calculs suivants :
$$\big(s(x) \;\big|\; y\big) = (x_1 - x_2 \mid y_1 + y_2) = (x_1 \mid y_1) - (x_2 \mid y_2)$$
$$\big(x \;\big|\; s(y)\big) = (x_1 + x_2 \mid y_1 - y_2) = (x_1 \mid y_1) - (x_2 \mid y_2).$$
On obtient donc $\big(s(x) \;\big|\; y\big) = \big(x \;\big|\; s(y)\big)$, ce qui prouve que s est un endomorphisme symétrique.

- Réciproquement, si s est symétrique, alors, pour tout $(x,y) \in F \times G$, on a :
$$\big(\, s(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, x \,\big|\, s(y) \,\big) \qquad \text{ce qui donne} \qquad (\, x \mid y \,) = (\, x \mid -y \,),$$
d'où l'on déduit $(\, x \mid 2y \,) = 0$, *i.e.* $x \perp y$. Comme x et y ont été pris quelconques dans F et G respectivement, on obtient que F et G sont orthogonaux, c'est-à-dire que s est une symétrie orthogonale.

Proposition 12 L'endomorphisme nul est évidemment un endomorphisme symétrique. Il reste à prouver qu'une combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques est symétrique. Soit u et v deux endomorphismes symétriques de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :
$$\begin{aligned}
\big(\, (\lambda u + v)(x) \,\big|\, y \,\big) &= \big(\, \lambda u(x) + v(x) \,\big|\, y \,\big) \\
&= \lambda \big(\, u(x) \,\big|\, y \,\big) + \big(\, v(x) \,\big|\, y \,\big) && \text{(linéarité / 1}^{\text{re}} \text{ variable)} \\
&= \lambda \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big) + \big(\, x \,\big|\, v(y) \,\big) && (u \text{ et } v \text{ sont symétriques}) \\
&= \big(\, x \,\big|\, \lambda u(y) + v(y) \,\big) && \text{(linéarité / 2}^{\text{e}} \text{ variable)} \\
&= \big(\, x \,\big|\, (\lambda u + v)(y) \,\big),
\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Exercice 14 Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :
$$\begin{aligned}
\big(\, (u \circ v)(x) \,\big|\, y \,\big) &= \big(\, u\big(v(x)\big) \,\big|\, y \,\big) \\
&= \big(\, v(x) \,\big|\, u(y) \,\big) && (u \text{ est symétrique}) \\
&= \big(\, x \,\big|\, v\big(u(y)\big) \,\big) && (v \text{ est symétrique}) \\
&= \big(\, x \,\big|\, (v \circ u)(y) \,\big).
\end{aligned}$$
En revenant à la définition d'un endomorphisme symétrique puis en utilisant la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable, on obtient que $u \circ v$ est un endomorphisme symétrique si, et seulement si :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(\, x \,\big|\, (u \circ v - v \circ u)(y) \,\big) = 0,$$
ce qui se reformule :
$$\forall y \in E \quad (u \circ v - v \circ u)(y) \in E^{\perp} = \{0\},$$
et traduit finalement le fait que u et v commutent.

Proposition 13 Soit F un sous-espace stable par u.

- Le fait que u soit symétrique s'écrit :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(\, u(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big),$$
ce qui donne en particulier :
$$\forall (x,y) \in F^2 \quad \big(\, u(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big).$$
Autrement dit, en notant $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F :
$$\forall (x,y) \in F^2 \quad \big(\, \tilde{u}(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, x \,\big|\, \tilde{u}(y) \,\big).$$
Donc $\tilde{u}$ est un endomorphisme symétrique.

- Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $u(x) \in F^\perp$. Pour cela, donnons-nous $y \in F$ et prouvons que $\big(u(x) \mid y\big) = 0$. Comme u est un endomorphisme symétrique, on a :

$$\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big).$$

Comme F est stable par u, on a $u(y) \in F$. Comme $x \in F^\perp$, on a $\big(x \mid u(y)\big) = 0$, ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 15 Soit u un endomorphisme de E.

- Si u est symétrique, alors on obtient immédiatement la propriété $(\star)$ en appliquant la définition avec les vecteurs e_i et e_j.
- Réciproquement, supposons la propriété $(\star)$ vérifiée. Soit $(x,y) \in E^2$.

Écrivons $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Par linéarité de u et par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\big(u(x) \mid y\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, \big(u(e_i) \mid e_j\big)$$

$$\big(x \mid u(y)\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, \big(e_i \mid u(e_j)\big).$$

La propriété $(\star)$ vérifiée par u donne alors $\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big)$, ce qui prouve que u est un endomorphisme symétrique.

Proposition 14 Écrivons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$; notons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ forment la j-ème colonne de la matrice A. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, la composante de $u(e_j)$ selon e_i vaut $\big(u(e_j) \mid e_i\big)$. On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big(u(e_j) \mid e_i\big) = a_{i,j}. \qquad (\diamond)$$

De plus d'après l'exercice 15, l'endomorphisme u est symétrique si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big(u(e_i) \mid e_j\big) = \big(e_i \mid u(e_j)\big),$$

ce qui s'interprète, d'après la relation $(\diamond)$, par le fait que la matrice A est symétrique.

Exercice 16

1. Par hypothèse, on a $AX = \lambda X$. Un premier calcul donne donc :

$$ {}^t\overline{X}\, A\, X = {}^t\overline{X}\, (\lambda X) = \lambda\, {}^t\overline{X}\, X$$

Comme A est à coefficients réels, la relation $AX = \lambda X$ donne $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, et comme A est symétrique, on a ${}^tA\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.
On en déduit que :

$$ {}^t\overline{X}\, A\, X = {}^t({}^tA\,\overline{X})\, X = {}^t(\overline{\lambda}\,\overline{X})\, X = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}\, X.$$

On en déduit que $\lambda\,{}^t\overline{X}\,X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X$, autrement dit $(\lambda-\overline{\lambda})\,{}^t\overline{X}\,X = 0$.
En notant $(x_1,\dots,x_n)$ les composantes de X, on a :

$$ {}^t\overline{X}\,X = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \neq 0 \quad \text{car} \quad X \neq 0. $$

On en déduit finalement que $\overline{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, alors la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ où n désigne la dimension de E. Comme E n'est pas l'espace nul, on a $n \geqslant 1$. La matrice A, vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, possède donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, cette valeur propre λ est en fait réelle, et est donc également une valeur propre de l'endomorphisme u.

Théorème 16 Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$.

- Le résultat est évident si $n = 1$: tout vecteur unitaire de E constitue alors une base orthonormale de vecteurs propres pour u.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$. Soit donc E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u un endomorphisme symétrique de E. Montrons qu'il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.
  - ∗ D'après le résultat de l'exercice 16 de la page 184, u possède au moins une valeur propre λ. Soit x un vecteur propre associé. Comme x est non nul, on peut, quitte à le diviser par sa norme, le supposer unitaire.
  - ∗ Comme $\mathrm{Vect}(x)$ est un sous-espace stable par u, la proposition 13 de la page 183 assure que son supplémentaire orthogonal l'est aussi, et l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $\mathrm{Vect}(x)^\perp$ est encore un endomorphisme symétrique.
  - ∗ Comme $\mathrm{Vect}(x)^\perp$ est de dimension n, l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathrm{Vect}(x)^\perp$ constituée de vecteurs propres de $\tilde{u}$.
  - ∗ La famille $(x,e_1,\dots,e_n)$ est alors une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u. D'où le résultat.

Exercice 17 Supposons (i) et considérons $\lambda \in \mathrm{sp}(s)$. Il existe alors un vecteur x non nul tel que $s(x) = \lambda x$ donc $|\lambda|\|x\| = \big\|s(x)\big\| \leqslant k\|x\|$ puis en simplifiant par $\|x\| > 0$, on obtient $|\lambda| \leqslant k$.

Réciproquement, supposons (ii). Comme s est symétrique, il existe d'après le théorème spectral, une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de s. Notons $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ les valeurs propres associées.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $s(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ donc, en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$ \big\|s(x)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2\|x\|^2. $$

Les quantités considérées étant positives, on obtient donc $\big\|s(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.

Exercice 18 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^2,$$

on a donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$. Possédant 0 comme unique valeur propre et n'étant pas nulle, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 19

- Il a déjà été vu qu'une symétrie orthogonale est à la fois une isométrie et un endomorphisme symétrique (*cf.* exercice 13 de la page 183).
- Réciproquement, supposons que u soit à la fois une isométrie et un endomorphisme symétrique. Comme u est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a :

  $$u(e_k) = \lambda_k\, e_k \quad \text{et donc} \quad \big\|u(e_k)\big\| = |\lambda_k|\, \|e_k\| = |\lambda_k|.$$

  Or, comme u est une isométrie, on a $\big\|u(e_k)\big\| = \|e_k\| = 1$.
  On en déduit que $|\lambda_k| = 1$, c'est-à-dire $\lambda_k \in \{-1, 1\}$.
  Quitte à réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on obtient donc une matrice de la forme suivante :

  $$M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & -I_{n-p} \end{array}\right).$$

  Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on en déduit que u est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

S'entraîner et approfondir

4.1 Prouver que l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$P = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

est une projection orthogonale.

4.2 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de :

1. la symétrie orthogonale s par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 2)$;
2. la rotation r_1 d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par $\vec{u} = (0, 1, -1)$.

4.3 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.4 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et décrire l'endomorphisme f.

4.5 Soit x et y deux vecteurs de même norme d'un espace euclidien E, avec $x \neq y$.

Montrer qu'il existe une unique réflexion de E (c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) échangeant x et y.

4.6 Étant donné deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A et B sont **orthosemblables** s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tP\,A\,P$.

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthosemblable à une matrice dont les deux coefficients diagonaux sont égaux.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et l'on note (e_1, e_2) la base canonique. Justifier que l'application :

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \big(u(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2) \,\big|\, \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2\big) \end{array}$$

est continue.

2. Montrer qu'il existe $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(\theta) = \dfrac{\operatorname{Tr} M}{2}\cdot$
3. Conclure.
   Cet résultat sera prolongé dans l'exercice 6.12 de la page 303.

4.7 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u est un endomorphisme symétrique.
2. En déduire que si F est un sous-espace de E stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

4.8 1. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) toute valeur propre de u est positive ;

(ii) $\forall x \in E \quad \big(x \mid u(x)\big) \geqslant 0$.

Terminologie. L'endomorphisme symétrique u est alors dit **positif**.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) toute valeur propre de A est positive ;

(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX \geqslant 0$;

Terminologie. La matrice symétrique réelle A est alors dite **positive**.

4.9 Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive (*cf.* exercice 4.8) si, et seulement s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.

⋆ **4.10** Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique positif de E (*cf.* exercice 4.8). Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique positif r de E vérifiant $r^2 = u$.

4.11 1. Soit deux familles $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de p vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n, vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad (\, x_i \mid x_j\,) = (\, y_i \mid y_j\,).$$

Montrer qu'il existe une isométrie u de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad u(x_i) = y_i.$$

2. Que peut-on dire de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA\,A = {}^tB\,B$?

4.12 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(u(x) \bigm| y\big) = \big(x \bigm| u^*(y)\big).$$

L'endomorphisme u^* est appelé l'**adjoint** de u.

2. Déterminer $(u^*)^*$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit symétrique.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit une isométrie.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

4.13 Soit $(E, (\,.\,|\,.\,))$ un espace euclidien et $f : E \to E$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(f(x) \,\big|\, f(y)\big) = (\,x \mid y\,).$$

1. Montrer que f envoie toute base orthonormée de E sur une base orthonormée de E.
2. Montrer que f est linéaire.

4.14 Soit $(E, (\,.\,|\,.\,))$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\,x \mid y\,) = 0 \Rightarrow \big(f(x) \,\big|\, f(y)\big) = 0.$$

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E.

1. Que peut-on dire de la famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$?
2. En calculant le produit scalaire $\big(f(e_i) + f(e_j) \,\big|\, f(e_i) - f(e_j)\big)$ de deux façons différentes, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E \quad \big\|f(x)\big\| = a\|x\|$.
3. En déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

4.15 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (1) $\forall x \in E \quad \big(x \,\big|\, u(x)\big) = 0$;
   (2) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(u(x) \,\big|\, y\big) = -\big(x \,\big|\, u(y)\big)$.
2. Montrer que deux quelconques des trois propositions suivantes impliquent la troisième :
   (i) u est une isométrie ;
   (ii) $u^2 = -\operatorname{Id}$;
   (iii) $\forall x \in E \quad \big(x \,\big|\, u(x)\big) = 0$.

Solution des exercices

4.1 On vérifie aisément que $P^2 = P$ donc p est une projection. Comme il s'agit de la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$, il reste à prouver que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux.

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} p &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

et, après résolution du système associé, $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, on en déduit que p est une projection orthogonale.

4.2 1. Pour tout vecteur $\vec{v}$, on a $s(\vec{v}) = 2\ (\vec{v} \cdot \vec{u}')\ \vec{u}' - \vec{v}$ où $\vec{u}' = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, ce qui permet d'obtenir $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En procédant de même que dans l'exemple de la page 182, on obtient :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 On vérifie que les colonnes de M forment une base orthonormale et que $\det M = 1$ donc l'endomorphisme r canoniquement associé à M est une rotation.

Un vecteur invariant est $\vec{u} = (1, 2, 2)$. L'angle θ de la rotation r autour de l'axe dirigé par $\vec{u}$ vérifie $1 + 2\cos\theta = \operatorname{Tr} M = 1$ donc $\theta \equiv \pm\pi/2 [2\pi]$. De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24$.

Ainsi, r est la rotation d'angle $-\pi/2$ autour de l'axe orienté par $\vec{u}$.

4.4 On trouve $A^2 = 9\,I_3$.

On en déduit que la matrice $S = \dfrac{1}{3}A$ vérifie $S^2 = I_3$, c'est donc une matrice de symétrie. Comme d'autre part A est symétrique, la matrice S l'est aussi.
On en déduit que S est une matrice de symétrie orthogonale (*cf.* exercice 13 de la page 183). Pour la décrire complètement, il s'agit d'expliciter $\mathrm{Ker}(S - I_3)$.
Après calculs, on obtient :

$$\mathrm{Ker}(S - I_3) = \mathrm{Vect}(u) \quad \text{avec} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, l'application f est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ et de l'homothétie vectorielle de rapport 3.

4.5 Procédons par analyse-synthèse. Notons n la dimension de E.

- *Analyse.* Supposons que s soit une réflexion de E échangeant x et y, c'est-à-dire vérifiant $s(x) = y$ et $s(y) = x$. Il est alors clair que $x - y$ est vecteur propre pour s associé à la valeur propre -1. D'autre part, comme s est une réflexion, les deux sous-espace $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E et l'on a $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = n - 1$. On a donc nécessairement :

  $$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(x - y) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(x - y)^{\perp}.$$

  Autrement dit, s est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x - y)^{\perp}$.

- *Synthèse.* Réciproquement, considérons la réflexion s par rapport à $\mathrm{Vect}(x-y)^{\perp}$. On a :

  $$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \big(\mathrm{Vect}(x - y)^{\perp}\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(x - y).$$

  Comme les vecteurs x et y ont même norme, on a :

  $$(\, x - y \mid x + y \,) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x + y \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E).$$

  Par suite, l'écriture :

  $$x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2}$$

  entraîne que :

  $$s(x) = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = y.$$

  Puisque $s^2 = \mathrm{Id}_E$, on a ensuite $s(y) = s^2(x) = x$.
  Donc, la réflexion s échange x et y.

4.6 1. On peut calculer $h(\theta) = a\cos^2\theta + (b + c)\sin\theta\cos\theta + d\sin^2\theta$ pour prouver la continuité de h, mais on peut aussi raisonner de la façon suivante en utilisant les résultats du chapitre 6.

- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \end{array}$ est continue puisque ses deux applications composantes dans la base (e_1, e_2), qui ne sont rien d'autre que $\cos$ et $\sin$, sont continues.
- L'application u est continue car elle est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie.

- L'application produit scalaire est continue car c'est une application bilinéaire dont l'espace de départ est de dimension finie.

Donc, par opérations sur les fonctions continues, l'application h est continue.

2. On a $h(0) = \big(u(e_1) \mid e_1 \big) = a$ et $h\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \big(u(e_2) \mid e_2 \big) = d$.

   Comme le réel $\dfrac{\operatorname{Tr} M}{2} = \dfrac{a+d}{2}$ est compris entre a et d, et que l'application h est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\theta \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ tel que $h(\theta) = \dfrac{\operatorname{Tr} M}{2}\cdot$

3. - Fixons $\theta \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ tel que $h(\theta) = \dfrac{\operatorname{Tr} M}{2}\cdot$

     Notons $\tilde{e}_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. Alors, en posant $\tilde{e}_2 = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$, la famille $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Notons $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$. Comme la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est orthonormée, on a :

     $$\tilde{a} = \big(u(\tilde{e}_1) \mid \tilde{e}_1 \big) \quad \text{et donc} \quad \tilde{a} = h(\theta) = \frac{\operatorname{Tr} M}{2}\cdot$$

     De plus, comme M et $\widetilde{M}$ représentent toutes deux l'endomorphisme u, elles ont même trace :

     $$\tilde{a} + \tilde{d} = \operatorname{Tr}(\widetilde{M}) = \operatorname{Tr}(M).$$

     On en déduit qu'on a finalement $\tilde{d} = \dfrac{\operatorname{Tr} M}{2} = \tilde{a}$; les deux coefficients diagonaux de la matrice $\widetilde{M}$ sont donc égaux.
   - Pour obtenir le résultat souhaité, il reste à justifier que les deux matrices M et $\widetilde{M}$ sont orthosemblables. Ces deux matrices sont liées par la relation :

     $$\widetilde{M} = P^{-1}\, M\, P$$

     où P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers la base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$. Comme ces deux bases sont orthonormées, on a $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, et $P^{-1} = {}^tP$.
     D'où le résultat.

4.7 1. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on peut considérer $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u. S'il existe un produit scalaire sur E pour lequel la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors l'endomorphisme u sera symétrique pour ce produit scalaire car possèdera une base orthonormée de vecteurs propres.
   Un tel produit scalaire existe et on peut le définir explicitement en posant, pour tout $(x, y) \in E^2$:

   $$(\, x \mid y \,) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k,$$

   où $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont les composantes respectives des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$.

2. Munissons E d'un produit scalaire pour lequel u est symétrique. Alors, on sait que l'endomorphisme induit par u sur F est aussi symétrique (*cf.* proposition 13). Alors, par le théorème spectral, cet endomorphisme induit est diagonalisable.

4.8 1. • Supposons (i) et montrons (ii). Comme u est un endomorphisme symétrique, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une telle base, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Par hypothèse, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i \geqslant 0.$$

Sot $x \in E$. Décomposons x dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Par linéarité de u, on a :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k e_k.$$

Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a alors :

$$\big(x \mid u(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k\, x_k^2}_{\geqslant 0} \quad \text{et donc} \quad \big(x \mid u(x)\big) \geqslant 0.$$

• Supposons (ii) et montrons (i).

Soit λ une valeur propre de u ; soit x un vecteur propre associé. On a alors :

$$\big(x \mid u(x)\big) = (x \mid \lambda x) = \lambda\, \|x\|^2.$$

D'après (ii), on a donc $\lambda\, \|x\|^2 \geqslant 0$. Comme de plus $\|x\| > 0$ car x est non nul, on en déduit $\lambda \geqslant 0$.

2. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Comme A est symétrique, u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

• On a alors $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(u)$, donc l'assertion (i) n'est qu'une reformulation de l'assertion (i) de la première question.

• Pour $x \in \mathbb{R}^n$, si l'on note X la matrice de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors on a :

$$\big(x \mid u(x)\big) = {}^tX\,(AX) = {}^tX\,A\,X.$$

Par suite l'assertion (ii) n'est que la formulation matricielle de l'assertion (ii) de la question précédente.

En conséquence, l'équivalence entre (i) et (ii) découle de la question précédente.

4.9 • Supposons que A s'écrive $A = {}^tMM$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

∗ D'une part, on a :

$${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = A,$$

donc A est symétrique.

∗ D'autre part, pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$${}^tX\,A\,X = {}^tX\,{}^tM\,M\,X = {}^t(MX)\,(MX) = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \qquad \text{avec} \quad MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Comme les coefficients y_k sont réels, on en déduit que ${}^tX\,A\,X \geqslant 0$.

Donc, d'après l'exercice 4.8 de la page 199, la matrice A est positive.

- Supposons que A soit symétrique positive. Comme A est symétrique réelle, et d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que $A = P\,\Delta\,P^{-1}$.
  * Puisque $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1} = {}^tP$.
  * La matrice A étant positive, toutes ses valeurs propres sont positives. Ainsi on peut poser, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

    En notant alors δ la matrice diagonale $\delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, on a $\delta^2 = \Delta$ et puisque δ est symétrique, on a aussi ${}^t\delta\,\delta = \Delta$.

  On constate alors qu'en posant $M = \delta\,{}^tP$, on a :

$$ {}^tM\,M = {}^t(\delta\,{}^tP)\,(\delta\,{}^tP) = P\,{}^t\delta\,\delta\,{}^tP = A. $$

4.10 Raisonnons par analyse-synthèse.

- Soit r un endomorphisme symétrique positif de E vérifiant $r^2 = a$.
  Comme l'endomorphisme a est symétrique, a est diagonalisable.
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de a, on a :

$$ E = E_{\lambda_1}(a) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(a). $$

  Comme $r^2 = a$, les endomorphismes a et r commutent. Par suite, chaque sous-espace propre de a est stable par r. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, notons r_k l'endomorphisme induit par r sur $E_{\lambda_k}(a)$.
  Puisque r est un endomorphisme symétrique, chaque endomorphisme induit r_k est aussi symétrique (*cf.* proposition 13 de la page 183), donc diagonalisable.
  De plus, si μ est valeur propre de r_k, et si x est un vecteur propre associé, alors on a :

$$ r_k(x) = \mu\,x \qquad \text{puis} \qquad \mu^2\,x = r_k^2(x) = a(x) = \lambda\,x $$

  et donc, comme $x \neq 0$, on obtient $\mu^2 = \lambda_k$. Comme on a de plus par hypothèse $\mathrm{sp}(r) \subset \mathbb{R}_+$, on en déduit que $\mu = \sqrt{\lambda_k}$. Par suite, l'endomorphisme r_k est diagonalisable et vérifie $\mathrm{sp}(r_k) \subset \{\sqrt{\lambda_k}\}$. On a donc nécessairement :

$$ r_k = \sqrt{\lambda_k}\;\mathrm{Id}_{E_{\lambda_k}(a)}\,. $$

  Puisque $E = E_{\lambda_1}(a) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(a)$, l'endomorphisme r est entièrement caractérisé par ses endomorphismes induits r_k pour $k \in [\![1,p]\!]$.
  On a ainsi prouvé l'unicité de r.
- *Synthèse.* Réciproquement, l'endomorphisme r défini par :

$$ \forall k \in [\![1,p]\!] \quad r_{|E_{\lambda_k}(a)} = \sqrt{\lambda_k}\,\mathrm{Id}_{E_{\lambda_k}(a)} $$

  est symétrique, car il est diagonalisable dans toute base orthonormée formée de vecteurs propres pour a, il vérifie $\mathrm{sp}(r) = \left\{\sqrt{\lambda_k}\,;\ k \in [\![1,p]\!]\right\} \subset \mathbb{R}_+$, et est tel que $r^2 = a$.

4.11 1. Soit V le sous-espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et d sa dimension. Quitte à réindexer, on peut supposer que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une base de V.

- Commençons par montrer un résultat préliminaire : si $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est un famille de réels, alors $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\, x_i\right\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\, y_i\right\|$. En effet, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\, x_i\right\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p}\lambda_i\,\lambda_j\,(\,x_i \mid x_j\,) \quad = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p}\lambda_i\,\lambda_j\,(\,y_i \mid y_j\,) = \left\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\, y_i\right\|^2.$$

- Montrons que $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une base de W, le sous-espace vectoriel engendré par les $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

  Pour tout $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant d}\in \mathbb{R}^d$, on a $\left\|\sum\limits_{i=1}^{d}\lambda_i y_i\right\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{d}\lambda_i x_i\right\|$ d'après ce qui précède, donc la liberté de la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ découle de celle de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$. On démontre exactement de la même manière qu'une égalité de la forme $x_i - \sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k x_k = 0$ implique $y_i - \sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k y_k = 0$; ce qui prouve que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ engendre W. Il s'agit donc d'une base de W qui est donc de dimension d.
- Considérons une base orthonormée $(x'_{d+1},\dots,x'_n)$ de $V^\perp$, une base orthonormée $(y'_{d+1},\dots,y'_n)$ de $W^\perp$ et considérons l'endomorphisme u telle que :

$$\forall i\in [\![1,d]\!] \quad u(x_i)=y_i \qquad \text{et} \qquad \forall i\in [\![d+1,n]\!] \quad u(x'_i)=y'_i.$$

  On a pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $u(x_i)=y_i$ car si $x_i=\sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k x_k$ alors $y_i=\sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k y_k$.

  On a déjà prouvé que pour tout $x\in V$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Par définition, u transforme une base orthonormée de $V^\perp$ en une base orthonormée donc, pour tout $x'\in V^\perp$, on a $\|u(x')\| = \|x'\|$.

  Pour tout $(x,x')\in V\times V^\perp$, on a $(u(x),u(x'))\in W\times W^\perp$ donc, en utilisant le théorème de Pythagore, on a :

$$\|u(x+x')\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(x')\|^2 = \|x\|^2+\|x'\|^2 = \|x+x'\|^2;$$

  ce qui prouve que u est une isométrie.

2. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les vecteurs colonnes de A et B. L'égalité ${}^tAA={}^tBB$ donne, pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $(\,x_i \mid x_j\,) = (\,y_i \mid y_j\,)$ où $(\,- \mid -\,)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut donc appliquer le résultat ci-dessus. La matrice Q de u dans la base canonique vérifie l'égalité $B=QA$ qui traduit les égalités $y_i=u(x_i)$. Une telle matrice est orthogonale comme matrice d'une isométrie.

   Inversement, une égalité de la forme $B=QA$ avec ${}^tQQ=I$ implique ${}^tAA={}^tBB$; c'est donc une condition nécessaire et suffisante.

4.12 1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

- Si un tel endomorphisme existe, alors :

$$\forall y\in E\quad u^*(y)=\sum_{i=1}^n\big(u^*(y)\,\big|\,e_i\big)e_i=\sum_{i=1}^n\big(u(e_i)\,\big|\,y\big)e_i.$$

Il y a donc unicité sous réserve d'existence.

- Soit $u^*\ :\ E\to E,\ y\mapsto\sum\limits_{i=1}^n\big(u(e_i)\ \big|\ y\big)e_i$. L'application u^* est alors un endomorphisme de E et :

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in E^2\quad\big(x\,\big|\,u^*(y)\big)&=\left(\sum_{i=1}^n(x\mid e_i)e_i\,\middle|\,\sum_{j=1}^n\big(u(e_j)\,\big|\,y\big)e_j\right)\\&=\sum_{i=1}^n(x\mid e_i)(u(e_i)\mid y)=\left(\sum_{i=1}^n(x\mid e_i)u(e_i)\,\middle|\,y\right)\\&=\big(u(x)\,\big|\,y\big).\end{aligned}$$

2. Par définition de u^*, on a :

$$\forall(x,y)\in E^2\quad\big(u^*(x)\,\big|\,y\big)=\big(y\,\big|\,u^*(x)\big)=\big(x\,\big|\,u(y)\big).$$

L'unicité de $(u^*)^*$ donne alors $u=(u^*)^*$.

3. Par définition et du fait de l'unicité de l'adjoint, u est symétrique si, et seulement si, $u^*=u$.

4. Si u est une isométrie, alors u est bijectif et :

$$\forall(x,y)\in E^2\quad\big(u(x)\,\big|\,y\big)=\big(u(x)\,\big|\,u\left(u^{-1}(y)\right)\big)=\big(x\,\big|\,u^{-1}(y)\big)$$

donc $u^*=u^{-1}$. De même, si u est bijectif et si $u^*=u^{-1}$, alors :

$$\forall(x,y)\in E^2\quad\big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)=\big(x\,\big|\,u^*\left(u(y)\right)\big)=(x\mid y)$$

donc u est une isométrie.

Par conséquent, u est une isométrie si, et seulement si, u est bijectif et $u^*=u^{-1}$.

5. - Soit $x\in E$, on a :

$$\begin{aligned}x\in\operatorname{Ker}u^*\Leftrightarrow u^*(x)=0&\Leftrightarrow\forall y\in E\quad\big(u^*(x)\,\big|\,y\big)=0\\&\Leftrightarrow\forall y\in E\quad\big(x\,\big|\,u(y)\big)=0\Leftrightarrow x\in(\operatorname{Im}u)^\perp.\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}u^*=(\operatorname{Im}u)^\perp$.

- Comme $(u^*)^*=u$, en appliquant le résultat précédent à u^*, on obtient $\operatorname{Ker}u=(\operatorname{Im}u^*)^\perp$ puis $\operatorname{Im}u^*=(\operatorname{Ker}u)^\perp$ car E est de dimension finie.

4.13 1. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Grâce à l'hypothèse sur f, on a :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad\big(f(e_i)\,\big|\,f(e_j)\big)=(e_i\mid e_j)=\delta_{i,j}$$

donc la famille $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

2. Soit $(x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$ et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\big(f(\lambda x + y) \mid f(e_i) \big) = (\, \lambda x + y \mid e_i \,)$$
$$= \lambda(\, x \mid e_i \,) + (\, y \mid e_i \,) = \lambda\big(f(x) \mid f(e_i) \big) + \big(f(y) \mid f(e_i) \big).$$
   Ainsi, le vecteur $f(\lambda x + y) - \big(\lambda f(x) + f(y)\big)$ est orthogonal à tous les $f(e_i)$. Il est donc orthogonal aux vecteurs d'une base, ce qui implique sa nullité et donc l'égalité $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Par suite, f est linéaire.

4.14 1. La famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est immédiatement orthogonale.

2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a d'une part :
$$\big(f(e_i) + f(e_j) \mid f(e_i) - f(e_j) \big) = \big\|f(e_i)\big\|^2 - \big\|f(e_j)\big\|^2,$$
   et d'autre part $\quad \big(f(e_i) + f(e_j) \mid f(e_i) - f(e_j) \big) = 0$

   car $(\, e_i + e_j \mid e_i - e_j \,) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$. Ainsi, $\big\|f(e_i)\big\|^2 = \big\|f(e_j)\big\|^2$.
   En notant $a = \big\|f(e_1)\big\|$, on a donc $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \big\|f(e_i)\big\| = a$.
   Soit $x \in E$, on a $x = \sum\limits_{i=1}^{n} (\, x \mid e\,)_i e_i$ donc $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,) f(e_i)$. D'après la question précédente, le théorème de Pythagore donne :
$$\big\|f(x)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,)^2 \big\|f(e_i)\big\|^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,)^2 = a^2 \|x\|^2.$$
   Par conséquent, les quantités considérées étant positives, on obtient :
$$\forall x \in E \quad \big\|f(x)\big\| = a\|x\|.$$

3. L'endomorphisme $g = f/a$ est donc une isométrie vectorielle et la relation $f = a\,g$ montre que f est la composée de g avec l'homothétie $a\,\mathrm{Id}_E$.

4.15 1. Il est clair que $(2) \Rightarrow (1)$.
   Réciproquement, supposons (1) et montrons (2). Soit $(x, y) \in E^2$, on a :
$$\big(x + y \mid u(x + y) \big) = \big(x \mid u(x) \big) + \big(y \mid u(y) \big) + \big(x \mid u(y) \big) + \big(y \mid u(x) \big)$$
   et comme $\big(x + y \mid u(x + y) \big) = \big(x \mid u(x) \big) = \big(y \mid u(y) \big) = 0$, on en déduit $\big(u(x) \mid y \big) = -\big(x \mid u(y) \big)$.

2. • Supposons (i) et (ii) et montrons (iii).
   Soit $x \in E$. On a :
$$\big(x \mid u(x) \big) = \big(u(x) \mid u^2(x) \big) = \big(u(x) \mid -x \big) = -\big(x \mid u(x) \big)$$
   donc $\big(x \mid u(x) \big) = 0$.

- Supposons (ii) et (iii) et montrons (i).
  Soit $(x,y) \in E^2$. En utilisant la question précédente, on a :
  $$(\, x \mid y \,) = \big(-u^2(x) \bigm| y \,\big) = \big(\, u(x) \bigm| u(y) \,\big)$$
  donc u est une isométrie.
- Supposons (i) et (iii) et montrons (ii).
  Soit $(x,y) \in E^2$. En utilisant la question précédente, on a :
  $$\big(\, u^2(x) \bigm| y \,\big) = -\big(\, u(x) \bigm| u(y) \,\big) = -(\, x \mid y \,) = (\, -x \mid y \,)$$
  donc $\big(\, u^2(x) + x \bigm| y \,\big) = 0$.
  Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $u^2(x) + x = 0$ *i.e.* $u^2 = -\operatorname{Id}$.

Chapitre 5 : Espaces vectoriels normés

Espaces vectoriels normés

5

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés sont donc des espaces vectoriels réels ou complexes.

I Généralités

1 Définition

Définition 1

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle **norme sur E** toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **homogénéité :** $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$;
- **séparation :** $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Définition 2

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Notations

- On note (E, N) l'espace vectoriel E muni de la norme N. Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté quant à la norme utilisée, on peut ne pas la préciser et se contenter de noter E.
- Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ la norme utilisée, et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x.

Remarque

Si N est une norme, alors la propriété d'homogénéité implique que $N(0) = 0$.

Exemples

1. L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$ (où $|x|$ désigne la valeur absolue de x si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module de x si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
2. Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \max\big(|x|,|y|\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| \end{array}$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^2$, appelées respectivement **norme infinie** et **norme un**, et notées $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

p.243

Exercice 1 Soit E un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Montrer que l'application :

$$x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$$

est une norme sur E.

Remarque Avec les notations de l'exercice 1, la norme définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

Exemples De l'exercice 1, on déduit que les espaces préhilbertiens réels suivants sont naturellement munis d'une structure d'espace vectoriel normé :

1. l'espace $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire :

$$\big((x_1,y_1) \mid (x_2,y_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

dont la norme associée est donnée par $\big\|(x,y)\big\| = \sqrt{x^2+y^2}$;

2. plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique :

$$\big((x_1,\dots,x_n) \mid (y_1\dots,y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k,$$

dont la norme associée est donnée par $\big\|(x_1,\dots,x_n)\big\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$;

3. l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a < b$) des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b fg$, dont la norme associée est donnée par $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2}$.

Terminologie Dans chacun des trois exemples précédents, la norme euclidienne considérée est appelée **norme deux** (*cf.* section I.7 à la page 219).

Dans toute la suite de ce chapitre, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Vecteur unitaire

Définition 3

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

p.243

Exercice 2 On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un unique vecteur unitaire colinéaire à x et de même sens que lui.

Terminologie Étant donné x un vecteur non nul de E, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est appelé le **vecteur unitaire associé à $\boldsymbol{x}$**.

p.243

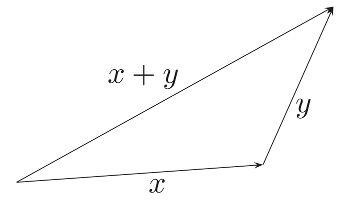
Exercice 3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour qu'il existe dans E des vecteurs unitaires.

2 Autour de l'inégalité triangulaire

Nous avons défini l'inégalité triangulaire (propriété vérifiée par toute norme d'après la définition 1 de la page 212) de la manière suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Cette inégalité s'interprète en disant que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.



L'inégalité suivante est appelée *seconde inégalité triangulaire.*

Proposition 1 (Seconde inégalité triangulaire)

Soit x et y des éléments de E. Alors on a :

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 243

Commencer par appliquer l'inégalité triangulaire aux vecteurs $x - y$ et y.

Conséquence Finalement, étant donné deux vecteurs x et y de E, on a :

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

p.244

Exercice 4 (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ?)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la *norme un* définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \big\|(x_1, x_2)\big\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

On considère les vecteurs $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.
Bien que les vecteurs x et y ne soient pas colinéaires, que donne l'inégalité triangulaire appliquée avec ces vecteurs ?

Attention

- Si deux vecteurs x et y sont positivement proportionnels, alors ils vérifient le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.
  En revanche, contrairement à l'intuition géométrique et comme l'a montré l'exercice précédent, il existe des normes pour lesquelles deux vecteurs x et y peuvent vérifier $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ sans pour autant être colinéaires.
- Néanmoins, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la norme considérée est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est associée à un produit scalaire, alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est celui où les deux vecteurs sont positivement colinéaires.

p.244

Exercice 5 *(Démonstration de l'affirmation précédente).*

Rappeler pourquoi si $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, et si x et y sont deux vecteurs, alors on a $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, x et y sont positivement colinéaires.

Extension de l'inégalité triangulaire à n vecteurs La propriété d'homogénéité de la norme combinée à l'inégalité triangulaire permet de montrer par récurrence que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, alors :

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\, \|x_k\|.$$

3 Distance associée à une norme

Définition 4

On appelle **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d\ : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \longmapsto & \|y - x\|. \end{array}$$

Remarques

- Avec les notations précédentes, on a : $\forall x \in E \quad \|x\| = d(0,x)$.
  Autrement dit, la norme d'un vecteur x est sa distance au vecteur nul.
- Il est parfois plus naturel, lorsque l'on considère des distances entre des éléments de E, d'utiliser des notations *affines* plutôt que *vectorielles*, c'est-à-dire de voir les éléments de E comme des *points* plutôt que comme des *vecteurs*. Ainsi, avec les notations de la définition 4 de la page précédente, la distance entre deux points M et N est donnée par $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.
  L'exercice 6 utilise de telles notations.

p.244

Exercice 6

Montrer que la distance d associée à la norme $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

- **séparation :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = 0 \Longleftrightarrow M = N$;
- **symétrie :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = d(N,M)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall (M,N,P) \in E^3 \quad d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$;
- **invariance par translation :** $\forall (M,N,u) \in E^3 \quad d(M+u,N+u) = d(M,N)$.

Les propriétés de l'exercice ci-dessus seront désormais utilisées librement.

Formulation des inégalités triangulaires en terme de distance

Donnons la traduction en terme de distance de la proposition 1 de la page 214 :

Proposition 2

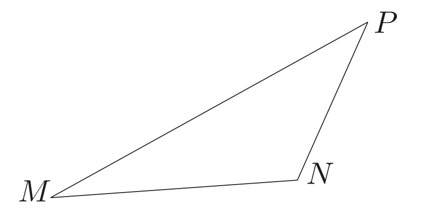
Si M, N et P désignent trois points de E, alors on a :

$$\left|d(M,N) - d(N,P)\right| \leqslant d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P).$$

De manière moins formelle, l'inégalité

$$d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$$

signifie que, dans un espace vectoriel normé, les propriétés « géométriquement intuitives » suivantes sont vraies :



- dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres ;
- *un* plus court chemin entre deux points est la ligne droite.

Attention Bien comprendre la raison du choix de l'article indéfini *un* dans la phrase « *un* plus court chemin entre deux points » : la ligne droite est *un* plus court chemin entre deux points, mais ce n'est pas nécessairement le seul (*cf.* exercice 4 de la page précédente avec $M = (0,0)$, $N = (1,0)$ et $P = (1,1)$).

Dans la suite, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

4 Boule ouverte, boule fermée

Définition 5

Soit a un élément de E et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r**, et l'on note $B(a,r)$, la partie :

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r**, et l'on note $B_F(a,r)$, la partie :

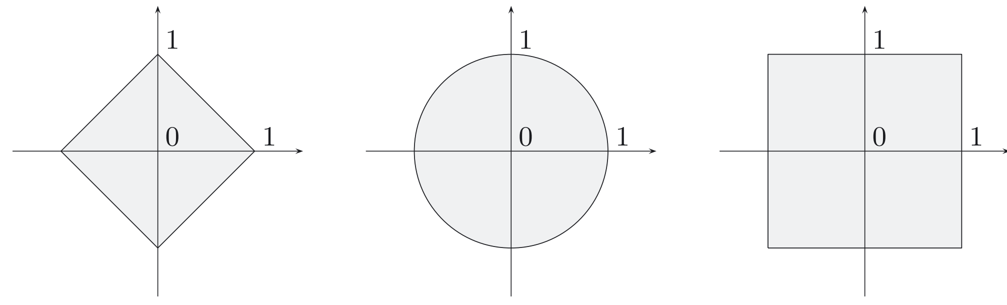
$$B_F(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}.$$

- On appelle **sphère de centre a et de rayon r**, et l'on note $S(a,r)$, la partie :

$$S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}.$$

Remarque On constate que $S(a,r) = B_F(a,r) \setminus B(a,r)$.

Exemple Dessinons, pour les trois normes usuelles, les boules unités de $\mathbb{R}^2$:



norme un | norme deux | norme infinie

Suivant qu'il s'agisse de la boule ouverte ou fermée, le bord est inclus ou non.

Remarque L'exemple précédent montre que les boules dépendent de la norme considérée sur E : une partie de E peut être une boule pour une norme et pas pour une autre.

Notation Lorsque l'on travaille dans un espace euclidien de dimension 2, il peut être plus intuitif de parler de *disque* plutôt que de *boule*. On utilise alors respectivement les notations $D(a,r)$ et $D_F(a,r)$ au lieu de $B(a,r)$ et $B_F(a,r)$.

5 Partie convexe

Définition 6

Une partie A de E est **convexe** si :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in A.$$

Lorsque λ décrit $[0,1]$, l'élément $\lambda x + (1-\lambda) y$ décrit le segment $[x,y]$ reliant les points x et y. Ainsi, dire que A est convexe signifie que tout segment reliant deux points de A est inclus dans A.

Proposition 3

Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

Démonstration page 244

p.245

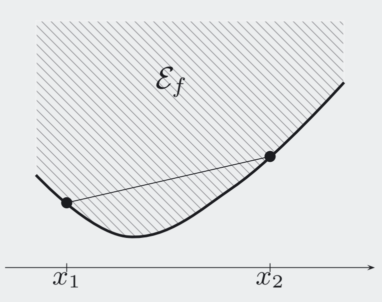
Exercice 7 (Fonction convexe)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On appelle **épigraphe** de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{E}_f = \big\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant y\big\},$$

i.e. $\mathcal{E}_f$ est l'ensemble des points situés « au dessus » du graphe de f.
On dit que la fonction f est **convexe** si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f\big(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2\big) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$



Montrer que f est convexe si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

6 Partie bornée, application bornée

Partie bornée

Définition 7

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R.$$

Dire qu'une partie est bornée signifie donc qu'il existe une boule fermée centrée en l'origine qui la contient.

p.245

Exercice 8 Montrer que si une partie A est contenue dans une boule quelconque (non nécessairement centrée en l'origine et non nécessairement fermée), alors A est bornée.

p.246

Exercice 9 Soit A une partie non vide et bornée. Montrer que l'ensemble :

$$\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\}$$

possède une borne supérieure.

Remarque Si A est une partie bornée, alors la quantité :

$$\sup\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\},$$

dont l'exercice précédent justifie l'existence, est appelée **diamètre de A**.

p.246

Exercice 10 (Diamètre d'une boule)

Supposons que E ne soit pas l'espace nul. Déterminer, en fonction de son rayon r, le diamètre d'une boule B (ouverte ou fermée).

Application bornée, suite bornée

Définition 8

On dit qu'une application f d'un ensemble non vide X dans E est **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E, *i.e.* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Remarques

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans E. Donc, d'après la définition précédente, une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leqslant M.$$

- Il est facile de vérifier que l'ensemble des applications bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,E)$ des fonctions de X dans E.

7 Exemples d'espaces vectoriels normés

L'espace $\mathbb{K}^n$

Si x désigne un vecteur de $\mathbb{K}^n$, alors on note $(x_1,\dots,x_n)$ ses composantes. L'espace $\mathbb{K}^n$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé à l'aide de différentes normes, dont les trois normes classiques suivantes :

- la **norme infinie**, définie par : $\|x\|_\infty = \max\big(|x_1|,\dots,|x_n|\big)$;
- la **norme un**, définie par : $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$;
- la **norme deux** définie par : $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.
  Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on l'appelle également **norme euclidienne**.

Proposition 4

Les trois applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont des normes. Chacune d'entre elles munit donc $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Démonstration page 246

Remarque Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on a $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
En revanche, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la présence des modules dans la définition de $\|x\|_2$ est nécessaire.

Généralisation à tout espace vectoriel de dimension finie

Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ en est une base, alors on dispose sur E des trois normes suivantes, appelées respectivement **norme infinie**, **norme un** et **norme deux** dans la base $\mathcal{B}$:

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(|x_i|\right) \; ; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne la famille des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

p.248

Exercice 11 En reprenant les notations ci-dessus, justifier que les applications :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+, \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array} \quad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont bien des normes.

Espace des fonctions bornées

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées d'un ensemble non vide X à valeurs dans un espace vectoriel normé E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E.

Définition 9

On munit l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ d'une norme, appelé **norme infinie** et noté $\mathcal{N}_\infty$, en posant, pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$:

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Cette définition exige quelques justifications qui sont l'objet de l'exercice suivant.

p.249 **Exercice 12**

1. Pour $f \in \mathcal{B}(X,E)$, justifier l'existence de $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X,E) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$ est une norme.

La norme $\mathcal{N}_\infty$ munit donc l'espace $\mathcal{B}(X,E)$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Cela s'applique en particulier à l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N},E)$ des suites bornées à valeurs dans E. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

Espace des fonctions continues sur un segment

Soit a et b deux réels tels que $a<b$. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On sait que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et même de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
On dispose sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ des deux normes classiques suivantes :

- la **norme un**, définie par $\mathcal{N}_1(f) = \displaystyle\int_a^b |f|$;

p.250 **Exercice 13** Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_1(f) \end{array}$ est une norme.

- la **norme deux**, définie par $\mathcal{N}_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f|^2}$.
  - ∗ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors la norme deux n'est rien d'autre que la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel défini par $(\,f \mid g\,) = \displaystyle\int_a^b fg$;
  - ∗ en revanche, le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ est un peu plus compliqué car l'argument précédent en s'applique plus.

p.250 **Exercice 14** Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_2(f) \end{array}$ est une norme.

Remarque Sur l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, en plus des normes un et deux, on peut également considérer la norme infinie (*cf.* page 222, exemple 2).

Espace des polynômes

Sur $\mathbb{K}[X]$, on dispose des normes suivantes :

- celles qui sont définies à partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'un polynôme $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, dont on sait qu'elle est presque nulle ($i.e.$ nulle

à partir d'un certain rang) :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ ;$$

nous passons sur la justification du fait que ce sont bien des normes, ce qui ne présente pas de difficulté particulière ;

- celles définies à l'aide de la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$; dans ce qui suit, a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$:

$$\mathcal{N}_\infty(P) = \max_{t\in[a,b]} \big|P(t)\big|, \quad \mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)|\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 \mathrm{d}t}\ ;$$

  sans rentrer dans les détails, pour justifier que ce sont des normes,

  * l'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent de la même manière que lors des exercices 12, 13 et 14,
  * pour la séparation, on utilise de plus le fait qu'un polynôme possédant une infinité de racines est le polynôme nul.

8 Obtention de nouveaux espaces vectoriels normés

Norme induite

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme $\|\cdot\|$ dont on dispose sur E induit naturellement une structure d'espace vectoriel normé sur F, par sa restriction à F :

$$\begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

Cette restriction est appelée **norme induite** sur F par la norme $\|\cdot\|$.

Exemples

1. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par le module sur $\mathbb{C}$.

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Il est clair que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$, dont on a vu que la norme infinie le munissait d'une structure d'espace vectoriel normé. La norme induite associée :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$$

   est donc une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Produit fini d'espaces vectoriels normés

p.251

Exercice 15 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que p espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$:

$$(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p).$$

Montrer que l'application suivante est une norme :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \max\big(N_1(x_1), \ldots, N_p(x_p)\big) \end{array}.$$

II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On rappelle qu'une suite a à valeurs dans un ensemble X est une application de $\mathbb{N}$ dans X. Une telle suite est souvent notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voire plus simplement (a_n).
L'élément a_n, quant à lui, est appelé **terme général** de la suite a.

1 Suite convergente

Définition 10

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un élément ℓ de E si la suite réelle $\big(\|a_n - \ell\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n - \ell\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui s'écrit en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(a_n, \ell) \leqslant \varepsilon$$

ou encore, en terme de boules :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in B_F(\ell, \varepsilon).$$

Notation Pour signifier qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, on écrit $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou plus simplement $a_n \to \ell$.

Proposition 5 (Unicité de la limite)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ainsi que ℓ_1 et ℓ_2 appartenant à E. Si $a_n \to \ell_1$ et $a_n \to \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2.
L'inégalité triangulaire donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \|\ell_2 - \ell_1\| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\to 0} + \underbrace{\|a_n - \ell_2\|}_{\to 0}.$$

En passant à la limite, on obtient $\|\ell_2 - \ell_1\| = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 11

- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un élément ℓ de E tel que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Cet unique élément ℓ est alors appelé **limite** de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  On le note $\lim a_n$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Terminologie Pour dire qu'une suite est convergente (respectivement divergente), on dit parfois simplement qu'elle converge (respectivement diverge).

Attention La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé dépend par définition de la norme avec laquelle on travaille. Une suite peut en effet converger pour une norme et diverger pour une autre.
En cas d'ambiguïté, il est donc important de préciser la norme utilisée.

p.251

Exercice 16

Dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x)=x^n$.

1. Montrer que (f_n) converge, au sens de la norme un, vers la fonction nulle.
2. On souhaite montrer par l'absurde que la suite (f_n) n'est pas convergente au sens de la norme infinie : supposons que (f_n) converge, et notons f sa limite.
   (a) Déterminer, en fonction de $x\in[0,1]$, la valeur de $f(x)$.
   (b) Expliquer pourquoi on aboutit à une contradiction.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Proposition 6 (Combinaison linéaire de deux suites convergentes)

Si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, et si λ et μ sont deux scalaires, alors la suite de terme général $\lambda a_n+\mu b_n$ converge vers $\lambda\ell_1+\mu\ell_2$.

Démonstration. Cela découle de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité de la norme :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \big\|(\lambda a_n+\mu b_n)-(\lambda\ell_1+\mu\ell_2)\big\| = \big\|\lambda(a_n-\ell_1)+\mu(b_n-\ell_2)\big\|$$
$$\leqslant |\lambda|\,\underbrace{\|a_n-\ell_1\|}_{\to 0}+|\mu|\,\underbrace{\|b_n-\ell_2\|}_{\to 0}. \qquad \square$$

Remarques

- Par récurrence, on généralise le résultat précédent à une combinaison linéaire quelconque : si p suites de termes généraux respectifs $a_n^{(1)},\dots,a_n^{(p)}$ convergent respectivement vers $\ell_1,\dots,\ell_p$, et si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des scalaires, alors la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k a_n^{(k)}$ converge vers $\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\ell_k$.
- La proposition 6 nous indique que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N},E)$ des suites à valeurs dans E.

Proposition 7

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs respectivement dans $\mathbb{K}$ et E. Si ces deux suites convergent respectivement vers α et ℓ, alors la suite de terme général $\lambda_n\, a_n$ converge vers $\alpha\,\ell$.

Principe de démonstration. Écrire $\lambda_n\, a_n - \alpha\,\ell = \lambda_n\,(a_n - \ell) + (\lambda_n - \alpha)\,\ell$.

Démonstration page 251

Proposition 8

Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite réelle de terme général $\|a_n\|$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration. Cela découle de la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \big|\|a_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell\|}_{\to 0}. \qquad \square$$

Corollaire 9

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. D'après la proposition précédente, la suite *réelle* $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, donc bornée. D'où le résultat. □

2 Suite extraite

Comme dans le cas des suites à valeurs réelles ou complexes, on appelle **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 10

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.

Démonstration. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers ℓ, et si $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en est une sous-suite, alors la suite réelle de terme général $\|a_{\varphi(n)} - \ell\|$ tend vers 0 car c'est une sous-suite de la suite réelle $\left(\|a_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0. □

Point méthode

La proposition 10 offre une méthode pour prouver qu'une suite diverge. Il suffit, au choix :

- d'en exhiber une sous-suite qui diverge ;
- d'en exhiber deux sous-suites convergeant vers deux limites différentes.

Exemple La suite réelle de terme général $a_n = (-1)^n$ est divergente, car ses deux sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, égales respectivement à 1 et -1, donc convergent respectivement vers 1 et -1.

3 Relations de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des suites à valeurs réelles ou complexes.

Définition 12

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans E.

1. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une constante $C \geqslant 0$ et un entier n_0 tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n\| \leqslant C\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{O}(b)$ ou $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.
2. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n\| \leqslant \varepsilon\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{o}(b)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.

III Topologie d'un espace vectoriel normé

1 Point intérieur, intérieur d'une partie, partie ouverte

Point intérieur à une partie

Définition 13

On dit qu'un point x est **intérieur** à une partie A de E s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.

Remarques

- Dans la définition précédente, on peut remplacer la boule ouverte $B(x,r)$ par la boule fermée $B_F(x,r)$. En effet :
  - ∗ si $B_F(x,r) \subset A$, alors $B(x,r) \subset A$;
  - ∗ si $B(x,r) \subset A$, alors $B_F\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset A$.
- Tout point intérieur à A appartient à A.

p.252 **Exercice 17** Supposons que E ne soit pas l'espace nul. Soit a un point de E.

Le point a est-il un point intérieur au singleton $\{a\}$?

p.252

Exercice 18

1. Soit $A_1, \dots, A_p$ des parties de E. Montrer que si x est un point intérieur à chacune des parties $A_1, \dots, A_p$, alors x est un point intérieur à $\bigcap_{k=1}^{p} A_k$.
2. Prouver, à l'aide d'un exemple, que le résultat de la question précédente ne subsiste pas si l'on considère une infinité de parties.

   On pourra se placer dans $\mathbb{R}$ *et considérer* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ *avec* $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

Intérieur d'une partie

Définition 14

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur de A** ; on le note $\mathring{A}$ ou $\operatorname{Int}(A)$.

Exemple On a $\operatorname{Int}(E) = E$ et $\operatorname{Int}(\varnothing) = \varnothing$.

Résultats

- Si un point est intérieur à A, alors il appartient à A. On a donc $\mathring{A} \subset A$.
- Si A et B sont deux parties vérifiant $A \subset B$, alors on a $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Attention La réciproque du dernier point évoqué est fausse : on peut trouver deux parties A et B vérifiant $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ sans pour autant avoir $A \subset B$.
On peut même trouver deux ensembles qui ne sont pas égaux mais qui ont même intérieur. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si $A = [0,1]$ et $B = [0,1[$, alors on a $\mathring{A} = \mathring{B} =]0,1[$, et pourtant $A \neq B$.

Partie ouverte

Définition 15

Soit U une partie de E.

- On dit que U est un **ouvert de E**, ou une **partie ouverte de E**, si tout point de U est intérieur à U, c'est-à-dire si $U \subset \operatorname{Int}(U)$.
- L'inclusion $\operatorname{Int}(U) \subset U$ étant vraie en toute généralité, U est un ouvert de E si, et seulement si, $\operatorname{Int}(U) = U$.

Reformulation Pour démontrer qu'une partie U de E est un ouvert de E, il s'agit donc de prouver que :

$$\forall x \in U \quad \exists r > 0 \quad B(x,r) \subset U.$$

Exemple Il est clair, d'après la définition, que E et $\varnothing$ sont des parties ouvertes de E.

p.252

Exercice 19 Soit A une partie de E.

1. Montrer que l'intérieur de A est un ouvert de E.
2. Montrer que l'intérieur de A est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A.

Proposition 11

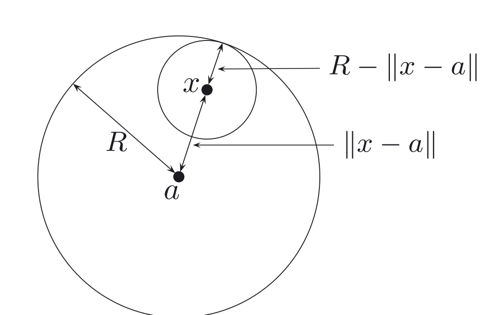
Toute boule ouverte est une partie ouverte de E.

Principe de démonstration.

Pour x appartenant à une boule de centre a de rayon R, considérer la boule ouverte de centre x et de rayon :

$$R - \|x - a\|.$$

Démonstration page 253



Remarque Le dessin fait lors de la démonstration précédente correspond à une norme euclidienne, mais nous a permis de trouver une démonstration valable pour toute norme. Cette représentation des boules n'induit en général pas de fausse intuition lors de considérations topologiques, c'est pourquoi on l'utilise couramment. [1]

p.253

Exercice 20 Montrer que l'intérieur d'une boule est la boule ouverte de mêmes centre et rayon.

p.253

Exercice 21 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) ?
2. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$ (muni du module) ?

Remarque Plus généralement, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]a, b[$ avec $a < b$, est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais pas de $\mathbb{C}$.

Attention Comme l'illustre l'exercice précédent, le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.

1. Concrètement, le risque majeur de cette vision euclidienne concerne le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (*cf.* le « attention » de la page 215).

Proposition 12

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert de E.
- L'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert de E.

Démonstration page 253

Remarque En particulier, une réunion quelconque de boules ouvertes est un ouvert de E. La réciproque est également vraie (*cf.* exercice suivant).

p.254

Exercice 22 Montrer que toute partie ouverte de E peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Attention Avant d'affirmer qu'une intersection d'ouverts est un ouvert, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette intersection. En effet, une intersection quelconque de parties ouvertes n'est en général pas ouverte, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.254

Exercice 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que, bien que chacun des U_n soit un ouvert de $\mathbb{R}$, leur intersection ne l'est pas.

2 Point adhérent, adhérence, partie fermée

Point adhérent à une partie

Définition 16

On dit qu'un point x est **adhérent** à une partie A de E si pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Dire que x est adhérent à A signifie qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches que l'on veut de x.

Exemple Tout point de A est adhérent à A.

Caractérisation séquentielle des points adhérents

Le résultat suivant donne une caractérisation très importante des points adhérents à une partie A.

Proposition 13 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Un point x est adhérent à une partie A si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration page 254

Ce résultat peut aussi s'énoncer ainsi : l'adhérence d'une partie A est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

Adhérence d'une partie

Définition 17

L'ensemble des points adhérents à A est appelé **adhérence** de A ; on le note $\overline{A}$ ou $\text{Adh}(A)$.

Résultats

- Tout point de A est adhérent à A. On a donc $A \subset \text{Adh}(A)$.
- Dire qu'un point x n'appartient pas à l'adhérence de A signifie que l'on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$ (ou encore $B(x,r) \subset E \setminus A$), ce qui signifie que x appartient à l'intérieur de $E \setminus A$. D'où la relation :
$$E \setminus (\text{Adh}\, A) = \text{Int}(E \setminus A),$$
ce qui mène également aux deux relations suivantes :
$$\text{Adh}(A) = E \setminus \text{Int}(E \setminus A) \qquad \text{et} \qquad \text{Int}(A) = E \setminus \text{Adh}(E \setminus A).$$
- La caractérisation séquentielle des points adhérents à A nous dit que l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

Terminologie On dit que A est **dense** dans E si l'on a $\text{Adh}(A) = E$, ce qui signifie que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.
Par exemple, $\mathbb{D}$ (l'ensemble des nombres décimaux), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des parties denses dans $\mathbb{R}$.

p.254

Exercice 24 Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est aussi un sous-espace vectoriel.

Partie fermée

Proposition 14

Soit A une partie de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{Adh}(A) = A$;

(ii) la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A ;

(iii) $E \setminus A$, le complémentaire de A dans E, est un ouvert de E.

On dit alors que A est un **fermé de E** ou une **partie fermée de E**.

Principe de démonstration. Démonstration page 255

- L'assertion (ii) est une reformulation de (i).
- Pour $(i) \Longleftrightarrow (iii)$, utiliser le fait qu'une partie est ouverte si, et seulement si, elle est égale à son intérieur.

Exemples

- Il est clair que E et $\varnothing$ sont des parties fermées de E, puisque leurs complémentaires sont des ouverts de E.
- Pour tout $a \in E$, le singleton $\{a\}$ est un fermé de E ; en effet, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert de E car pour tout point $x \neq a$, on a $B\big(x, \|x-a\|\big) \subset E \setminus \{a\}$.

Terminologie Dans la proposition 14 de la page ci-contre, l'assertion (ii) est appelée **caractérisation séquentielle des parties fermées**.

p.255 **Exercice 25** Montrer que tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$ avec $a \leqslant b$, est un fermé de $\mathbb{R}$.

Attention Il ne faut pas croire, par jeu de mots, qu'une partie qui n'est pas ouverte est nécessairement fermée. En effet, dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, il existe des parties ni ouvertes ni fermées.
C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

p.255 **Exercice 26**

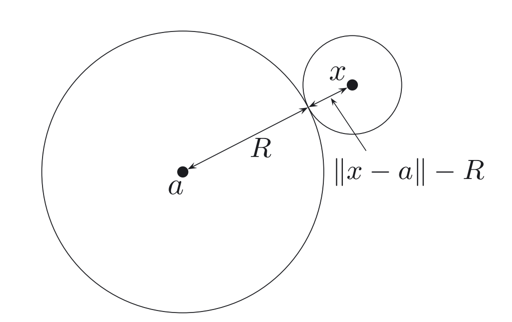
1. Montrer que l'adhérence d'une partie A est un fermé de E.
2. Montrer que l'adhérence de A est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A.

Proposition 15

Toute boule fermée est une partie fermée de E.

Principe de démonstration.
On montre que le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
Pour x n'appartenant pas à la boule fermée de centre a et de rayon R, considérer, comme y incite le dessin, la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x-a\| - R$.

Démonstration page 255



Exemple Tout segment de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet, si $a < b$, alors le segment $[a, b]$ n'est rien d'autre que la boule fermée de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}\cdot$

p.256 **Exercice 27** Montrer que l'adhérence d'une boule est la boule fermée de mêmes centre et rayon.

Proposition 16

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- La réunion d'une famille *finie* de fermés est un fermé.

Démonstration. En considérant les complémentaires, ce résultat découle de la proposition 12 de la page 229. En effet, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors on a :

$$E\setminus\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigcap_{i\in I}(E\setminus A_i)\quad\text{et}\quad E\setminus\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}(E\setminus A_i).\qquad\square$$

p.256 **Exercice 28** Montrer, en l'obtenant comme une intersection de fermés, que toute sphère est une partie fermée.

Attention Avant d'affirmer qu'une réunion de fermés est fermée, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette réunion. En effet, une réunion quelconque de fermés n'est en général pas fermée, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.256 **Exercice 29** On se place dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n\geqslant 2$, on note $F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$.
Déterminer l'ensemble $A=\bigcup_{n\geqslant 2}F_n$. Cet ensemble A est-il fermé ?

Remarque Plus généralement, toute partie A peut-être obtenue comme une réunion de fermés : il suffit d'écrire $A=\bigcup_{a\in A}\{a\}$.

3 Frontière d'une partie

Définition 18

Soit A une partie de E. On appelle **frontière de A**, et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Adh}(A)\setminus\mathrm{Int}(A).$$

On a $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Adh}(A)\cap\big(E\setminus\mathrm{Int}(A)\big)$, *i.e.* puisque $E\setminus\mathrm{Int}(A)=\mathrm{Adh}(E\setminus A)$:

$$\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Adh}(A)\cap\mathrm{Adh}(E\setminus A).$$

Dire qu'un point x appartient à la frontière de A signifie donc que toute boule centrée en x rencontre à la fois A et son complémentaire.

Remarque De ce qui précède il résulte que :

- la frontière de A est une partie fermée (car elle est l'intersection de deux parties fermées) ;
- A et $E\setminus A$ ont même frontière.

Exemples

1. On a $\mathrm{Int}(E)=\mathrm{Adh}(E)=E$, donc $\mathrm{Fr}(E)=E\setminus E=\varnothing$.
2. On a $\mathrm{Adh}(\varnothing)=\varnothing$, donc $\mathrm{Fr}(\varnothing)=\varnothing$.

p.256

Exercice 30 Soit B une boule de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.
Montrer que $\mathrm{Fr}(B)$ est la sphère de mêmes centre et rayon.

p.256

Exercice 31 Soit A une partie de E. Montrer que les trois parties :

$$\overset{\circ}{A}, \quad \mathrm{Fr}(A) \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{A}$$

sont deux à deux disjointes et que leur réunion est E.

IV Limite d'une application

Dans ce qui suit, en l'absence de précision supplémentaire, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et A désigne une partie de E.

1 Définitions, généralités

Définition 19

Soit $f : A \to F$ une application, ainsi que a un point adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers ℓ en a** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Notation Pour signifier que f tend vers ℓ en a, on note :

$$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque La définition précédente peut s'écrire :

- en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad d(x, a) \leqslant \eta \Longrightarrow d\big(f(x), \ell\big) \leqslant \varepsilon \ ;$$

- en terme de boules :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in B_F(a, \eta) \cap A \quad f(x) \in B_F(\ell, \varepsilon) \ ;$$

  ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad f\big(B_F(a, \eta) \cap A\big) \subset B_F(\ell, \varepsilon).$$

Attention Ne pas confondre les notations dans ce qui précède : la notation B_F est utilisée pour désigner une boule *fermée* et n'a aucun lien avec le nom F du domaine d'arrivée de l'application f.

Dans ce qui suit, afin d'alléger les énoncés, nous convenons qu'en l'absence de précision supplémentaire :

- f désigne une application de A dans F
- a un point adhérent à A
- ℓ un élément de F.

Lemme 17

Si $f : A \to F$ tend vers ℓ en a, alors ℓ est adhérent à $f(A)$.

Démonstration page 256

Remarque Si a appartient à A et si f admet une limite en a, alors celle-ci vaut nécessairement $f(a)$.

Définition 20

On dit que f est continue en $a \in A$ si f admet une limite en a.

Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante va nous permettre d'utiliser les résultats déjà obtenus précédemment sur les suites pour établir rapidement de nombreuses propriétés sur les limites d'applications.

Proposition 18 (Caractérisation séquentielle de la limite)

L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to \ell$.

Démonstration page 257

p.257

Exercice 32 (Stabilité par restriction)

Supposons que $f : A \to F$ tende vers une limite ℓ en a. Si B est une partie de A telle que a soit adhérent à B, montrer que la restriction $f_{|B}$ de f à B tend également vers ℓ en a.

Corollaire 19 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

L'application f est continue en $a \in A$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to f(a)$.

Unicité de la limite

Proposition 20 (Unicité de la limite)

Si deux éléments ℓ_1 et ℓ_2 de F vérifient $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient tels que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers a (une telle suite existe car a est adhérent à A). D'après la proposition 18, on a alors $f(u_n) \to \ell_1$ et $f(u_n) \to \ell_2$. Par unicité de la limite d'une suite, il en résulte que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Définition 21

On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Cet unique élément ℓ s'appelle alors la **limite de f en a** et se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2 Prolongement par continuité

Définition 22

Si f possède une limite $\ell \in F$ en un point $a \in \overline{A} \setminus A$, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue en a, et s'appelle **prolongement de f par continuité en a**.

Remarque L'unicité de la limite entraîne que l'application $\widetilde{f}$ de la définition précédente est l'*unique* prolongement de f à $A \cup \{a\}$ qui soit continu en a.

3 Relations de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles ou complexes.

Définition 23

Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to G$ deux applications ainsi que $a \in \operatorname{Adh}(A)$.

- On dit que f est **dominée** par φ au voisinage de a si

$$\exists C \geqslant 0 \quad \exists R > 0 \quad \forall x \in A \cap B(a, R) \quad \|f(x)\| \leqslant C \, \|\varphi(x)\| \ ;$$

  on note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$.

- On dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad \forall x \in A \cap B(a, R) \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon \, \|\varphi(x)\| \ ;$$

  on note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$.

Remarque D'après la définition précédente :

- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\|\varphi\|)$;
- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\|\varphi\|)$.

C'est pourquoi dans la pratique, dans une relation de domination ou de négligeabilité, on se limite souvent à une fonction φ à valeurs réelles positives.

4 Opérations sur les limites

Proposition 21 (Limite d'une combinaison linéaire)

Soit f_1 et f_2 deux applications de A dans F ainsi que λ_1 et λ_2 deux scalaires. Si l'on a $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \in F$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \in F$, alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes.

Démonstration page 257

Proposition 22 (Produit par une fonction à valeurs scalaires)

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$ et si φ est une fonction de A dans $\mathbb{K}$ tendant en a vers $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\varphi \times f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x) f(x) \end{array}$ tend vers $\lambda \ell$ en a.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes (produit d'une suite convergente par une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$).

Démonstration page 257

Proposition 23 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une fonction ne s'annulant pas.
Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors on a $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration page 258

Remarque Dans la proposition 23, si la fonction f s'annule sur A, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ n'est pas définie sur A tout entier.
En revanche, si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors il existe une boule B centrée en a tel que la restriction de f à $B \cap A$ ne s'annule pas. C'est à cette restriction que le résultat s'applique.

Quotient d'applications à valeurs scalaires Il résulte des deux résultats précédents que si $f_1 : A \to \mathbb{K}$ et $f_2 : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications vérifiant $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \neq 0$, et si f_2 ne s'annule pas, alors :

$$\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\longrightarrow} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Proposition 24 (Limite d'une fonction composée)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, ainsi que $A \subset E$ et $B \subset F$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications, avec $f(A) \subset B$.

- Si $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, alors b est adhérent à B.
- Si de plus on a $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 258

Conséquence en termes de continuité ponctuelle

Les résultats précédents sur les limites donnent immédiatement des résultats analogues sur les applications continues en un point :

- toute combinaison linéaire d'applications continues en a est également continue en a ;
- tout produit d'une fonction continue en a par une fonction scalaire continue en a est également continue en a ;
- si f est continue en a et si f ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a ;
- si f et g sont continues en a et si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a ;
- si $f : A \to B$ est continue en a et $g : B \to G$ continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

V Continuité globale

1 Applications continues

Définition 24

On dit qu'une application est **continue** si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

p.258 **Exercice 33** Soit $f : A \to F$ une application continue. Montrer que si $B \subset A$, alors la restriction $f_{|B}$ est continue.

Le résultat de l'exercice suivant sera utile dans les chapitres 10 et 12.

p.258 **Exercice 34** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \to F$ une application. Montrer que si pour tout segment $[a, b] \subset I$ la restriction de f à $[a, b]$ est continue, alors f est continue.

p.259 **Exercice 35** Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que u est continue si, et seulement si, u est continue en 0.

2 Application lipschitzienne

Définition 25

- Soit $k \geqslant 0$. On dit que l'application f est ***k*-lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport *k*** si :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|.$$

- Dire f est **lipschitzienne** signifie qu'il existe une constante $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Résultats

1. Si f est k-lipschitzienne, alors f est k'-lipschitzienne pour tout $k' \geqslant k$.
2. L'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$: en effet, la fonction nulle est lipschitzienne, et si f_1 et f_2 sont lipschitziennes de rapports respectifs k_1 et k_2 et si λ_1 et λ_2 sont deux scalaires, alors l'application $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda_1|\,k_1 + |\lambda_2|\,k_2$.
3. La composée d'une application k_1-lipschitzienne et d'une application k_2-lipschitzienne est une application $(k_1 k_2)$-lipschitzienne.

Proposition 25

Toute application lipschitzienne est continue.

Principe de démonstration. Revenir à la définition d'une application continue.

Démonstration page 259

Point méthode

Pour montrer qu'une application est continue, on commence souvent par regarder si elle est lipschitzienne car, si c'est le cas, c'est en général la manière la plus rapide de justifier la continuité.

Exemple L'application *norme* : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ est 1-lipschitzienne, donc continue.
En effet, on a par la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \big\|x - y\big\|.$$

p.259

Exercice 36 On munit E^2 de la norme définie par (*cf.* exercice 15 de la page 223) :

$$N(x,y) = \max\big(\|x\|, \|y\|\big).$$

Prouver que l'application *distance* :

$$\begin{array}{rccl} d : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = N(x-y) \end{array}$$

est lipschitzienne, donc continue.

p.259

Exercice 37 Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que u est k-lipschitzienne si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|.$$

p.260

Exercice 38 (Distance à une partie non vide)

Soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on appelle **distance de x à A** la quantité :

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

Indication : on pourra commencer par montrer que $d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

3 Opérations sur les applications continues

Les résultats suivants sont les versions globales des propositions 21 à 24.

Proposition 26 (Combinaison linéaire, produit, composée)

- Une combinaison linéaire de deux applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.
- La composée de deux applications continues est continue.

Remarque L'ensemble des applications continues de A dans F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$. On le note $\mathcal{C}(A,F)$.

Exemple Munissons $\mathbb{K}^2$ de la norme infinie. Les applications composantes de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$:

$$(x,y) \mapsto x \qquad \text{et} \qquad (x,y) \mapsto y$$

sont 1-lipchitzienne donc continues.

- Par somme, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ est donc continue.
- Par produit, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ est continue.

Remarque Dans l'exemple précédent, si l'on ne veut pas utiliser le caractère lipschitzien, alors on peut utiliser la caractérisation séquentielle et se ramener aux résultats déjà connus sur les suites. Dans le cas de l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y, \end{array}$$

si (x,y) est un élément de $\mathbb{K}^2$, et si $(u_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}^2$ qui tend vers (x,y), alors on a $u_n \to x$ et $v_n \to y$, et donc, par somme de deux suites convergentes, on a :

$$f(u_n,v_n) = u_n + v_n \to x+y = f(x,y).$$

p.260 **Exercice 39** Justifier que si f est continue, alors l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x)\| \end{array}$ est continue.

Proposition 27 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une application continue ne s'annulant pas.
L'application *inverse* de f :

$$\frac{1}{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

est continue.

Démonstration. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue, comme composée des deux applications continues f et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda}. \end{array}$ □

Conséquence : quotient d'applications continues Si $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues à valeurs scalaires, et si de plus g ne s'annule pas, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue, comme produit des deux applications continues f et $\dfrac{1}{g}$.

4 Applications continues et images réciproques

Proposition 28

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue.

- Les ensembles $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$ sont des parties fermées de E.
- L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de E.

Démonstration page 260

Remarque Les trois ensembles considérés dans la proposition précédente sont en fait les images réciproques par f de $\mathbb{R}_+$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors :

- les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ sont des fermés de E ;
- l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de E.

Exemple Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une des normes usuelles. L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

est continue car 1-lipschitizienne. Ainsi, d'après la proposition 28 :

1. le demi-plan $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par f ;
2. le demi-plan $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ par f.

Attention Pour pouvoir appliquer la proposition 28, il est important que l'application continue f soit définie sur E tout entier.
Par exemple, si l'on prend $E = \mathbb{R}$ et que l'on considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \sqrt{x} \end{array}$$

alors on a $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+$. Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ bien que l'application f soit continue.

p.261

Exercice 40 On se place dans $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que la partie suivante est un ouvert :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}.$$

   Indication : écrire A comme l'intersection de trois ouverts.

2. Prouver que la partie suivante est un fermé :

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

p.261

Exercice 41 *(Approfondissement : généralisation de la proposition 28)*

Soit $f : E \to F$ une application continue.

1. Montrer que si A est une partie fermée de F, alors $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de E.
   Procéder par caractérisation séquentielle.
2. Montrer que si U est une partie ouverte de F, alors $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de E.
   Passer par le complémentaire et utiliser la première question.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

Pour alléger l'écriture, notons $\|x\| = \sqrt{(\, x \mid x \,)}$ (même si cette notation est abusive car nous n'avons pas encore démontré qu'il s'agit d'une norme).

- L'homogénéité et la séparation sont faciles à vérifier :
  * en effet, si $x \in E$ vérifie $\|x\| = 0$, alors on a $(\, x \mid x \,) = 0$, ce qui, par le caractère *défini positif* du produit scalaire, entraîne que x est nul ;
  * pour $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\, \lambda x \mid \lambda x \,)} = \sqrt{\lambda^2 (\, x \mid x \,)} = |\lambda| \sqrt{(\, x \mid x \,)} = |\lambda| \times \|x\|.$$

- Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (\, x+y \mid x+y \,)\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(\, x \mid y \,) && \text{(bilinéarité et symétrie)}\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

  On obtient donc l'inégalité $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ souhaitée.

Exercice 2 Par homogénéité de la norme, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$. Ainsi, le vecteur λx est unitaire si, et seulement si, $|\lambda| \times \|x\| = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \pm \dfrac{1}{\|x\|}\cdot$

Il existe donc deux vecteurs unitaires colinéaires à x qui sont $\dfrac{x}{\|x\|}$, de même sens que x, et $-\dfrac{x}{\|x\|}$, de sens opposé à x.

Exercice 3 Il existe des vecteurs unitaires dans E dès que E contient au moins un vecteur non nul, c'est-à-dire dès que E n'est pas l'espace nul. En revanche, si E est l'espace nul, alors il ne contient pas de vecteur unitaire puisqu'alors le seul vecteur qu'il contient est de norme nulle.

Proposition 1

- En appliquant l'inégalité triangualire aux vecteurs $x - y$ et y, il vient :

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|,$$

  d'où :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|.$$

- En échangeant les rôles de x et y dans l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|$$

Finalement, les deux inégalités obtenues se résument en :

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x-y\|.$$

Exercice 4 On a $x+y=(1,1)$, donc $\|x+y\|_1 = 2$. Comme $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, les vecteurs x et y vérifient le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, bien qu'il ne soient pas colinéaires.

Exercice 5 Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire considéré. Soit x et y deux vecteurs.

- D'une part, en écrivant $\|x+y\|^2 = (\, x+y \mid x+y\,)$ et grâce aux propriétés du produit scalaire (bilinéarité et symétrie), on obtient $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(\, x \mid y\,)$.
- D'autre part, on a $\big(\|x\| + \|y\|\big)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\|$.

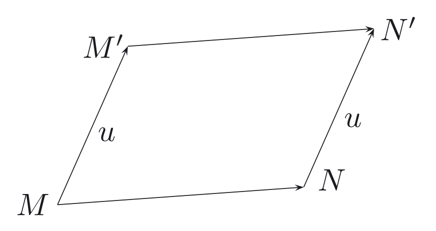
On obtient :

$$\begin{aligned} \|x+y\| = \|x\| + \|y\| &\iff (\, x \mid y\,) = \|x\|\,\|y\| \\ &\iff (\, x \mid y\,)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 \quad \text{et} \quad (\, x \mid y\,) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat souhaité car deux vecteurs vérifient le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz si, et seulement s'il sont colinéaires, et leur produit scalaire est alors positif si, et seulement s'il sont de même sens.

Exercice 6

- **Séparation.** C'est évident, car pour $(M,N) \in E^2$, on a $d(M,N) = 0$ si, et seulement si, $\|\overrightarrow{MN}\| = 0$, ce qui, par propriété de séparation de la norme, revient à dire que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $M = N$.
- **Symétrie.** C'est une conséquence de l'homogénéité de la norme.
  En effet, pour $(M,N) \in E^2$, on a :
  $$d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \|-\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{NM}\| = d(N,M).$$
- **Inégalité triangulaire.** Pour $(M,N,P) \in E^3$, on a :
  $$\begin{aligned} d(M,P) = \|\overrightarrow{MP}\| &= \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| \\ &\leqslant \|\overrightarrow{MN}\| + \|\overrightarrow{NP}\| \qquad \text{(inégalité triangulaire sur } \|\cdot\|\text{)} \\ &= d(M,N) + d(N,P). \end{aligned}$$
- **Invariance par translation.**
  Pour $(M,N,u) \in E^3$, si l'on note :
  $$M' = M + u \quad \text{et} \quad N' = N + u,$$
  alors les vecteur $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont égaux.

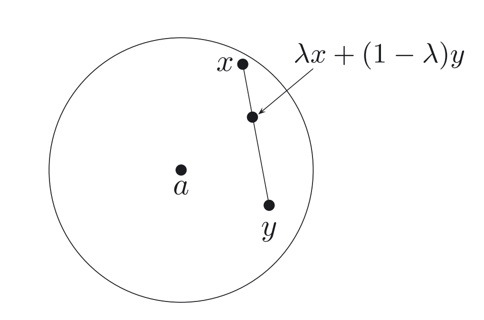


Proposition 3

Soit B une boule (ouverte ou fermée). Soit x et y deux éléments de B et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$.

Pour cela, il suffit de montrer qu'en notant a le centre de B, on a :

$$\big\|\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)-a\big\| \leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big).$$



Cela s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned}
\big\|\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - a\big\| &= \big\|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\big\| \\
&\leqslant \big\|\lambda(x-a)\big\| + \big\|(1-\lambda)(y-a)\big\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| && \text{(homogénéité)} \\
&\leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big) && \text{(car } \lambda \in [0,1]\text{)}.
\end{aligned}$$

Exercice 7

- Supposons $\mathcal{E}_f$ convexe. Soit $(x_1,x_2) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Les deux points $\big(x_1, f(x_1)\big)$ et $\big(x_2, f(x_2)\big)$ appartiennent à $\mathcal{E}_f$ donc, par convexité de $\mathcal{E}_f$, on a :

  $$\lambda\big(x_1, f(x_1)\big) + (1-\lambda)\big(x_2, f(x_2)\big) \in \mathcal{E}_f$$

  c'est-à-dire

  $$\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\,,\, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\Big) \in \mathcal{E}_f.$$

  Par définition de $\mathcal{E}_f$, cela signifie que :

  $$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

  Donc f est une fonction convexe.
- Réciproquement, supposons que la fonction f soit convexe. Soit $M_1 = (x_1,y_1)$ et $M_2 = (x_2,y_2)$ deux points appartenant à $\mathcal{E}_f$ et $\lambda \in [0,1]$.
  Montrons que $\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2 \in \mathcal{E}_f$, ce qui revient à montrer que :

  $$f\big(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2. \qquad (\star)$$

  Comme M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{E}_f$, on a :

  $$f(x_1) \leqslant y_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) \leqslant y_2.$$

  De plus, comme f est une fonction convexe, on a :

  $$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda \underbrace{f(x_1)}_{\leqslant y_1} + (1-\lambda)\underbrace{f(x_2)}_{\leqslant y_2}$$

  ce qui, comme $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, permet d'obtenir l'inégalité $(\star)$ souhaitée.

Exercice 8 Soit A une partie contenue dans une boule B de centre a et de rayon r. Que la boule B soit fermée ou ouverte, on a toujours $B \subset B_F(a,r)$, et donc $A \subset B_F(a,r)$. Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in A \quad \|x\| \leqslant \|a\| + \|x-a\| \leqslant \|a\| + r,$$

donc A est bornée.

Exercice 9 Notons $\Gamma = \left\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\right\}$.

- Le caractère non vide de A assure que Γ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Montrons que Γ est majorée.
  Soit $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R$ (un tel R existe car A est bornée).
  Alors Γ est majorée par $2R$ car par inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad d(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2R.$$

Ainsi Γ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc possède une borne supérieure.

Exercice 10 Notons a le centre de B et Γ l'ensemble $\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in B^2\}$.

- L'inégalité triangulaire assure que l'ensemble Γ est majoré par $2r$. En effet, si x et y sont deux éléments de B, alors on a :

$$d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(y,a) \leqslant r + r = 2r.$$

- D'autre part, soit u est un vecteur unitaire de E (un tel vecteur existe car E n'est pas l'espace nul). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, les éléments :

$$x_n = a + r(1-2^{-n})u \quad \text{et} \quad y_n = a - r(1-2^{-n})u$$

  appartiennent à B et vérifient :

$$d(x_n,y_n) = 2r(1-2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2r.$$

Cela montre, par caractérisation de la borne supérieure, que $\sup(\Gamma) = 2r$.
Donc B a pour diamètre $2r$.

Proposition 4

- **Norme infinie.**
  - *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors on a $\max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| = 0$, et donc :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0,$$

    c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda\, x\|_\infty &= \max\left\{|\lambda\, x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}\\ &= \max\left\{|\lambda|\ |x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}\\ &= |\lambda|\ \max\left\{|x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :

$$\|x+y\|_\infty = \max\left\{|x_k+y_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

    Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$|x_k+y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

    il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\left\{|x_k+y_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$, et donc que $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

- **Norme un.**
  - ∗ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$, et donc :
$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0,$$
c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - ∗ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k| = \sum_{k=1}^{n} \big(|\lambda|\, |x_k|\big) = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\, \|x\|_1.$$
  - ∗ *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :
$$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
- **Norme deux.**
  - ∗ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x,x)}$, où φ est l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k. \end{array}$$
L'application φ est un produit scalaire, donc l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme car c'est la euclidienne associée au produit scalaire φ.
  - ∗ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'argument précédent ne s'applique pas.
    - ⋆ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$, et donc :
$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0.$$
    - ⋆ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda|\, \|x\|_2.$$
    - ⋆ *Inégalité triangulaire.* Soit $(x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2$.
Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants :
$$\tilde{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad \text{et} \qquad \tilde{y} = (|y_1|, \ldots, |y_n|).$$
On a :
$$\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big)^2} = \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2.$$
En appliquant avec $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ l'inégalité triangulaire déjà obtenue pour la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, il vient :
$$\|x+y\|_2 \leqslant \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2.$$
En constatant alors que $\|x\|_2 = \|\tilde{x}\|_2$ et $\|y\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$, on obtient le résultat :
$$\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Exercice 11

- **Norme infinie.**
  - *Séparation.*
    Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors il est clair que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.*
    Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda\, x\|_\infty &= \max\{|\lambda\, x_i|\,;\ i \in [\![1,n]\!]\}\\ &= \max\{|\lambda|\ |x_i|\,;\ i \in [\![1,n]\!]\}\\ &= |\lambda|\ \max\{|x_i|\,;\ i \in [\![1,n]\!]\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

  - *Inégalité triangulaire.*
    Pour $(x,y) \in E^2$, on a $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_i+y_i|\,;\ i \in [\![1,n]\!]\}$.
    Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$|x_i+y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

    il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|x_i+y_i|\,;\ i \in [\![1,n]\!]\}$, et donc que $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
- **Norme un.**
  - *Séparation.*
    Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors il est clair que : $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.*
    Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda\, x_i| = \sum_{i=1}^{n} \big(|\lambda|\ |x_i|\big) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_1.$$

  - *Inégalité triangulaire.*
    Pour $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

- **Norme deux.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$, et donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0$$

    c'est-à-dire $x = 0$.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda\, x_i|^2} = |\lambda|\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = |\lambda|\ \|x\|_2.$$

* *Inégalité triangulaire.*
  * *Résultat préliminaire.* Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :
$$(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
la norme euclidienne associée est donnée par :
$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$
et l'inégalité triangulaire associée à cette norme donne :
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad (\star)$$
  * Soit $(x,y) \in E^2$. On a :
$$\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(|x_i|+|y_i|\big)^2}.$$
Les familles $(|x_i|)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(|y_i|)_{i\in[\![1,n]\!]}$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on peut appliquer l'inégalité $(\star)$, ce qui donne le résultat souhaité :
$$\|x+y\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Exercice 12

1. Comme X est non vide et que f est bornée, la partie :
$$\big\{\|f(x)\|\,;\ x \in X\big\}$$
possède une borne supérieure car c'est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
2. • **Séparation.** Si f vérifie $\mathcal{N}_\infty(f) = 0$, alors on a $\|f(x)\| = 0$ pour tout $x \in X$, et donc f est la fonction nulle.
   • **Homogénéité.** Soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Montrons que $\mathcal{N}_\infty(\lambda f) = |\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$, ce qui revient à montrer qu'en notant A l'ensemble $\big\{\|\lambda\, f(x)\|\,;\ x \in X\big\}$, alors on a $\sup(A) = |\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   * Tout d'abord, A est majoré par $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   En effet, si a appartient à A, alors on peut trouver $x \in X$ tel que $a = \|\lambda\, f(x)\|$. On a alors, par homogénéité, $a = |\lambda|\ \|f(x)\|$, et donc $a \leqslant |\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   * Il suffit alors pour conclure de prouver qu'il existe une suite à valeurs dans A tendant vers $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   Comme $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\big\{\|f(x)\|\,;\ x \in X\big\}$, par caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver une suite (x_n) à valeurs dans X telle que
$$\|f(x_n)\| \to \mathcal{N}_\infty(f).$$

En notant alors $a_n = \|\lambda f(x_n)\|$, on a :

$$a_n = |\lambda| \, \|f(x_n)\| \to |\lambda| \, \mathcal{N}_\infty(f).$$

- **Inégalité triangulaire.** Soit $(f,g) \in \big(\mathcal{B}(X,E)\big)^2$. Montrons que :

$$\mathcal{N}_\infty(f+g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g).$$

En notant A l'ensemble $\big\{\|f(x)+g(x)\| \,;\ x \in X\big\}$, cela revient à montrer que A est majoré par $\mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g)$. C'est évident, car pour tout $x \in X$, on a :

$$\|f(x)+g(x)\| \leqslant \underbrace{\|f(x)\|}_{\leqslant \mathcal{N}_\infty(f)} + \underbrace{\|g(x)\|}_{\leqslant \mathcal{N}_\infty(g)}.$$

Exercice 13

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ vérifie $\mathcal{N}_1(f) = 0$, alors $|f|$ est la fonction nulle car continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\mathcal{N}_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f| = \int_a^b \big(|\lambda| \, |f|\big) = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \mathcal{N}_1(f).$$

- **Inégalité triangulaire.** Pour $(f,g) \in \big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})\big)^2$, on a :

$$\mathcal{N}_1(f+g) = \int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b \big(|f| + |g|\big) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g).$$

Exercice 14

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{N}_2(f) = 0$, alors $|f|^2$ est la fonction nulle, en tant que fonction continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est la fonction nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big(\mathcal{N}_2(\lambda f)\big)^2 = \int_a^b |\lambda f|^2 = \int_a^b \big(|\lambda|^2 \, |f|^2\big) = |\lambda|^2 \int_a^b |f|^2 = |\lambda|^2 \, \mathcal{N}_2(f)^2,$$

et l'on en déduit que $\mathcal{N}_2(\lambda f) = |\lambda| \, \mathcal{N}_2(f)$.
- **Inégalité triangulaire.** Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.
L'inégalité triangulaire donne $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, et donc :

$$\mathcal{N}_2(f+g) = \sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b (|f|+|g|)^2} = \mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big). \qquad (1)$$

Mais alors, comme l'application $f \mapsto \mathcal{N}_2(f)$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, nous pouvons appliquer l'inégalité triangulaire associée avec les fonctions $|f|$ et $|g|$:

$$\mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big) \leqslant \mathcal{N}_2(|f|) + \mathcal{N}_2(|g|). \qquad (2)$$

Comme on a $\mathcal{N}_2(|f|) = \mathcal{N}_2(f)$ et $\mathcal{N}_2(|g|) = \mathcal{N}_2(g)$, les relations (1) et (2) permettent de conclure.

Exercice 15 Notons E l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$.

- **Séparation.** Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ vérifie $\varphi(x) = 0$, alors, par définition de φ, on a :
$$N_1(x_1) = \cdots = N_p(x_p) = 0,$$
ce qui, par propriété de séparation des normes N_k, entraîne $x_1 = \cdots = x_p = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.
- **Homogénéité.** Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\varphi(\lambda\, x) = \varphi\big((\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_p)\big) = \max\big(N_1(\lambda\, x_1), \ldots, N_p(\lambda\, x_p)\big)$$
Par homogénéité de chacune des normes $N_1, \ldots, N_p$ donne alors :
$$\varphi(\lambda\, x) = \max\big(|\lambda|\, N_1(x_1), \ldots, |\lambda|\, N_p(x_p)\big) = |\lambda|\, \varphi(x).$$
- **Inégalité triangulaire.** Soit $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ dans E. On a :
$$\varphi(x + y) = \varphi\big((x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)\big) = \max\big(N_1(x_1 + y_1), \ldots, N_p(x_p + y_p)\big).$$
Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi(x + y) = N_k(x_k + y_k)$. L'inégalité triangulaire appliquée avec la norme N_k donne alors le résultat :
$$\varphi(x + y) \leqslant \underbrace{N_k(x_k)}_{\leqslant \varphi(x)} + \underbrace{N_k(y_k)}_{\leqslant \varphi(y)}.$$

Exercice 16

1. Il suffit d'écrire $\mathcal{N}_1(f_n) = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$.
2. (a) La convergence de (f_n) vers f au sens de la norme infinie implique la convergence simple de (f_n) vers f, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \to f(x).$$
En effet, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \to 0.$$
On en déduit que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

   (b) On aboutit à une contradiction, car la fonction f obtenue n'est pas continue.

Proposition 7 Supposons que $\lambda_n \to \alpha$ et $a_n \to \ell$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\lambda_n\, a_n - \alpha\, \ell = \lambda_n\, (a_n - \ell) + (\lambda_n - \alpha)\, \ell,$$
et donc par inégalité triangulaire :
$$\big\|\lambda_n\, a_n - \alpha\, \ell\big\| \leqslant |\lambda_n|\, \|a_n - \ell\| + |\lambda_n - \alpha|\, \|\ell\|.$$

- Puisque la suite (λ_n) converge, elle est bornée. Comme produit d'une suite réelle bornée par une suite réelle qui tend vers 0, on obtient $|\lambda_n|\, \|a_n - \ell\| \to 0$.
- Puisque $\lambda_n \to \alpha$, on a $|\lambda_n - \alpha| \to 0$ et donc $|\lambda_n - \alpha|\, \|\ell\| \to 0$.

On en déduit que $\|\lambda_n\, a_n - \alpha\, \ell\| \to 0$, c'est-à-dire $\lambda_n\, a_n \to \alpha\, \ell$.

Exercice 17 Pour tout $r > 0$, on a $B(a,r) \not\subset \{a\}$ car il existe, dans la boule ouverte $B(a,r)$, d'autres éléments que a. Par exemple, si u est un vecteur non nul de E (un tel vecteur existe car E n'est pas l'espace nul), alors on a :

$$a + \frac{r}{2\|u\|}\, u \in B(a,r) \setminus \{a\}.$$

Donc, a n'est pas un point intérieur au singleton $\{a\}$.

Exercice 18

1. Supposons que x soit intérieur à $A_1, \ldots, A_p$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe $r_k > 0$ tel que $B(x,r_k) \subset A_k$. En notant $r = \min(r_1, \ldots, r_p)$, on a alors $r > 0$ et :

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \quad B(x,r) \subset A_k \quad \text{donc} \quad B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^{p} A_k.$$

   Donc x est un point intérieur à $\bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k$.

2. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\quad \text{ainsi que} \quad A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n.$$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 est évidemment un point intérieur à A_n car la partie A_n est une boule ouverte contenant 0 et incluse dans elle-même.
   - En revanche, on a $A = \{0\}$, car :
     * il est clair que 0 appartient à chacun des ensembles A_n et donc à leur intersection ;
     * si $x \neq 0$, alors on a $x \notin A_n$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{|x|}$, et donc $x \notin A$;

   donc, d'après l'exercice 17 de la page 226, 0 n'est pas un point intérieur à A.

Exercice 19

1. Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(A)$. Par définition de $\mathrm{Int}(A)$, on peut trouver $R > 0$ tel que $B(x,R) \subset A$. Notons $r = \frac{R}{2}$. On constate alors que pour tout $y \in B(x,r)$, on a :

$$B(y,r) \subset B(x,R) \subset A,$$

   et donc $y \in \mathrm{Int}(A)$. Cela prouve que $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(A)$. Donc $\mathrm{Int}(A)$ est un ouvert de E.
2. On sait déjà que l'intérieur de A est un ouvert inclus dans A. Il reste à prouver que si U est un ouvert inclus dans A, alors on a $U \subset \mathrm{Int}(A)$. Soit U un tel ouvert. Pour tout $x \in U$, comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$ et donc $B(x,r) \subset A$, d'où $x \in \mathrm{Int}(A)$.
   On a donc $U \subset \mathrm{Int}(A)$.

Proposition 11 Soit B une boule ouverte. Notons a son centre et R son rayon.

Pour $x \in B$, on a $\|x-a\| < R$, et il est clair, d'après l'inégalité triangulaire, que la boule ouverte de centre x et de rayon $R - \|x-a\|$ est contenue dans B.

En effet, si u vérifie $\|u-x\| < R - \|x-a\|$, alors on a :

$$\|u-a\| \leqslant \|u-x\| + \|x-a\| < R - \|x-a\| + \|x-a\| = R.$$

Donc B est une partie ouverte.

Exercice 20 Soit B une boule de centre a et de rayon r.

- Si B est la boule ouverte $B(a,r)$, alors d'après la proposition 11 de la page 228, B est une partie ouverte et donc est son propre intérieur.
- Supposons que B soit la boule fermée $B_F(a,r)$.
  * Comme $B(a,r)$ est un ouvert contenu dans B, on a $B(a,r) \subset \mathrm{Int}(B)$ d'après la deuxième question de l'exercice 19 de la page 228.
  * Prouvons l'autre inclusion.

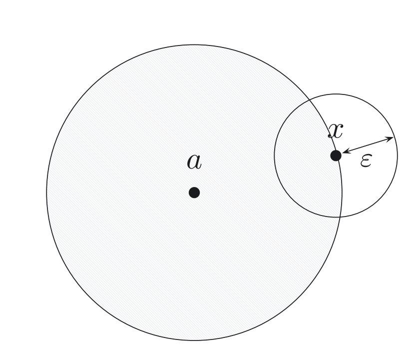
  Si x est un point de $B \setminus B(a,r)$, *i.e.* de la sphère $S(a,r)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $B(x,\varepsilon)$ n'est pas incluse dans B car elle contient le point :

  $$y = x + \frac{\varepsilon}{2\,\|x-a\|}\,(x-a)$$

  qui vérifie :

  $$d(a,y) = r + \frac{\varepsilon}{2} > r,$$

  et donc $x \notin \mathrm{Int}(B)$.

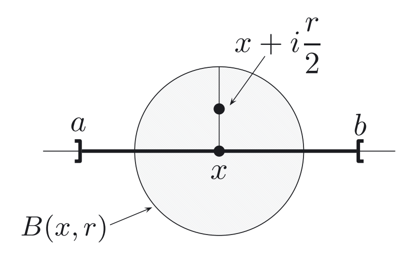


On a donc dans tous les cas $\mathrm{Int}(B) = B(a,r)$.

Exercice 21

1. L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de R, car c'est la boule ouverte de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}\cdot$
2. L'intervalle ouvert $]a,b[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$.

   En effet, pour $x \in \,]a,b[$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x de rayon $r > 0$ n'est pas incluse dans $]a,b[$. Par exemple, le nombre complexe $x + i\dfrac{r}{2}$ appartient à cette boule mais pas à l'intervalle $]a,b[$.



Proposition 12

- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, et U leur réunion. Pour $x \in U$, on peut trouver $i \in I$ tel que x appartienne à U_i. Comme U_i est ouvert, il existe une boule

ouverte centrée en x et de rayon strictement positif qui soit contenue dans U_i, et donc dans U. Donc U est un ouvert.

- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts, et U leur intersection.
  Soit $x \in U$. Pour tout $i \in I$, l'ensemble U_i est un ouvert, donc on peut trouver $r_i > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r_i)$ soit contenue dans U_i.
  Puisque I est fini, le nombre réel :
  $$r = \min_{i\in I}(r_i)$$
  existe et est strictement positif. La boule ouverte $B(x, r)$ est alors contenue dans chacun des U_i, et donc dans leur intersection U.
  Donc U est un ouvert.

Exercice 22 Soit U une partie ouverte de E. Soit $x \in U$; toute boule centrée en x et de rayon suffisamment petit est incluse dans U. En notant, par exemple :
$$n_x = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U\right\},$$
et en notant $r_x = \dfrac{1}{n_x}$, alors on a $B(x, r_x) \subset U$. On a alors par double inclusion :
$$U = \bigcup_{x\in U} B(x, r_x).$$

Exercice 23 Notons $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$. On a $A = \{0\}$ (*cf.* exercice 18 de la page 227) donc A n'est pas un ouvert car pour tout $r > 0$, la boule ouverte centrée en 0 et de rayon r (c'est-à-dire l'intervalle $]-r, r[$) n'est pas incluse dans A.

Proposition 13

- Soit x un point adhérent à A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(x, 2^{-n}) \cap A$ est non vide, ce qui nous permet d'y choisir un élément a_n. On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x puisque :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(a_n, x) \leqslant 2^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- Réciproquement, supposons que x soit limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, et montrons que x est adhérent à A. Soit $r > 0$. Montrons que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.
  Comme $a_n \to x$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\|a_{n_0} - x\| < r$. Alors, a_{n_0} appartient à la fois à A et à $B(x, r)$, et donc $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Exercice 24 Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Tout d'abord, $\overline{F}$ contient F et donc contient le vecteur nul.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \overline{F}^2$; montrons que $\lambda x + y \in \overline{F}$. Comme x et y appartiennent à $\overline{F}$, il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. La suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de F convergeant vers $\lambda x + y$; cela prouve, par caractérisation séquentielle, que $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Proposition 14

- $(i) \Longleftrightarrow (ii)$
  - $*$ En tout généralité, on a $A \subset \mathrm{Adh}(A)$. L'assertion (i) est donc équivalente à $\mathrm{Adh}(A) \subset A$.
  - $*$ D'autre part, il a été vu que l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites à valeurs dans A qui convergent. L'assertion (ii) est donc équivalente à $\mathrm{Adh}(A) \subset A$.

  D'où l'équivalence entre (i) et (ii).
- $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ Il a été vu (*cf.* remarque de la page 230) que :
$$\mathrm{Int}(E \setminus A) = E \setminus \mathrm{Adh}(A)$$
  et donc :
$$\mathrm{Adh}(A) = A \Longleftrightarrow \mathrm{Int}(E \setminus A) = E \setminus A.$$
  Puisqu'une partie est ouverte si, et seulement si, elle est égale à son intérieur, l'équivalence précédente n'est rien d'autre que $(i) \Longleftrightarrow (iii)$.

Exercice 25 Les complémentaires des intervalles $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$ et $[a, b]$ sont respectivement $]b, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 26

1. On a vu (*cf.* résultats de la page 230) que l'adhérence de A vérifie :
$$\mathrm{Adh}(A) = E \setminus \big(\mathrm{Int}(E \setminus A)\big).$$
Comme $\mathrm{Int}(E \setminus A)$ est un ouvert de E, il en résulte, par passage au complémentaire, que $\mathrm{Adh}(A)$ est un fermé de E.
2. Il a été vu que l'adhérence de A est un fermé contenant A. Il reste à démontrer que c'est le plus petit, c'est-à-dire que tout fermé contenant A contient aussi $\mathrm{Adh}(A)$.
Soit F un fermé contenant A. Alors $E \setminus F$ est un ouvert inclus dans $E \setminus A$, ce qui entraîne $\mathrm{Int}(E \setminus F) \subset \mathrm{Int}(E \setminus A)$ et donc, puisque $E \setminus F$ est un ouvert et est ainsi égal à son intérieur :
$$E \setminus F \subset \mathrm{Int}(E \setminus A).$$
En prenant le complémentaire de chacun des ensembles, on obtient :
$$\underbrace{E \setminus \big(\mathrm{Int}(E \setminus A)\big)}_{=\mathrm{Adh}(A)} \subset F,$$
ce qui donne le résultat souhaité.

Proposition 15 Soit B une boule fermée. Notons a son centre et R son rayon.
Pour $x \in E \setminus B$, on a $\|x - a\| > R$, et il est clair que la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x - a\| - R$ est incluse dans $E \setminus B$.
En effet, si u vérifie $\|u - x\| < \|x - a\| - R$, alors on a :
$$\begin{aligned} \|u - a\| &\geqslant \|x - a\| - \|u - x\| && \text{(seconde inégalité triangulaire)} \\ &> \|x - a\| - \big(\|x - a\| - R\big) = R, \end{aligned}$$
et donc $u \in E \setminus B$.
Cela montre que $E \setminus B$ est une partie ouverte, et donc que B est une partie fermée.

Exercice 27 Soit B une boule de centre a et de rayon r.

- Si B est la boule fermée $B_F(a,r)$, alors d'après la proposition 15 de la page 231, B est fermée et donc est sa propre adhérence.
- Supposons que B soit la boule ouverte $B(a,r)$.
  * Comme $B_F(a,r)$ est un fermé contenant B, on a $\mathrm{Adh}(B) \subset B_F(a,r)$.
  * Prouvons l'autre inclusion par caractérisation séquentielle : tout point $x \in B_F(a,r)$ est limite d'une suite de points appartenant à B :
$$x = \lim_{n\to+\infty} \big(a + (1-2^{-n})\,(x-a)\big).$$

On a donc dans tous les cas $\mathrm{Adh}(B) = B_F(a,r)$.

Exercice 28 Soit S une sphère. Notons a son centre et r son rayon. Par définition, on a $S = B_F(a,r) \setminus B(a,r)$, c'est-à-dire $S = B_F(a,r) \cap \big(E \setminus B(a,r)\big)$.

Comme la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert, son complémentaire est un fermé. Ainsi, la partie S est l'intersection de deux parties fermées, donc est fermée.

Exercice 29
On a $A = \,]0,1[$. En effet :

- pour tout $n \geqslant 2$, on a $F_n \subset \,]0,1[$, et donc $A \subset \,]0,1[$;
- si $x \in \,]0,1[$, alors on a $x \in F_n$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\min(|x|,|x-1|)}$, et donc $x \in A$.

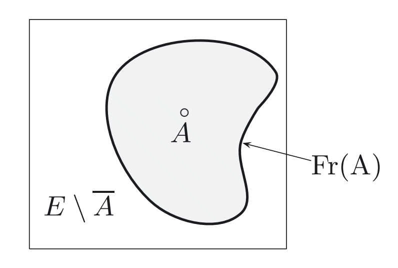
L'ensemble A n'est pas fermé ; prouvons-le de deux manières :

- *première méthode, par caractérisation séquentielle :* la suite de terme général $1/n$ pour $n \geqslant 2$ est à valeurs dans A et tend vers $0 \notin A$;
- *deuxième méthode :* le complémentaire de A : $\mathbb{R} \setminus A = \,]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, n'est pas ouvert, car il contient 1 mais ne contient aucune boule centrée en 1.

Exercice 30 Par définition, on a $\mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Adh}(B) \setminus \mathrm{Int}(B)$. D'après les exercices 20 de la page 228 et 27 de la page 231, on a :
$$\mathrm{Adh}(B) = B_F(a,r) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Int}(B) = B(a,r).$$
On obtient $\mathrm{Fr}(B) = B_F(a,r) \setminus B(a,r)$, c'est donc la sphère de centre a et de rayon r.

Exercice 31
Sachant que $\mathring{A} \subset \overline{A}$, la relation $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ assure que $\mathring{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont disjointes puis que leur réunion vaut $\overline{A}$.

Par suite, les trois parties $\mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $E \setminus \overline{A}$ sont deux à deux disjointes et leur réunion vaut E.



Lemme 17 Supposons que f tende vers ℓ en a et montrons que ℓ est adhérent à $f(A)$. Il s'agit, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, de montrer que $f(A) \cap B_F(\ell,\varepsilon) \neq \varnothing$.
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \quad \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
Il suffit donc de trouver au moins un élément $x \in A$ tel que $\|x-a\| \leqslant \eta$. Un tel x existe car a est adhérent à A.

Proposition 18

- Supposons que f tend vers ℓ en a. Soit (u_n) une suite tendant vers a. Montrons que $f(u_n) \to \ell$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\| f(u_n) - \ell \big\| \leqslant \varepsilon. \qquad (\star)$$
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\| f(x) - \ell \big\| \leqslant \varepsilon.$$
La convergence de la suite (u_n) vers a assure alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$
La suite (u_n) étant à valeurs dans A, ce rang n_0 vérifie la propriété $(\star)$.
- Montrons l'autre implication par la contraposée : supposons que f ne tende pas vers ℓ en a, et construisons une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ. Le fait que f ne tende pas vers ℓ en a s'écrit :
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$
Cela nous assure de pouvoir trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $u_n \in A$ vérifiant :
$$\|u_n - a\| \leqslant 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f(u_n) - \ell\| \geqslant \varepsilon.$$
On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers a et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ.

Exercice 32 C'est immédiat par caractérisation séquentielle. En effet, si (u_n) est une suite d'éléments de B tendant vers a, alors (u_n) étant également une suite à valeurs dans A, et comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on a $f(u_n) \to \ell$, et donc $f_{|B}(u_n) \to \ell$.

Proposition 21 Supposons que $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f_1(u_n) \to \ell_1$ et $f_2(u_n) \to \ell_2$. Donc, par opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\lambda_1 f(u_n) + \lambda_2 f_2(u_n)$ tend vers $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2$.
Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :
$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Proposition 22 Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $\varphi \underset{a}{\longrightarrow} \lambda$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f(u_n) \to \ell$ et $\varphi(u_n) \to \lambda$. Donc, par produit d'une suite convergente avec une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$, la suite de terme général $\varphi(u_n)f(u_n)$ tend vers $\lambda\,\ell$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :
$$\varphi \times f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda\,\ell.$$

Proposition 23 Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a.
On a alors $f(u_n) \to \ell$ et donc, comme $\ell \neq 0$, on a, par opérations sur les suites à valeurs scalaires, $\dfrac{1}{f(u_n)} \to \dfrac{1}{\ell}$.
Par caractérisation séquentielle de la limite, cela prouve que $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Proposition 24 Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a.
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, on a $\big(f(u_n)\big) \to b$. Cela montre déjà que b est un point adhérent à $f(A)$, et donc à B. Puis, comme $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, la suite de terme général $g\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.
Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 33 Pour tout $b \in B$, comme f est continue, donc en particulier continue en b, on a $f \underset{b}{\longrightarrow} f(b)$. Par stabilité de la limite par restriction (*cf.* exercice 32 de la page 234), on a donc également $f_{|B} \underset{b}{\longrightarrow} f(b) = f_{|B}(b)$. Par suite, $f_{|B}$ est continue en b.

Exercice 34 Notons respectivement α et β les extrémités inférieures et supérieures de I (on a donc $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$). Supposons que pour tout $[a,b] \subset I$, la restriction de f à $[a,b]$ soit continue, et montrons que f est continue.
Soit $x \in I$. Montrons que f est continue au point x par caractérisation séquentielle : soit (u_n) une suite à valeurs dans I tendant vers x. Montrons que $f(u_n) \to f(x)$.
Justifions d'abord que pour $\eta > 0$ suffisamment petit, l'ensemble $I \cap [x-\eta, x+\eta]$ est un segment de I :

- si x n'est pas une extrémité de I, alors, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on a $[x-\eta, x+\eta] \subset I$ et donc $I \cap [x-\eta, x+\eta] = [x-\eta, x+\eta]$;
- si $x = \alpha$ (ce qui sous-entend $\alpha \neq -\infty$ et $\alpha \in I$), alors, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on a $I \cap [x-\eta, x+\eta] = [\alpha, x+\eta]$;
- si $x = \beta$ (ce qui sous-entend $\beta \neq +\infty$ et $\beta \in I$), alors, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on a $I \cap [x-\eta, x+\eta] = [x-\eta, \beta]$.

Fixons un tel $\eta > 0$ tel que $I \cap [x-\eta, x+\eta]$ soit un segment de I et notons $\tilde{f}$ la restriction de f à ce segment. Par hypothèse, $\tilde{f}$ est continue.

Comme la suite (u_n) tend vers x, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait :

$$|u_n - x| \leqslant \eta \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u_n \in I \cap [x-\eta, x+\eta].$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $f(u_n) = \tilde{f}(u_n)$.

Comme $\tilde{f}$ est continue, elle est en particulier continue au point x. On a donc $\tilde{f}(u_n) \to \tilde{f}(x)$, ce qui s'écrit aussi $f(u_n) \to f(x)$.

D'où la continuité de f au point x.

Exercice 35

- Par définition, si u est continue, alors u est continue en tout point de E et donc en particulier en 0.
- Réciproquement, supposons u continue en 0. Soit $a \in E$; montrons que u est continue au point a. On a par linéarité de u :

$$\forall x \in E \quad u(x) = u(a) + u(x-a). \tag{$\star$}$$

Comme $x - a \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et par continuité de u en 0, on a $u(x-a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} u(0) = 0$.
La relation $(\star)$ donne donc :

$$u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} u(a),$$

ce qui prouve que u est continue en a.

Proposition 25 Soit $f : A \to F$ une application k-lipschitzienne ; d'après le premier résultat ci-dessus on peut supposer $k > 0$. Montrons que f est continue. Pour cela, fixons $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(a)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f est k-lipschitzienne, il est clair que $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ convient.

Exercice 36 Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartenant à E^2. On a :

$$\big|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)\big| = \big|\|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\|\big|$$

donc, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)\big| &\leqslant \big\|(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\big\| \\ &= \big\|(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\big\| \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|.\end{aligned}$$

Par définition de la norme produit, on obtient :

$$\big|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)\big| \leqslant 2\, N\big((x_1, y_1) - (x_2, y_2)\big),$$

ce qui prouve que l'application d est 2-lipschitzienne.

Exercice 37

- Il est clair que si u est k-lipschitzienne, alors pour tout $x \in E$ on a

$$\big\|u(x) - u(0)\big\| \leqslant k\|x - 0\|,$$

c'est-à-dire $\big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.

- Réciproquement, supposons que : $\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.
Pour x et y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\big\|u(x) - u(y)\big\| &= \big\|u(x - y)\big\| && \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &\leqslant k\|x - y\| && \text{(par hypothèse sur } u\text{)}\end{aligned}$$

ce qui montre que u est k-lipschitzienne.

Exercice 38 Soit $(x,y) \in E^2$. Prouvons que
$$\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|.$$

- Pour tout $a \in A$, on a par inégalité triangulaire :
$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a)$$
et donc, comme par définition on a $d(x,A) \leqslant d(x,a)$, on obtient :
$$d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,a) \qquad \text{ou encore} \qquad d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,a).$$
Ainsi, $d(x,A) - d(x,y)$ est un minorant de l'ensemble $\{d(y,a)\,;\ a \in A\}$ et donc est plus petit que sa borne inférieure :
$$d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,A)$$
ou encore
$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y). \tag{1}$$
- En échangeant les rôles de x et y dans le résultat précédent, on obtient :
$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(x,y) \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) donnent finalement le résultat souhaité :
$$\big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant |x-y|.$$

Exercice 39 Il suffit de constater que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est la composée des deux applications continues f et $y \mapsto \|y\|$ (la continuité de l'application $y \mapsto \|y\|$ a été donnée en exemple page 238).

Proposition 28

1. - Notons $A = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$. Montrons que A est un fermé de E par caractérisation séquentielle. Soit (u_n) une suite d'éléments de A convergeant vers un élément $\ell \in E$. Par définition de A, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = 0.$$
   De plus, comme $u_n \to \ell$ et par continuité de f, on a $f(u_n) \to f(\ell)$. On en déduit que $f(\ell) = 0$, *i.e.* $\ell \in A$. D'où le caractère fermé de A.
   - De la même manière, si (u_n) est une suite à valeurs dans $B = \{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$, alors on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \geqslant 0.$$
   Si l'on suppose que (u_n) converge vers un élément $\ell \in E$, alors par continuité de f on a $f(u_n) \to f(\ell)$, et donc par passage à la limite dans une inégalité, on obtient $f(\ell) \geqslant 0$, *i.e.* $\ell \in B$. Donc B est un fermé de E.
2. Notons $U = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$. On constate que :
   $$E \setminus U = \{x \in E \mid f(x) \leqslant 0\} = \{x \in E \mid -f(x) \geqslant 0\}.$$
   En appliquant le premier résultat déjà démontré à la fonction continue $-f$, on obtient que $E \setminus U$ est un fermé de E, *i.e.* U est un ouvert de E.

Exercice 40

1. Un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à A si, et seulement si :
$$x > 0, \qquad y - x > 0 \qquad \text{et} \qquad 1 - y > 0.$$
Autrement dit, en considérant les applications :
$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y - x \end{array} \qquad \text{et} \quad \varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 1 - y \end{array}$$
on a :
$$A = \varphi_1^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap \varphi_2^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap \varphi_3^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$
Comme les applications φ_1, φ_2 et φ_3 sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\varphi_1^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $\varphi_2^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\varphi_3^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Comme intersection d'un nombre fini d'ouverts, A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. En reprenant les applications φ_1, φ_2 et φ_3 de la question précédente, on a :
$$B = \varphi_1^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \varphi_2^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \varphi_3^{-1}(\mathbb{R}_+).$$
Comme les applications φ_1, φ_2 et φ_3 sont continues, A est l'intersection de trois fermés de $\mathbb{R}^2$, donc est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 41

1. Soit A un fermé de F. Montrons que $f^{-1}(A)$ est un fermé de E. Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (u_n) une suite d'éléments de $f^{-1}(A)$ tendant vers ℓ. Montrons que $\ell \in f^{-1}(A)$, c'est-à-dire $f(\ell) \in A$.

   Comme $u_n \to \ell$ et par continuité de f, on a $f(u_n) \to f(\ell)$. Comme $\big(f(u_n)\big)$ est une suite à valeurs dans A et comme A est fermée, on en déduit que $f(\ell) \in A$.
2. Soit U un ouvert de F. Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.
Soit $A = F \setminus U$. Comme U est un ouvert de F, A est un fermé de F. D'après la première question, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E. Comme on a de plus :
$$f^{-1}(U) = f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A),$$
il en résulte que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.

S'entraîner et approfondir

Normes

5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ par :

$$\|P\| = \max\left\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_{n+1})|\right\}.$$

5.2 Montrer que l'application suivante est une norme sur $\mathbb{K}[X]$:

$$N \ : \ P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} \left|P(t) - P'(t)\right|.$$

5.3 1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Supposons que l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E ainsi que d'une application linéaire injective $u : F \to E$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N \ : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$$

est une norme sur F.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Notons $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.
Soit $\omega : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue et à valeurs strictement positives. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b \omega(x)\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \end{array}$$

est une norme sur E.

3. On pose :

$$E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}.$$

(a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'application $f \mapsto \mathcal{N}_\infty(f'' + 2f' + f)$ est une norme sur E, où $\mathcal{N}_\infty$ désigne la norme infinie de l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

5.4 Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. (a) Montrer que si N est une norme euclidienne, alors on a l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2.$$

(b) Donner une expression du produit scalaire en fonction de N.

(c) La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifie-t-elle l'identité du parallélogramme ?

2. On suppose que la norme N vérifie l'identité du parallélogramme.
   On pose, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$f(x,y) = N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall (x,x',y) \in E^3 \quad f(x+x',y) = 2\,f\Big(x,\frac{y}{2}\Big) + 2\,f\Big(x',\frac{y}{2}\Big).$$

   (b) En déduire que : $\forall (x,x',y) \in E^3 \quad f(x+x',y) = f(x,y) + f(x',y)$.
   (c) Montrer que : $\forall (x,y,t) \in E \times E \times \mathbb{R} \quad f(tx,y) = t\,f(x,y)$.
   (d) En déduire que N est une norme euclidienne.

5.5 Soit n un entier au moins égal à 2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \|AB\| = \|BA\| \ ?$$

⋆ **5.6** Soit n un entier au moins égal à 2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables quelconques aient même norme ?
Indication : commencer par le cas $n = 2$, et trouver une matrice A non nulle telle que A et $2A$ soient semblables.

Topologie

5.7 Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si F est un ouvert de E alors $F = E$.

5.8 Supposons que E ne soit pas l'espace nul. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E ainsi que A une partie ouverte non vide de F.
Montrer que A n'est pas une partie ouverte de E.

5.9 1. Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe.
2. Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

5.10 Si u est une suite de nombres complexes, on dit que $a \in \mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une sous-suite de u convergeant vers a.
On note $\mathcal{V}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

1. Montrer que $a \in \mathcal{V}(u)$ si, et seulement si, toute boule ouverte centrée en a contient une infinité d'éléments de u.
2. Montrer que $\mathcal{V}(u)$ est fermé.

5.11 On se place dans l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0 \quad \mathcal{N}_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Notons $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1 et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0. Déterminer la distance de a à $\mathcal{C}_0$.

5.12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n, que l'on munit de la norme infinie :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X] \quad \|P\|_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|.$$

1. Montrer que pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathcal{U}_j$ des polynômes unitaires de degré j est un fermé de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Indication : exprimer $\mathcal{U}_j$ comme une image réciproque.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ unitaires est un fermé.

⋆⋆ **5.13** On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \quad \|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des polynômes unitaires est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes unitaires et scindés dans $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

⋆ **5.14** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Quelles sont les parties de E dont la frontière est vide ?
2. Quelles sont les parties de E qui sont à la fois des ouverts et des fermés de E ?

5.15 Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions s'annulant en 0 et en 1.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes infinie et un :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Limites, continuité

5.16 On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes :

$$\varphi_1 : f \mapsto f(1) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$$

sont-elles continues pour la norme $\mathcal{N}_\infty$? pour la norme $\mathcal{N}_1$?

5.17 Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $f : A \to F$ une application continue, où A est une partie de E. Montrer que l'image par f d'une partie dense dans A est dense dans $f(A)$.

5.18 Séparation de fermés disjoints
Soit E un espace vectoriel normé. On considère deux parties A et B fermées disjointes et non vides de E. Pour $x \in E$, on note :

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \qquad \text{et} \qquad d(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b).$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in E \setminus A \quad d(x,A) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \setminus B \quad d(x,B) > 0.$$

2. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

Indication : créer f à l'aide des applications $x \mapsto d(x,A)$ et $x \mapsto d(x,B)$.

3. On pose :

$$U = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) \qquad \text{et} \qquad V = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right).$$

Montrer que U et V sont deux ouverts vérifiant :

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing.$$

5.19 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées et F l'espace vectoriel des suites réelles dont la série associée est absolument convergente.
Pour $u \in E$ et $v \in F$, on pose :

$$N_E(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad \widetilde{N}_F(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|.$$

1. Quelle est la relation d'inclusion entre E et F ? Ces espaces sont-ils de dimension finie ?
2. Pour $u \in E$ et $v \in F$ on note :

$$T_v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n v_n \end{array} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{T}_u : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n u_n. \end{array}$$

Montrer que ces applications sont bien définies, linéaires et lipschitziennes.

5.20 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que u est continue si, et seulement si, la restriction de u à la boule unité fermée $B_F(0,1)$ de E est bornée.
2. Montrer que u est continue si, et seulement si, la partie :
$$A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$$
est un fermé de E.

★ **5.21** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
Montrer que φ est continue si, et seulement si, son noyau est un fermé de E.
On pourra utiliser le résultat de la deuxième question de l'exercice 5.20.

★ **5.22** On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :
$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Montrer que :
$$F = \operatorname{Vect}\left\{e^{(n)}\,;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
est dense dans ℓ^1.
2. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{array}$$
est une application linéaire continue de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$.
3. Réciproquement, montrer que toute application linéaire continue de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ est de la forme φ_a avec a une suite réelle bornée.

5.23 Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note f_x et f_y les applications partielles :
$$\begin{array}{rccl} f_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccl} f_y : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t,y) \end{array}$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si f est continue en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors ses applications partielles f_x et f_y sont continues respectivement en y et en x.

L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot$$

2. Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles f_x et f_y sont continues.
3. Montrer que, pourtant, l'application f n'est pas continue.

5.24 (Une limite dans chaque direction, mais pas de limite)
Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles. Notons Δ la première bissectrice, *i.e.* :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

et considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_\theta \ : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

   possède une limite en 0.
2. Montrer que, pourtant, f ne possède pas de limite en $(0,0)$.

⋆ **5.25** Soit X une partie de A dense dans A, et $f : X \to F$ une application continue en tout point de X. On suppose que f admet une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f} : A \to F$ continu en tout point de A.

Solution des exercices

5.1 Commençons par constater que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, la quantité $\|P\|$ est bien définie car c'est le maximum d'un ensemble fini et non vide.

- **Séparation.** Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifie $\|P\| = 0$, alors il possède $n+1$ racines distinctes : $a_1, \ldots, a_{n+1}$. C'est donc le polynôme nul.
- **Homogénéité.** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
$$\begin{aligned}\|\lambda P\| &= \max\big\{|\lambda P(a_1)|, \ldots, |\lambda P(a_{n+1})|\big\}\\ &= |\lambda| \max\big\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_{n+1})|\big\} = |\lambda|\ \|P\|.\end{aligned}$$
- **Inégalité triangulaire.** Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$. On a :
$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad |P(a_k) + Q(a_k)| \leqslant |P(a_k)| + |Q(a_k)| \leqslant \|P\| + \|Q\|,$$
et donc :
$$\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

5.2
- Comme la fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est continue, elle est bornée sur le segment $[0,1]$; l'application N est donc bien définie.
- Notons $\mathcal{N}_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$.
  - ∗ **Homogénéité.** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On a, par homogénéité de $\mathcal{N}_\infty$:
  $$N(\lambda P) = \mathcal{N}_\infty(\lambda P - \lambda P') = \mathcal{N}_\infty\big(\lambda(P - P')\big) = |\lambda|\ \mathcal{N}_\infty(P - P') = |\lambda|\ N(P).$$
  - ∗ **Inégalité triangulaire.** Pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a, via l'inégalité triangulaire de $\mathcal{N}_\infty$:
  $$\begin{aligned}N(P+Q) &= \mathcal{N}_\infty\big((P+Q) - (P'+Q')\big)\\ &= \mathcal{N}_\infty\big((P-P') + (Q-Q')\big)\\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(P-P') + \mathcal{N}_\infty(Q-Q') = N(P) + N(Q).\end{aligned}$$
  - ∗ **Séparation.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $N(P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est alors nulle sur $[0,1]$, et donc le polynôme $P - P'$, admettant une infinité de racines, est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui prouve que P est le polynôme nul (c'est en effet le seul polynôme ayant même degré que son polynôme dérivé).

  Cela prouve que N est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

5.3 1. Vérifions les trois propriétés de séparation, homogénéité et inégalité triangulaire :
- *Séparation.* Si $x \in F$ vérifie $N(x) = 0$, c'est-à-dire $\|u(x)\| = 0$, alors la propriété de séparation de $\|\cdot\|$ implique $u(x) = 0$ puis, comme u est injective, $x = 0$.
- *Homogénéité.* Pour $(x, \lambda) \in F \times \mathbb{K}$, on a, par linéarité de u et homogénéité de $\|\cdot\|$:
$$N(\lambda x) = \big\|u(\lambda x)\big\| = \big\|\lambda\, u(x)\big\| = |\lambda|\ \big\|u(x)\big\| = |\lambda|\, N(x).$$

- *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in F^2$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|\cdot\|$:

$$N(x+y) = \big\|u(x+y)\big\| = \big\|u(x)+u(y)\big\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x) + N(y).$$

2. Notons $\mathcal{N}_1$ la norme un sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ définie par $\mathcal{N}_1(f) = \displaystyle\int_a^b |f|$.

   Le résultat souhaité est une application directe de la première question, car on a :

$$\forall f \in E \quad N(f) = \mathcal{N}_1\big(u(f)\big),$$

   où u est l'application linéaire injective suivante :

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \omega\, f. \end{array}$$

   Remarque Pour l'injectivité de u, le fait que ω ne s'annule pas est important.

3. (a) L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ car c'est le noyau de l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto & \big(f(0), f'(0)\big). \end{array}$$

   (b) On a $N = \mathcal{N}_\infty \circ \varphi$ où φ est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E & \longrightarrow & \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f'' + 2f' + f \end{array}$$

   Pour prouver que N est une norme, il suffit, d'après la première question, de prouver que φ est injective. C'est évident car le noyau de φ est l'ensemble des solutions du problème de Cauchy :

$$f'' + 2f' + f = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = f'(0) = 0$$

   dont on sait que l'unique solution est la fonction nulle.

5.4 1. (a) C'est un résultat de cours, qui s'obtient en utilisant les propriétés calculatoires du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ associé à la norme N (bilinéarité et symétrie).

   Soit $(x,y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 = (\,x+y \mid x+y\,) &= (\,x \mid x\,) + (\,y \mid y\,) + 2(\,x \mid y\,) \\ &= N(x)^2 + N(y)^2 + 2(\,x \mid y\,) \qquad (\star) \end{aligned}$$

   et de la même manière : $N(x-y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2 - 2(\,x \mid y\,)$.

   En sommant, on obtient l'identité du parallélogramme.

   (b) La relation $(\star)$ obtenue précédemment permet d'exprimer le produit scalaire en fonction de N :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\,x \mid y\,) = \frac{1}{2}\big(N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\big).$$

(c) La norme $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie par l'identité du parallélogramme. Par exemple, en prenant $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$, on a :
$$N(x) = N(y) = N(x+y) = N(x-y) = 1,$$
ce qui donne :
$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2 \quad \text{alors que} \quad 2N(x)^2 + 2N(y)^2 = 4.$$

2. (a) Soit $(x, x', y) \in E^3$. On a, par définition de f :
$$\begin{aligned} f(x+x', y) &= N(x+x'+y)^2 - N(x+x')^2 - N(y)^2 \\ &= N\left(\left(x+\frac{y}{2}\right) + \left(x' + \frac{y}{2}\right)\right)^2 - N(x+x')^2 - N(y)^2. \end{aligned}$$
L'identité du parallélogramme donne :
$$N\left(\left(x+\frac{y}{2}\right) + \left(x'+\frac{y}{2}\right)\right)^2 = 2N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + 2N\left(x'+\frac{y}{2}\right)^2 - N(x-x')^2.$$
Cela donne, en reprenant le calcul précédent :
$$f(x+x', y) = 2N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + 2N\left(x'+\frac{y}{2}\right)^2 - \left(N(x-x')^2 + N(x+x')^2\right) - N(y)^2.$$
Toujours par l'identité du parallélogramme, on a :
$$N(x-x')^2 + N(x+x')^2 = 2N(x)^2 + 2N(x')^2$$
et par homogénéité, on a $N(y)^2 = 4N\left(\frac{y}{2}\right)^2$.
Le calcul précédent se poursuit donc ainsi :
$$\begin{aligned} f(x+x', y) &= 2\left(N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - N(x)^2 - N\left(\frac{y}{2}\right)^2 + N\left(x'+\frac{y}{2}\right)^2 - N(x')^2 - N\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) \\ &= 2\left(f\left(x, \frac{y}{2}\right) + f\left(x', \frac{y}{2}\right)\right), \end{aligned}$$
ce qui est le résultat souhaité.

(b) Compte tenu du résultat obtenu à la question précédente, il suffit ici de prouver que :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad f\left(x, \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x,y).$$
Soit $(x,y) \in E^2$. On a :
$$f\left(x, \frac{y}{2}\right) = N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - N(x)^2 - N\left(\frac{y}{2}\right)^2. \qquad (\star\star)$$
L'identité du parallélogramme nous donne :
$$N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + N\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(N(x+y)^2 + N(x)^2\right)$$
puis (en utilisant l'homogénéité) :
$$N\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}N(x+y)^2 + \frac{1}{2}N(x)^2 - \frac{1}{4}N(y)^2.$$

La relation $(\star\star)$ mène alors à :

$$f\Big(x,\frac{y}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\Big) = \frac{1}{2}\,f(x,y).$$

(c) Soit $(x,y) \in E^2$.

- Le résultat de la question précédente donne en particulier (avec $x' = x$) :
$$f(2x,y) = 2f(x,y).$$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx,y) = nf(x,y).$$
- Le résultat de la question précédente donne, pour tout $(u,v) \in E^2$:
$$f(0,v) = f(u-u,v) = f(u,v) + f(-u,v)$$
et donc, puisque $f(0,v) = 0$, on a $f(-u,v) = -f(u,v)$.
Cela nous permet d'étendre le résultat de la récurrence précédente :
$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad f(px,y) = pf(x,y).$$
- Alors, pour $r \in \mathbb{Q}$, en écrivant $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a :
$$qrf(x,y) = f(qrx,y) = qf(rx,y) \quad \text{et donc} \quad f(rx,y) = rf(x,y).$$
- Soit enfin $t \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) de nombres rationnels tendant vers t. D'après la pastille précédente, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(r_n x,y) = r_n f(x,y). \qquad (\Delta)$$
  * On a d'une part $r_n f(x,y) \to tf(x,y)$;
  * d'autre part, par continuité de la norme, et par opérations sur les fonctions continues, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda x,y) \end{array}$ est continue ; il en résulte par composition de limites :
$$f(r_n x,y) \to f(tx,y).$$

Ainsi, un passage à la limite dans la relation (Δ) donne, par unicité de la limite, $f(tx,y) = tf(x,y)$, ce qui est le résultat attendu.

(d)
- Justifions que l'application f est un produit scalaire.
  * La symétrie est évidente, en revenant à la définition de f.
  * La linéarité par rapport à la première variable a été obtenue à la question précédente. Par symétrie, on en déduit la linéarité par rapport à la seconde variable.
  * Pour $x \in E$, on a $f(x,x) = N(2x)^2 - N(x)^2 - N(x)^2 = 2N(x)^2$ et donc, comme N est une norme, cela prouve le caractère défini positif de f.

  Par suite, f est un produit scalaire.
- Puisque f est un produit scalaire, il est immédiat que l'application
$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(x,y)}{2} \end{array}$$
en est également un, et l'on constate que c'est le produit scalaire dont N est la norme euclidienne associée.

5.5 Supposons qu'une telle norme existe. Si l'on trouve $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = 0$ et $BA \neq 0$, alors la relation $\|AB\| = \|BA\|$ entrera en contradiction avec la propriété de séparation. Notons $E_{i,j}$ les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si l'on pose :

$$A = E_{1,1} \qquad \text{et} \qquad B = E_{1,2}$$

alors on a :

$$AB = E_{1,2} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad BA = 0.$$

D'où le résultat.

5.6

- **Commençons par le cas $n = 2$.** Supposons qu'une telle norme $\|\cdot\|$ existe. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et $2A$ sont semblables car si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A, et si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2)$ est $2A$.
  Par suite, on a $\|A\| = \|2A\|$. Par propriété d'homogénéité, on a alors $\|A\| = 2\|A\|$, et donc $\|A\| = 0$. Comme $A \neq 0$, cela contredit la propriété de séparation.
- **Cas général.** Ce qui précède s'étend pour $n \geqslant 2$ quelconque en considérant la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & (0) \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(0)} & (0) \end{array}\right)$, dont on montre qu'elle est semblable à $2A$.
  En effet, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, et si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est $2A$.

5.7 Supposons que F soit un ouvert de E. Étant donné que $0 \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel) et que F est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset F$.
Soit x un vecteur non nul de E. Posons :

$$u = \frac{r}{2\|x\|} x.$$

On a $\|u\| = \dfrac{r}{2}$, donc u appartient à $B(0, r)$ et donc à F. Comme F est un sous-espace vectoriel et que $x = \dfrac{2\|x\|}{r} u$, la stabilité de F par multiplication par un scalaire donne $x \in F$. D'où $F = E$.

5.8 *Cet exercice est la généralisation de ce qui a été vu à l'exercice 21 de la page 228.*
La partie A étant non vide, on peut considérer $a \in A$. Montrons que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ n'est pas incluse dans A, ce qui prouvera que A n'est pas une partie ouverte.
Puisque F est un sous-espace vectoriel strict de E, on peut se donner x un élément appartenant à E mais pas à F. En posant alors :

$$u = \frac{r}{2\,\|x\|}\, x,$$

on constate que :

$$\|u\| = \frac{r}{2} < r \quad \text{donc} \quad a + u \in B(a,r)$$

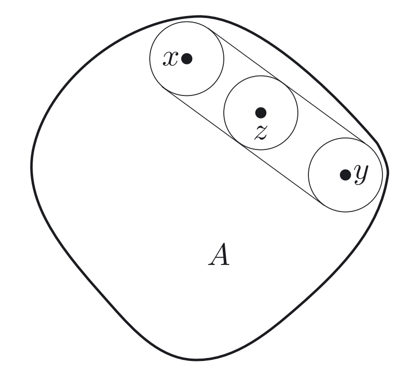
et

$$a \in F \quad \text{et} \quad u \notin F \quad \text{donc} \quad a + u \notin F.$$

Donc la boule $B(a,r)$ n'est pas incluse dans F et donc *a fortiori* pas incluse dans A.

5.9 Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrons que $\mathrm{Adh}(C)$ est convexe. Soit $(x,y,\lambda) \in \mathrm{Adh}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
   Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de C convergeant vers x et y respectivement.
   Par convexité de C, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda u_n + (1-\lambda)v_n \in C.$$
   Comme de plus $\lambda u_n + (1-\lambda)v_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$, on a, comme $\mathrm{Adh}(C)$ est un fermé, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
2. Montrons que $\mathrm{Int}(C)$ est convexe. Soit $(x,y,\lambda) \in \mathrm{Int}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Int}(C)$. Puisque x et y appartiennent à l'intérieur de C, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que :
   $$B(x,r_1) \subset C \quad \text{et} \quad B(y,r_2) \subset C.$$
   Posons $r = \min(r_1,r_2)$; on a alors :
   $$B(x,r) \subset C \quad \text{et} \quad B(y,r) \subset C.$$
   Montrons alors qu'on a $B(z,r) \subset C$, ce qui prouvera que $z \in \mathrm{Int}(C)$. Soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| < r$; montrons que $z + u \in C$.
   En notant $\tilde{x} = x + u$ et $\tilde{y} = y + u$, on a :
   $$z + u = \lambda \tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}.$$
   Comme $B(x,r) \subset C$ et $B(y,r) \subset C$, on a $\tilde{x} \in C$ et $\tilde{y} \in C$. Puis, comme C est convexe, on a $z+u \in C$. D'où le résultat.



5.10 1. • Supposons $a \in \mathcal{V}(u)$. Il existe alors une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ de u qui tend vers a. Soit B une boule ouverte centrée en a et de rayon $r > 0$.
Comme $u_{\varphi(n)} \to a$, il existe un rang n_0 tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_{\varphi(n)} \in B.$$
Puisque l'ensemble $\{\varphi(n)\,;\ n \geqslant n_0\}$ est infini, cela prouve que la boule B contient une infinité d'éléments de u.

- Supposons que toute boule ouverte centrée en a contienne une infinité d'éléments de u, et construisons par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(n)} - a\| < 2^{-n}.$$
  * Par hypothèse, la boule ouverte centrée en a et de rayon $2^{-0} = 1$ contient une infinité d'éléments de u. Il existe donc $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - a\| < 1$.
  * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits les indices $\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$.
    Par hypothèse, la boule ouverte centrée en a et de rayon 2^{-n} contient une infinité d'éléments de a. En particulier, il existe $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\varphi(n) > \varphi(n-1) \qquad \text{et} \qquad \|u_{\varphi(n)} - a\| < 2^{-n}.$$

  La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ ainsi construite est une sous-suite de u convergeant vers a.

2. Montrons que $\mathcal{V}(u)$ est fermé par caractérisation séquentielle. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{V}(u)$ convergeant vers a. Montrons que $a \in \mathcal{V}(u)$. Pour cela, utilisons le résultat de la question précédente : prouvons que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ contient une infinité d'éléments de u. Soit $r > 0$.
   - Comme $a_n \to a$, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_p - a\| < r/2$.
   - Comme $a_p \in \mathcal{V}(u)$, la boule ouverte $B(a_p, r/2)$ contient une infinité d'éléments de u.
   - Comme $\|a_p - a\| < r/2$, on a $B(a_p, r/2) \subset B(a, r)$. Par conséquent, la boule ouverte $B(a, r)$ contient aussi une infinité d'éléments de u.

5.11
- La suite nulle appartient à $\mathcal{C}_0$ et est à une distance 1 de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a donc $d(a, \mathcal{C}_0) \leqslant 1$.
- D'autre part, si $u = (u_n)$ est une suite tendant vers 0, alors on a :
$$|a_n - u_n| = |1 - u_n| \to 1,$$
  et donc $\mathcal{N}_\infty(a - u) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n - u_n| \geqslant 1$. Cela prouve que $d(a, \mathcal{C}_0) \geqslant 1$.

Par double inégalité, on a donc $d(a, \mathcal{C}_0) = 1$.

5.12 1. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & a_i \end{array}$

est 1-lipschitzienne donc continue et l'on a :
$$\mathcal{U}_j = \varphi_j^{-1}(\{1\}) \cap \left(\bigcap_{i=j+1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{0\}) \right). \qquad (\star)$$

Reformulons cela de la manière suivante :
$$\mathcal{U}_j = \psi_j^{-1}(\{0\}) \cap \left(\bigcap_{i=j+1}^{n} \widetilde{\varphi}_i^{-1}(\{0\}) \right).$$

avec $\psi_j : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \left|\varphi_j(P) - 1\right| \end{array}$ et $\widetilde{\varphi}_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & |a_i|. \end{array}$

Comme les applications $\psi_j, \widetilde{\varphi}_{j+1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_n$ sont continues et d'après la proposition 28 de la page 241, $\mathcal{U}_j$ apparaît comme une intersection de fermés de $\mathbb{K}_n[X]$, donc est un fermé de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. On a :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{U}_j.$$

Ainsi, $\mathcal{U}$ apparaît comme une réunion *finie* de fermés, donc est un fermé.

5.13 1. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés. Soit (P_n) une suite de polynômes unitaires convergeant vers P. Montrons que P est unitaire.

- Tout d'abord, comme les P_n sont unitaires, et par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n\|_\infty \geqslant 1,$$

et donc, puisque $\|P_n\| \to \|P\|$, on a $\|P\|_\infty \geqslant 1$. En particulier, P est non nul.

- Notons r le degré de P et c le coefficient dominant de P. Comme $P_n \to P$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left\|P_n - P\right\|_\infty \leqslant \frac{\min(|c|, 1)}{2}\cdot$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc nécessairement $\deg(P_n) = r$ car :

  * si $\deg(P_n) < r$, alors le coefficient devant le terme de degré r de $P_n - P$ vaut c, et alors $\|P_n - P\|_\infty \geqslant |c| > \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}\cdot$
  * si $\deg(P_n) > r$, alors le polynôme $P_n - P$ est unitaire, et par conséquent :

$$\|P_n - P\|_\infty = 1 > \frac{\min(|c|, 1)}{2}\cdot$$

- Pour $n \geqslant n_0$, comme P_n est de degré r et unitaire, on a alors :

$$\|P_n - P\|_\infty \geqslant |1 - c|.$$

Comme $\|P_n - P\|_\infty \to 0$, on a nécessairement $c = 1$.

2. Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (P_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ convergeant vers $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente, on sait déjà que P est unitaire. Il s'agit donc de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire que P ne possède pas de racine complexe non réelle. Donnons-nous donc $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et prouvons que $P(z) \neq 0$.

- Tout d'abord, il a été vu à la question précédente que si l'on note $r = \deg P$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad \deg P_n = r$.
- Ensuite, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire et scindé de degré r, alors, en notant $z_1, \ldots, z_r$ ses racines, on a :

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k) \quad \text{et donc} \quad |P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z - z_k|.$$

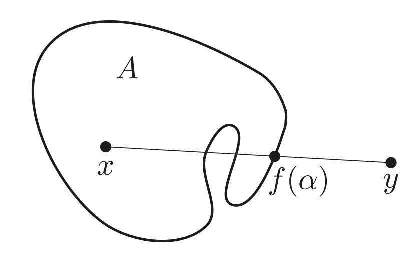
Comme pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a

$$|z - z_k| = \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re}(z) - z_k)^2} \geqslant |\operatorname{Im} z|,$$

on obtient :
$$|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r.$$
Cette inégalité s'applique en particulier aux polynômes P_n pour $n \geqslant n_0$:
$$\forall n \geqslant n_0 \quad |P_n(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r. \qquad (\star)$$

- Il suffit alors de montrer que $P_n(z) \to P(z)$. En effet, comme $|\operatorname{Im} z|^r > 0$, un passage à la limite dans la relation $(\star)$ donnera :
$$|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r > 0 \quad \text{et donc} \quad P(z) \neq 0.$$
Pour $n \geqslant n_0$, on a $\deg P_n = r$ et donc on peut écrire :
$$P_n = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} X^k \qquad \text{et} \qquad P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k.$$
Ainsi, on a :
$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} z^k \qquad \text{et} \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k z^k.$$
Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la convergence $P_n \to P$ donne la convergence de chacune des suites de coefficients : $\forall k \in [\![0, r]\!] \quad a_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_k$. La convergence $P_n(z) \to P(z)$ résulte alors simplement d'opérations sur les limites.

5.14 1. Il a été vu (*cf.* page 232) que E et $\varnothing$ ont une frontière vide. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie vérifiant $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$.
Montrons que la frontière de A est non vide, *i.e.* $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} \neq \varnothing$.
Comme $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$, on peut prendre $x \in A$ et $y \in E \setminus A$.
Considérons alors l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)\,x + \lambda\,y. \end{array}$$



L'ensemble $\Gamma = \big\{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda) \in A\big\}$ et non vide (car contient 0) et majoré (par 1) ; notons α sa borne supérieure. Prouvons alors que $f(\alpha) \in \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, ce qui terminera le raisonnement.

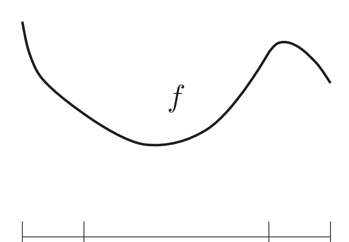
- Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on peut trouver une suite (λ_n) d'éléments de Γ qui converge vers α. Par opérations sur les limites, on a $f(\lambda_n) \to f(\alpha)$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(\lambda_n) \in A$, on obtient $f(\alpha) \in \overline{A}$.
- $*$ Si $\alpha = 1$, alors $f(\alpha) = y \in E \setminus A \subset \overline{E \setminus A}$.
  $*$ Si $\alpha \in [0, 1[$, alors on peut considérer (λ_n) une suite à valeurs dans $]\alpha, 1]$ tendant vers α. On alors :
$$f(\lambda_n) \to f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in E \setminus A.$$
  Il en résulte que $f(\alpha) \in \overline{E \setminus A}$.

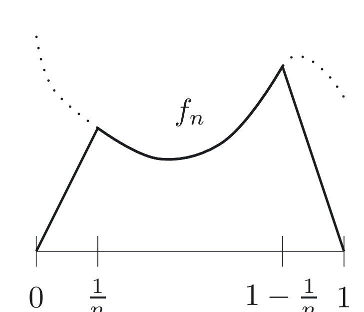
2. On sait que les parties E et $\varnothing$ sont à la fois des ouverts et des fermés de E. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie qui soit à la fois un ouvert et un fermé de E.
   - Comme A est un fermé, on a $\overline{A} = A$.
   - Comme A est un ouvert, $E \setminus A$ est un fermé et donc $\overline{E \setminus A} = E \setminus A$.

   On a alors :
$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = A \cap (E \setminus A) = \varnothing.$$
   D'après la question précédente, on a $A = E$ ou $A = \varnothing$.

5.15
- **Intérieur au sens de la norme infinie.** Montrons que, pour la norme infinie, l'intérieur de F est vide. Pour cela, donnons-nous $f \in F$ et $\varepsilon > 0$, et montrons que $B(f, \varepsilon) \not\subset F$. C'est évident car, tout simplement, la fonction $g = f + \dfrac{\varepsilon}{2}$ vérifie $\mathcal{N}_\infty(f - g) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $g \notin F$.
- **Intérieur au sens de la norme un.** Le même argument convient pour justifier que l'intérieur de F est vide au sens de $\mathcal{N}_1$.
- **Adhérence au sens de la norme infinie.** Montrons qu'au sens de la norme infinie, F est un fermé, et donc égal à son adhérence. Procédons par caractérisation séquentielle : soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in E$; montrons que $f \in F$.
  La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f (*i.e.* au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$) entraîne la convergence simple, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x).$$
  En particulier, on a $f_n(0) \to f(0)$ et $f_n(1) \to f(1)$.
  Cela assure que $f(0) = f(1) = 0$, *i.e.* $f \in F$.
- **Adhérence au sens de la norme un.**

  Montrons qu'au sens de la norme un, F est dense dans E, *i.e.* $\mathrm{Adh}(F) = E$.
  Soit $f \in E$. Pour tout $n \geqslant 2$, notons f_n la fonction égale à f sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, nulle en 0 et en 1, et affine sur les intervalles :
$$\left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right].$$
  On a alors :
$$f_n \in F \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_1(f_n - f) \leqslant \frac{2}{n} \mathcal{N}_\infty(f).$$
  La suite (f_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge vers f (au sens de la norme $\mathcal{N}_1$). D'où le résultat.





5.16 Puisque f est continue donc continue par morceaux, les applications φ_1 et φ_2 sont bien définies ; elles sont de plus linéaires. On peut donc utiliser le résultat de l'exercice 37 de la page 239 affirmant qu'une application linéaire $u : E \to F$ est k-lipschitzienne si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|.$$

- **Pour la norme $\mathcal{N}_\infty$.** Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, on a :

$$\big|\varphi_1(f)\big| = \big|f(1)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi_2(f)\big| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f),$$

  D'après la remarque qui précède, les deux applications φ_1 et φ_2 sont donc 1-lipschitziennes, donc *a fortiori* continues.

- **Pour la norme $\mathcal{N}_1$.**
  * Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, on a :

$$\big|\varphi_2(f)\big| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_1(f).$$

    L'application φ_2 est donc 1-lipschitzienne, donc *a fortiori* continue.
  * En revanche, en posant $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_1(f_n) = \frac{1}{n+1}\cdot$$

    La suite (f_n) tend donc vers 0 pour la norme $\mathcal{N}_1$. Si φ_1 était continue pour cette norme, alors par composition de limites on aurait $\varphi_1(f_n) \to 0$, ce qui n'est pas vrai car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_1(f_n) = 1.$$

    Remarque Pour prouver que φ_1 n'est pas continue pour la norme $\mathcal{N}_1$, l'idée de s'intéresser particulièrement à la continuité au point 0 vient du fait qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle l'est en 0 (*cf.* exercice 35 de la page 238).

5.17 Soit D une partie dense dans A. Montrons par caractérisation séquentielle que $f(D)$ est dense dans $f(A)$. Soit $y \in f(A)$. Considérons un antécédent $a \in A$ de y par f. Comme D est dense dans A, il existe une suite (u_n) d'éléments de D convergeant vers a. Comme f est continue et par composition de limites, on a alors :

$$f(u_n) \to f(a) = y.$$

Comme $\big(f(u_n)\big)$ est une suite d'éléments de $f(D)$, cela prouve la densité de $f(D)$ dans $f(A)$.

5.18 1. Comme A et B jouent des rôles analogues, il suffit de montrer la première propriété :

$$\forall x \in E \setminus A \quad d(x,A) > 0.$$

Soit $x \in E \setminus A$. Par définition de $d(x,A)$ et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $d(x,a_n) \to d(x,A)$. Si $d(x,A)$ était nul, alors on aurait $d(x,a_n) \to 0$, c'est-à-dire $a_n \to x$. Comme la suite (a_n) est à valeurs dans A et que $x \notin A$, cela contredirait le caractère fermé de A.

2. D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in E \setminus A \quad d(x,A) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus B \quad d(x,B) > 0.$$

Comme A et B sont disjoints, il en résulte que :

$$\forall x \in E \quad d(x,A) + d(x,B) > 0.$$

On peut alors considérer l'application $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Cette application est continue comme quotient d'application continues (*cf.* exercice 38 de la page 239 et page 241) et vérifie :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

3. Par construction, les ensembles U et V considérés sont disjoints et contiennent respectivement A et B. Il reste à prouver qu'ils sont ouverts. Constatons que :

$$U = g^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \qquad \text{et} \qquad V = h^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$$

avec :

$$g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} - f(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \frac{1}{2} \end{array}$$

Comme f est continue, g et h le sont aussi. Par suite, U et V sont ouverts, d'après la proposition 28 de la page 241.

5.19 1. • ∗ Pour qu'une série $\sum u_n$ soit absolument convergente, il est nécessaire que la suite (u_n) tende vers 0 et donc *a fortiori* soit bornée.
Cela prouve que $F \subset E$.

∗ L'inclusion réciproque est fausse. Par exemple la suite constante égale à 1 est bornée mais la série $\sum 1$ ne converge pas absolument (elle diverge grossièrement).

• Ces espaces ne sont pas de dimension finie. Comme $F \subset E$, il suffit de le montrer pour F. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $u^{(p)}$ la suite définie par :

$$u_p^{(p)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq p \Longrightarrow u_n^{(p)} = 0.$$

∗ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(p)}$ appartient à F.

∗ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(u^{(0)}, \ldots, u^{(N)})$ est libre. Cela étant vrai pour tout N, l'espace F n'est pas de dimension finie.

2. • **Application T_v.** Soit $v \in F$.
   * *Caractère bien défini.* Pour tout $w \in E$, comme w est une suite bornée, on a $w_n u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Comme la série $\sum v_n$ converge absolument, le théorème de comparaison assure que la série $\sum w_n v_n$ converge aussi absolument, donc converge. Cela assure que l'application T_v est bien définie.
   * *Linéarité.* Soit $(w, z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} T_v(\lambda w + z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda w_n + z_n) v_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda w_n v_n + z_n v_n) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} w_n v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} z_n v_n \quad \text{(linéarité de la somme d'une série)} \\ &= \lambda T_v(w) + T_v(z). \end{aligned}$$

   D'où la linéarité de T_v.
   * *Caractère lipschitzien.* Soit $w \in E$. Par définition de la norme N_E, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| \leqslant N_E(w) \quad \text{et donc} \quad |w_n v_n| \leqslant N_E(w) |v_n|.$$

   En passant à la somme des séries associées, il vient :

$$\big|T_v(w)\big| \leqslant N_E(w) \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = N_E(w)\, \widetilde{N}_F(v).$$

   En utilisant le résultat de l'exercice 37 de la page 239, on en déduit que l'application T_v est $\widetilde{N}_F(v)$ lipschitzienne.

• **Application $\widetilde{T}_u$.** Soit $u \in E$.
   * *Caractère bien défini.* Pour tout $w \in F$, comme u est une suite bornée, on a $w_n u_n = \mathrm{O}(w_n)$. Comme la série $\sum w_n$ converge absolument, le théorème de comparaison assure que la série $\sum w_n u_n$ converge aussi absolument, donc converge. Cela assure que l'application $\widetilde{T}_u$ est bien définie.
   * *Linéarité.* Soit $(w, z) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_u(\lambda w + z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda w_n + z_n) u_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda w_n u_n + z_n u_n) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} w_n u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} z_n u_n \quad \text{(linéarité de la somme d'une série)} \\ &= \lambda \widetilde{T}_u(w) + \widetilde{T}_u(z). \end{aligned}$$

   D'où la linéarité de $\widetilde{T}_u$.

∗ *Caractère lipschitzien.* Soit $w \in E$. Par définition de la norme N_E, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant N_E(u) \quad \text{et donc} \quad |w_n u_n| \leqslant N_E(u)|w_n|.$$
En passant à la somme des séries associées, il vient :
$$\big|\widetilde{T}_u(w)\big| \leqslant N_E(u) \sum_{n=0}^{+\infty} |w_n| = N_E(u)\,\widetilde{N}_F(w).$$
En utilisant le résultat de l'exercice 37 de la page 239, on en déduit que l'application $\widetilde{T}_u$ est $N_E(u)$ lipschitzienne.

5.20 1. • Supposons que u ne soit pas bornée sur la boule unité fermée $B_F(0,1)$ de E. Cela implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément a_n appartenant à $B_F(0,1)$ et vérifiant $\|u(a_n)\| \geqslant n$.

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\alpha_n = \dfrac{a_n}{\|u(a_n)\|}$ vérifie alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\alpha_n\| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|u(\alpha_n)\| = 1.$$
On a donc $\alpha_n \to 0$ mais $u(\alpha_n) \not\to u(0) = 0$. Cela prouve que l'application u n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue.

• Réciproquement, supposons que u soit bornée sur la boule unité fermée $B_F(0,1)$ de E. Il existe alors $M \geqslant 0$ telle que :
$$\forall x \in B_F(0,1) \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant M.$$
Pour tout élément $x \in E$ non nul, on a $\dfrac{x}{\|x\|} \in B_F(0,1)$, et donc :
$$\left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M$$
puis, par linéarité de u et homogénéité de la norme :
$$\big\|u(x)\big\| \leqslant M\,\|x\|. \qquad (\star)$$
Cette dernière inégalité, que l'on a obtenue pour tout élément non nul de E, est également vraie pour le vecteur nul. La propriété de linéarité de u permet alors d'obtenir que u est M-lipschitzienne (*cf.* exercice 37 de la page 239), donc en particulier continue.

2. • Si u est continue, alors A est un fermé de E, comme image réciproque du singleton $\{0\}$ par l'application continue $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\| - 1. \end{array}$

• Réciproquement, supposons que u ne soit pas continue.
Alors, d'après la deuxième question, u n'est pas bornée sur la boule $B_F(0,1)$. Cela signifie qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_F(0,1)$ telle que $\|u(x_n)\| \to +\infty$.
En posant alors (avec n assez grand pour que $u(x_n) \neq 0$) :
$$y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|},$$
on obtient une suite (y_n) d'éléments de A tendant vers 0. Comme $0 \notin A$, cela prouve que A n'est pas un fermé de E.

5.21 Si φ est l'application nulle, alors elle est continue et son noyau est un fermé (car c'est l'espace E lui-même). Supposons désormais φ non nulle.

- Supposons φ continue. On a :
$$\operatorname{Ker}\varphi = \psi^{-1}\big(\{0\}\big) \quad \text{avec} \quad \psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |\varphi(x)|. \end{array}$$
Comme φ est continue, ψ l'est aussi et alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un fermé de E car image réciproque de $\{0\}$ par ψ.
- Réciproquement, supposons que φ ne soit pas continue. Cela signifie que φ n'est pas bornée sur la boule unité $B_F(0,1)$ de E (d'après la deuxième question de l'exercice 5.20 de la page 266).
Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_F(0,1)$ telle que $\big|\varphi(x_n)\big| \to +\infty$.
Comme $\big|\varphi(x_n)\big| \to +\infty$, on peut considérer un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \varphi(x_n) \neq 0.$$
Pour $n \geqslant n_0$, posons alors $y_n = x_{n_0} - \dfrac{\varphi(x_{n_0})}{\varphi(x_n)} x_n$.
On constate alors que la suite $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs dans $\operatorname{Ker}\varphi$ et converge vers $x_{n_0} \notin \operatorname{Ker}\varphi$. Cela prouve que $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas un fermé de E.

5.22 1. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $u^{(N)} = \sum\limits_{n=0}^{N} x_n e^{(n)}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\big\|x - u^{(N)}\big\| = \Big\|x - \sum\limits_{n=0}^{N} x_n e^{(n)}\Big\| = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|$.

Comme la série $\sum |x_n|$ converge, on en déduit que $\big\|x - u^{(N)}\big\| \to 0$. L'élément x est donc limite de la suite $\big(u^{(N)}\big)$ d'éléments de F.

Cela prouve que F est dense dans ℓ^1.

2. Comme a est une suite bornée, on peut considérer $M \geqslant 0$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant M.$$
Soit $x \in \ell^1$. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_n| \leqslant M|x_n|.$$
Comme la série $\sum |x_n|$ converge, l'inégalité précédente assure, par comparaison, que la série $\sum |a_n x_n|$ converge également ; l'application φ_a est donc bien définie.
On a de plus :
$$\big|\varphi_a(x)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} M|x_n| = M\|x\|.$$
On en déduit (*cf.* exercice 37 de la page 239) que φ_a est M-lipschitzienne, donc continue.

3. Soit φ une application linéaire continue de ℓ^1 dans $\mathbb{K}$. Soit $x \in \ell^1$. Reprenons les notations $e^{(n)}$ introduites à la question 1. On a, d'après la réponse à cette même question :
$$u^{(N)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{avec} \quad u^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} x_n e^{(n)}.$$

Comme φ est continue, on a donc :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x). \tag{1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \varphi(e^{(n)})$. On a, par linéarité de φ :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n.$$

Comme les suites $e^{(n)}$ sont toutes de norme 1 et que φ est continue, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum x_n$ donne la convergence absolue de la série $\sum a_n x_n$ et donc sa convergence. On a ainsi :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n = \varphi_a(x). \tag{2}$$

D'après (1) et (2) et par unicité de la limite, on obtient $\varphi(x) = \varphi_a(x)$.
Cela étant vrai pour tout $x \in \ell^1$, on a $\varphi = \varphi_a$.

5.23 1. • Constatons que $f_x = f \circ \varphi_1$ avec $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x,t). \end{array}$

La continuité de φ_1 est évidente (par exemple, au sens de chacune des normes usuelles de $\mathbb{R}^2$, φ_1 est 1-lipschitzienne). Par continuité de φ_1 en y et de f en $\varphi_1(y) = (x,y)$, l'application f_x est continue en y.

• Pour justifier la continuité de f_y en x, on procède de même en constatant que :

$$f_y = f \circ \varphi_2 \quad \text{avec} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,y). \end{array}$$

2. Les cas de f_x et f_y se traitent de la même manière. Intéressons-nous à f_x.

• Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la continuité de f_x s'obtient par opérations sur les fonctions continues, puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_x(t) = \frac{xt}{x^2+t^2}.$$

• Pour la continuité de f_0, constatons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_0(t) = \frac{0 \times t}{0^2 + yt^2} = 0 = f(0,0) = f_0(0).$$

L'application f_0 est donc l'application nulle ; par suite, elle est continue.

3. Montrons que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t,t) = \frac{t \times t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

En notant g la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t,t) \end{array}$ on constate que la fonction $f \circ g$ n'est pas continue puisqu'elle vaut $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^*$, et 0 en 0.

Comme g est continue, il en résulte que f ne peut pas l'être. Plus précisément, comme la fonction $f \circ g$ n'est pas continue en 0, la fonction f n'est pas continue au point $g(0)$, *i.e.* au point $(0,0)$.

5.24 1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$. Pour $r \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f_\theta(r) = \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r}{\cos\theta - \sin\theta}.$$

Il en résulte que la fonction f_θ tend vers 0 en 0.

2.
   - De la question précédente, il résulte que si f admet une limite en $(0,0)$, celle-ci vaut nécessairement 0.
   - D'autre part, on constate qu'en posant $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \\ t & \longmapsto & (t+t^2, t) \end{array}$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad (f \circ g)(t) = \frac{(t+t^2)^2 + t^2}{(t+t^2) - t} = 2 + 2t + t^2.$$

   La fonction $f \circ g$ tend donc vers 2 en 0. Comme g tend vers $(0,0)$ en 0, il s'ensuit que si f admet une limite en $(0,0)$, alors celle-ci vaut nécessairement 2.

Des deux points précédents on déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

5.25 Par hypothèse, f possède une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Comme de plus f est continue sur X, f possède en tout $x \in X$ une limite finie égale à $f(x)$. L'application :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{x} f \end{array}$$

est donc un prolongement de f à A.

Montrons, par caractérisation séquentielle, que $\tilde{f}$ est continue en tout point de A. Soit (x_n) une suite d'éléments de A tendant vers x. Montrons que $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x)$.

- Tout d'abord, justifions l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de X vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \left\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\right\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X est dense dans A, on peut considérer une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tendant vers x_n. Comme $\tilde{f}(x_n) = \lim\limits_{x_n} f$, on a $f(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$, et donc, comme f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, on a $\tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$. Les limites

$$z_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$$

  assurent alors l'existence d'un rang p_0 tel que :

$$p \geqslant p_0 \Longrightarrow \|z_p - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \left\|\tilde{f}(z_p) - \tilde{f}(x_n)\right\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

  Il suffit alors de choisir un $p \geqslant p_0$ (par exemple p_0) et de fixer $y_n = z_p$.

- $*$ Comme $x_n \to x$, la propriété :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

  assure que la suite (y_n) tend également vers x. Par définition de $\tilde{f}$, on a donc $f(y_n) \to \tilde{f}(x)$.

  $*$ De plus, comme (y_n) est à valeurs dans X et que f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, les suites $\big(f(y_n)\big)$ et $\big(\tilde{f}(y_n)\big)$ sont égales. On a donc $\tilde{f}(y_n) \to \tilde{f}(x)$.

  $*$ Enfin, la propriété :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

  assure que la suite $\big(\tilde{f}(x_n)\big)$ converge également vers $\tilde{f}(x)$, ce qui est le résultat souhaité.

Chapitre 6 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Espaces vectoriels normés de dimension finie

6

I « Équivalence » des normes en dimension finie

Commençons par un exemple introductif :

Exemple Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ainsi :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = x^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la fonction nulle pour la norme un (car $\mathcal{N}_1(f_n) \to 0$) mais pas pour la norme infinie (car $\mathcal{N}_\infty(f_n) \not\to 0$).

L'exemple précédent met en évidence que, si l'on dispose sur un espace vectoriel E de deux normes différentes, une suite d'éléments de E peut converger pour l'une des deux normes mais pas pour l'autre.
L'espace vectoriel considéré dans cet exemple, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, n'est pas de dimension finie et pour cause, puisqu'il n'est pas possible de créer un tel exemple dans un espace de dimension finie. C'est ce qu'énonce le théorème suivant. Ce théorème est admis.

Théorème 1 (Admis)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, (a_n) une suite à valeurs dans E et ℓ un élément de E. Si l'on dispose de deux normes sur E et si la suite (a_n) converge vers ℓ pour l'une des deux normes, alors elle converge aussi vers ℓ pour l'autre.

Conséquences Supposons E de dimension finie. D'après le théorème précédent, toutes les normes sur E définissent les mêmes suites convergentes. Il s'ensuit que toutes les notions pour lesquelles on dispose d'une caractérisation séquentielle sont également indépendantes de la norme choisie :

- point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, partie fermée ;
- par passage au complémentaire : point intérieur, intérieur d'une partie, partie ouverte ;
- frontière d'une partie ;
- limite d'une application, continuité d'une application.

p.296

Exercice 1 *(Approfondissement)*

Supposons E de dimension finie. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x).$$

Indication : on pourra aboutir à une contradiction en construisant une suite d'éléments unitaires pour la norme N_1 (i.e. de norme 1) et tendant vers 0 pour la norme N_2.

Conséquences Dans l'exercice précédent, les normes N_1 et N_2 jouent des rôles symétriques. Ainsi, si E est dimension finie et si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, alors il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Les deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* (locution hors-programme). Il découle de cette propriété qu'en dimension finie les notions suivantes ne dépendent pas de la norme choisie :

- le caractère borné d'une partie ;
- le caractère lipschitzien d'une application.

Remarque Puisque dans un espace de dimension finie les notions manipulées ne dépendent pas de la norme choisie, il arrive que l'on ne précise même pas avec quelle norme on travaille. Par exemple, on ne s'étonnera pas de lire : « Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie fermée de E. »

II Utilisation des coordonnées dans une base

1 Pour la convergence des suites

Dans un espace de dimension finie muni d'une base, la convergence d'une suite est équivalente à celle des suites coordonnées :

Proposition 2

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit (a_n) une suite à valeurs dans E.

Notons $(a_n^{(1)}), \ldots, (a_n^{(p)})$ les suites « coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire les suites scalaires vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=1}^{p} a_n^{(k)} \, e_k.$$

Étant donné $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k \, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(i) la suite (a_n) converge vers ℓ ;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite de terme général $a_n^{(k)}$ converge vers ℓ_k.

Principe de démonstration. Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration page 296

2 Pour les limites d'applications

De la même façon, si f est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la limite de f en un point se ramène à celle de ses applications coordonnées dans une base :

Proposition 3

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f : A \to E$ une application à valeurs dans E (A étant une partie quelconque d'un espace vectoriel normé). Notons $(f_1, \ldots, f_p)$ les applications « coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire les fonctions scalaires vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \, e_k.$$

Pour $a \in A$ et $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k \, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(i) l'application f admet ℓ comme limite en a ;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a.

Principe de démonstration. Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration page 296

Corollaire 4

Avec les notations de la proposition précédente :

- l'application f est continue en a si, et seulement si, chacune des applications $f_1, \dots, f_p$ est continue en a ;
- l'application f est continue sur A si, et seulement si, chacune des applications $f_1, \dots, f_p$ est continue sur A.

III Applications continues sur une partie fermée bornée

En première année il a été vu qu'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Le résultat suivant en est une généralisation.

Théorème 5 (Théorème des bornes atteintes, admis)

Supposons E de dimension finie. Si A est une partie non vide fermée et bornée de E, alors toute application continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exemples Supposons E de dimension finie.

1. Soit A une partie non vide fermée et bornée de E, et $f : A \to F$ une application continue. Alors l'application :
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x)\| \end{array}$$
est bornée et atteint ses bornes.

2. **Distance à un fermé borné en dimension finie**
Soit A une partie non vide fermée et bornée de E, et $x_0 \in E$. L'application :
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x_0, x) \end{array}$$
est continue, donc sa restriction à A est bornée et atteint ses bornes ; en particulier cette restriction est minorée et atteint sa borne inférieure. Cela assure l'existence de $a \in A$ tel que la distance de x_0 à A soit atteinte en a, *i.e.* :
$$d(x_0, a) = \inf_{x \in A} d(x_0, x) = d(x_0, A).$$

p.297

Exercice 2 Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme deux. Considérons la fonction :
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{e^{x^2+y^2}}{1 + x^2 + y^2}. \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_F(0, R) \quad \big|g(x, y)\big| > a.$$
2. En utilisant alors le théorème 5, justifier que g possède un minimum global.

p.297

Exercice 3 (Importance de l'hypothèse de dimension finie)

Plaçons-nous dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} \bigl|f(x)\bigr|.$$

Considérons l'ensemble $A = \bigl\{f \in E \bigm| \mathcal{N}_\infty(f) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\bigr\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée non vide et bornée de E.
2. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array}$$

est continue, majorée mais qu'elle n'atteint pas sa borne supérieure.

IV Continuité des applications linéaires, polynomiales et multilinéaires

1 Applications linéaires

Théorème 6

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Supposons E de dimension finie. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in E \quad \bigl\|u(x)\bigr\| \leqslant C\,\|x\|.$$

L'application u est alors C-lipschitzienne et donc continue.

Démonstration page 298

Exemples

1. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est continue ; en particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application linéaire « i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ » est continue :

$$\begin{array}{rccl} \pi_i \ : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & x_i \quad \text{où } x = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k e_k. \end{array}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie, les deux applications suivantes, étant linéaires, sont continues :
   - l'évaluation en un point $a \in \mathbb{K}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$
   - la dérivation : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$

Attention Il ne faut pas oublier de vérifier l'hypothèse *dimension finie* du théorème 6 de la page ci-contre. Les deux exercices suivants illustrent l'importance de cette hypothèse en donnant des exemples, en dimension infinie, d'applications linéaires non continues.

p.299

Exercice 4 (Dérivation des polynômes sur $\mathbb{K}[X]$)

Plaçons-nous dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right\| = \max_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i|$ et considérons l'application dérivation :

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Montrer que l'application D, bien que linéaire, n'est pas continue.

On pourra utiliser la suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_k = \dfrac{X^k}{k}$.

p.299

Exercice 5 Plaçons-nous dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme un : $\mathcal{N}_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Considérons l'application « évaluation en 1 » :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1). \end{array}$$

Montrer que l'application φ, bien que linéaire, n'est pas continue.

2 Fonctions polynomiales

On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ s'écrivant comme une combinaison linéaire d'applications qui sont elles-mêmes des produits de fonctions coordonnées. Plus précisément :

Définition 1

Une application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1,\dots,k_n})_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n \quad f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}.$$

Rappel On rappelle qu'une famille est dite *presque nulle* si elle ne comporte qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Terminologie Avec les notations ci-dessus, si $f \neq 0$, le **degré** de f est :

$$\max\left\{k_1+\cdots+k_n \,;\, \lambda_{k_1,\dots,k_n}\neq 0\right\}.$$

Par convention, le degré de l'application nulle vaut $-\infty$.

Exemples

1. L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy - x^3z^4 + 4xyz^2 \end{array}$ est polynomiale de degré 7.
2. Une application linéaire non nulle est polynomiale de degré 1.

Proposition 7

Toute application polynomiale est continue.

Démonstration. Une application polynomiale s'obtient, par produits et combinaisons linéaires, à partir des applications composante $\varphi_i: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$ avec $i \in [\![1,n]\!]$.

Les applications $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont continues car elles sont linéaires et ont comme espace de départ $\mathbb{K}^n$ qui est de dimension finie. La continuité des applications polynomiales s'obtient alors par produits et combinaisons linéaires d'applications continues. □

Corollaire 8

L'application $\det: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est continue.

Démonstration. Une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une famille de n^2 scalaires (ses n^2 coefficients). L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut donc être identifié à $\mathbb{K}^{n^2}$. D'autre part, le déterminant d'une matrice est une expression polynomiale de ses coefficients.

Ainsi, l'application $\det: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est polynomiale, donc continue. □

3 Applications multilinéaires

Définition 2

Soit $E_1,\dots,E_p$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f: E_1\times\cdots\times E_p \to F$ est dite ***p*-linéaire** si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, pour tout $(x_1,\dots,x_p)\in E_1\times\cdots\times E_p$, l'application partielle :

$$f_i: \begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_{i-1},\, x,\, x_{i+1},\dots,x_p) \end{array}$$

est linéaire.

Remarque Avec les hypothèses de la définition précédente, par linéarité de l'application partielle f_i, on obtient que :

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},\, 0,\, x_{i+1},\dots,x_p) = 0.$$

Théorème 9

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Toute application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

Principe de démonstration. Si $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est p-linéaire, alors f s'exprime à l'aide des applications coordonnées dans une base. Démonstration page 299

Exemples

1. L'application produit matriciel $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est une application bilinéaire, donc, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, elle est continue.
2. Si E est de dimension finie et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \ldots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \end{array}$$

est n-linéaire, donc continue.

p.300

Exercice 6 Justifier la continuité de l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA\,A. \end{array}$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Raisonnons par l'absurde ; supposons que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists x \in E \quad N_1(x) > \alpha\, N_2(x).$$

En considérant la propriété précédente pour α décrivant $\mathbb{N}^*$, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans E vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_1(x_n) > n\, N_2(x_n). \tag{$\star$}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $N_1(x_n) \neq 0$ et donc on peut poser $u_n = \dfrac{x_n}{N_1(x_n)}\cdot$

Par propriété d'homogénéité, la propriété $(\star)$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_2(u_n) < \frac{1}{n}\cdot$$

On a donc $N_2(u_n) \to 0$, *i.e.* la suite (u_n) tend vers 0 au sens de la norme N_2. Donc, d'après le théorème 1 de la page 289, la suite (u_n) tend également vers 0 au sens de la norme N_1. C'est impossible car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $N_1(u_n) = 1$.

Proposition 2 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1,\ldots,x_p)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
Prouvons que, pour la norme N_∞, la convergence de (a_n) vers ℓ revient à la convergence de chacune des suites $\left(a_n^{(k)}\right)$ vers ℓ_k.

- On a :

$$N_\infty(a_n - \ell) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} \left|a_n^{(k)} - \ell_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \left|a_n^{(k)} - \ell_k\right|,$$

  donc si $a_n^{(k)} \to \ell_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, alors $N_\infty(a_n - \ell) \to 0$, *i.e.* (a_n) converge vers ℓ.
- D'autre part, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\left|a_n^{(k)} - \ell_k\right| \leqslant N_\infty(a_n - \ell),$$

  donc si (a_n) converge vers ℓ, alors $a_n^{(k)} \to \ell_k$.

Proposition 3 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ » :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1,\ldots,x_p)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

L'équivalence souhaitée résulte alors de la relation suivante :

$$\forall x \in A \quad N_\infty\big(f(x) - \ell\big) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} \left|f_k(x) - \ell_k\right|.$$

Exercice 2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On remarque que $g(x,y) = \varphi\big(\|(x,y)\|_2\big)$ avec $\varphi : r \mapsto \dfrac{e^{r^2}}{1+r^2}$.
   Par croissances comparées, on a $\varphi(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On en déduit qu'il existe $R > 0$ tel que :
   $$r > R \Longrightarrow \big|\varphi(r)\big| > a,$$
   et donc :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_F(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > a.$$
2. D'après la question précédente, pour $a = g(0,0)$, il existe $R > 0$ tel que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_F(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > g(0,0). \qquad (\star)$$
   Comme g est continue et que le disque fermé $D_F(0,R)$ est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, le théorème 5 de la page 291 assure que la restriction de g à $D_F(0,R)$ est bornée et atteint ses bornes ; notons m son minimum.
   Comme $(0,0) \in D_F(0,R)$, on a $m \leqslant g(0,0)$, et donc $(\star)$ donne :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_F(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > m.$$
   Il en résulte que m est le minimum global de la fonction g.

Exercice 3

1. En considérant l'application $\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$ on a $A = B_F(0,1) \cap \psi^{-1}(\{0\})$.
   - Le caractère non vide de A est évident car A contient la fonction nulle.
   - Comme la boule unité fermée $B_F(0,1)$ est bornée, A est bornée.
   - * La boule $B_F(0,1)$ est fermée.
     * L'application ψ est 1-lipschitzienne car pour tout $(f,g) \in E^2$, on a :
       $$\big|\psi(f) - \psi(g)\big| = \big|f(0) - g(0)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f-g),$$
       donc ψ est continue. Par suite, l'image réciproque par ψ de $\{0\}$ est une partie fermée de E.

     Donc, comme intersection de deux parties fermées, A est une partie fermée.
2. - L'application φ est continue car elle est 1-lipschitzienne.
     En effet, pour $(f,g) \in E^2$, on a, par propriétés de calcul de l'intégrale :
     $$\begin{aligned}\big|\varphi(f) - \varphi(g)\big| = \left|\int_0^1 f - \int_0^1 g\right| &= \left|\int_0^1 (f-g)\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |f-g| \\ &\leqslant \int_0^1 \mathcal{N}_\infty(f-g) = \mathcal{N}_\infty(f-g).\end{aligned}$$

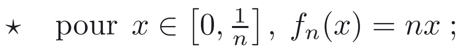
- * Pour tout $f \in A$, par définition de A, la fonction $x \mapsto 1 - f(x)$ est continue, positive et n'est pas la fonction nulle puisque $f(0) = 0$, donc son intégrale est strictement positive :

  $$\int_0^1 (1-f) > 0 \qquad \text{ce qui donne} \qquad \varphi(f) < 1.$$

  Il en résulte que 1 est un majorant strict de φ.

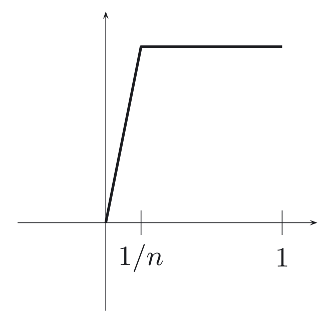
  * Prouvons que 1 est la borne supérieure de φ. Comme nous savons déjà que 1 est un majorant de φ, il suffit de trouver une suite (f_n) d'éléments de E telle que $\varphi(f_n) \to 1$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction f_n affine par morceaux dont le graphe relie les points $(0,0)$, $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ et $(1,1)$:

  ⋆ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = nx$;

  ⋆ pour $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $f_n(x) = 1$.

  On a alors :

  $$\varphi(f_n) = 1 - \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

  ce qui achève de prouver que 1 est la borne supérieure de φ. Comme nous avons vu précédemment que 1 était un majorant strict, cette borne supérieure n'est pas atteinte par φ.

Théorème 6

- Comme E est de dimension finie, on peut travailler avec la norme que l'on souhaite (*cf.* conséquences de l'exercice 1 de la page 289).

  Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, et travaillons avec la norme infinie associée à cette base :

  $$\|x\| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| \quad \text{avec} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

  Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ appartenant à E, on a, par linéarité de u :

  $$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)$$

  puis, par inégalité triangulaire :

  $$\begin{aligned}\big\|u(x)\big\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \big\|u(e_k)\big\| \\ &\leqslant C \times \|x\| \qquad \text{avec} \qquad C = \sum_{k=1}^{n} \big\|u(e_k)\big\|.\end{aligned}$$

  D'où le résultat.

- La caractère C-lipschitzien de u s'obtient alors par linéarité à partir du résultat obtenu précédemment. Pour $(x,y) \in E^2$, on a :
$$\big\|u(x)-u(y)\big\| = \big\|u(x-y)\big\| \leqslant C\,\|x-y\|.$$

Exercice 4 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $P_k = \dfrac{X^k}{k}\cdot$ On a alors :
$$\|P_k\| = \frac{1}{k} \to 0$$
donc la suite (P_k) tend vers 0. Si l'application D était continue, elle serait continue en 0 et l'on aurait $P'_k \to D(0) = 0$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$P'_k = X^{k-1} \quad \text{donc} \quad \|P'_k\| = 1.$$
Ainsi la suite (P'_k) ne tend pas vers 0, donc l'application D n'est pas continue.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto \sqrt{n+1}\,x^n$. On a :
$$\|f_n\| = \sqrt{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$
donc la suite (f_n) tend vers 0. Si l'application φ était continue, elle serait continue en 0 et l'on aurait $\varphi(f_n) \to \varphi(0) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\varphi(f_n) = f_n(1) = \sqrt{n+1}$$
donc la suite $\big(\varphi(f_n)\big)$ ne tend pas vers 0. L'application φ n'est donc pas continue.

Théorème 9 Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire.

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, notons $n_k = \dim E_k$ ainsi que $\mathcal{B}_k = \big(e_1^{(k)},\ldots,e_{n_k}^{(k)}\big)$ une base de E_k. En notant alors $g_{k,i}$ l'élément de $E_1 \times \cdots \times E_p$:
$$g_{k,i} = \big(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème place}}}{e_i^{(k)}},0,\ldots,0\big),$$
la famille $\mathcal{B} = \big(g_{k,i}\big)_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n_k}}$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Soit $u = (u_1,\ldots,u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. En écrivant chaque u_k dans la base $\mathcal{B}_k$:
$$u_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)},$$
il vient, par p-linéarité de f :
$$\begin{aligned} f(u) &= f\Bigg(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)},\ldots,\sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)}\Bigg)\\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1}^{(1)}\cdots x_{i_p}^{(p)} f\big(e_{i_1}^{(1)},\ldots,e_{i_p}^{(p)}\big). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $i \in [\![1, n_k]\!]$, l'application $u \mapsto x_i^{(k)}$ est linéaire comme composée de l'application $\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & F \\ (u_1, \ldots, u_p) & \longmapsto & u_k \end{array}$ et de l'application « i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}_k$ » de E_k. Comme $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie, elle est donc continue.

L'expression obtenue pour $f(u)$ assure alors, par opérations sur les applications continues, que f est continue.

Exercice 6 On a $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ avec :

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \longmapsto & M\,N \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ A & \longmapsto & ({}^t\!A, A). \end{array}$$

- L'application φ_1 est bilinéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_1 est continue.
- L'application φ_2 est linéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_2 est continue.

Donc, comme composée d'applications continues, φ est continue.

S'entraîner et approfondir

★ **6.1** Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Prouver l'existence d'une constante k minimale vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty$$

et l'exprimer, en fonction des coefficients de A.

6.2 Soit $E_1, \ldots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés avec $E_1, \ldots, E_p$ de dimension finie, et $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire.

1. En munissant l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \|(x_1, \ldots, x_p)\| = \max\big(\|x_1\|, \ldots, \|x_p\|\big)$$

et en utilisant la continuité de f sur la sphère unité de cet espace produit, prouver qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \big\|f(x_1, \ldots, x_p)\big\| \leqslant C\|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant le résultat de la première question au produit matriciel, prouver qu'il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant N(A)\,N(B).$$

Une telle norme est dite **sous-multiplicative**.

6.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que A et B deux parties de E non vides fermées et bornées.

1. (a) Soit $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E^2 et $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ un élément de E^2. Prouver l'équivalence suivante :

$$\big(\lim (x_n, y_n) = \ell\big) \Longleftrightarrow \big(\lim x_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim y_n = \ell_2\big).$$

   (b) Prouver que $A \times B$ est un fermé borné de E^2.

2. On appelle *distance de A à B* la quantité :

$$d(A, B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x, y).$$

Prouver qu'il existe un couple $(a, b) \in A \times B$ tel que :

$$d(a, b) = d(A, B).$$

On dit que la distance de A à B est atteinte.

3. *Importance de l'hypothèse A et B bornés.* Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$, et posons :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Justifier que A et B sont fermées, mais que la distance de A à B n'est pas atteinte.

6.4 Soit K une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, et $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in K^2 \quad x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|. \qquad (\star)$$

Montrer que f possède un unique point fixe.
Indication : on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$.

Topologie des espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

6.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ **6.6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le rang de A vaut au plus r si, et seulement si, aucune sous-matrice carrée de A de taille $r+1$ n'est inversible.
2. Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de rang au plus r est un fermé.

⋆ **6.7** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⋆ **6.8** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Considérons $n+1$ scalaires deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ en posant :

$$\|P\| = \max\big\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_{n+1})|\big\}.$$

2. Soit $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Montrer que la suite (P_m) converge vers P si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad P_m(x) \to P(x).$$

3. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

   qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.

⋆ **6.9** **Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense.
   Indication : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, toute matrice est trigonalisable.*
2. Justifier que ce résultat est faux si l'on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ **6.10 Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

1. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de A.
   (a) Montrer que $\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) En déduire que :
$$d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices possédant n valeurs propres distinctes.

6.11 Adhérence de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables.

On note T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que T_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que c'est l'adhérence de D_n.

6.12 *(Suite de l'exercice 4.6 de la page 198)*

Le but de cet exercice est de prouver que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, alors A est orthosemblable à une matrice à diagonale nulle, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}\,A\,P$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

Considérons les applications suivantes :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} |m_{k,k}| \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi\big({}^tP\,M\,P\big). \end{array}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients diagonaux nuls si, et seulement si, l'on a $\varphi(M) = 0$. Le problème revient alors à montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(P) = 0$.

1. (a) Montrer que l'application f est continue.
   (b) En déduire que f possède un minimum.
   On pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.5 de la page précédente.
2. Supposons que le minimum de f ne soit pas 0. Soit $P_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que f atteigne son minimum en P_0. Notons $B = {}^tP_0\,A\,P_0$.
   (a) Justifier qu'il existe $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $b_{k,k} > 0$ et $b_{\ell,\ell} < 0$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice C orthosemblable à B vérifiant :
$$c_{1,1} = b_{k,k}, \quad c_{2,2} = b_{\ell,\ell} \quad \text{et} \quad \varphi(C) = \varphi(B).$$
   (c) En utilisant le résultat de l'exercice 4.6 de la page 198, montrer qu'il existe une matrice D orthosemblable à C vérifiant $\varphi(D) < \varphi(C)$.
   (d) Conclure.

Solution des exercices

6.1 Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a, par définition de la norme infinie :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right|.$$

Par inégalité triangulaire puis en majorant $|x_j|$ par $\|x\|_\infty$, on a, pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \times \|x\|_\infty.$$

On a donc :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty, \quad \text{avec} \quad k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right).$$

- Montrons que la constante k obtenue précédemment est optimale. Pour cela, montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\,\|x\|_\infty.$$

Par définition de k, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$k = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

En considérant alors le vecteur x dont les composantes valent ± 1, les signes étant choisis de telle sorte que la j-ème composante de x soit de même signe que $a_{i_0,j}$, on constate que la i_0-ième composante du vecteur $u(x)$ vaut k, ce qui assure que :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k.$$

Puisque $\|x\|_\infty = 1$, on obtient $\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k\|x\|_\infty$.
L'inégalité $\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\|x\|_\infty$ étant vérifiée d'après la première partie du raisonnement, on obtient :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\|x\|_\infty.$$

6.2 1. Comme $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie, le théorème 9 de la page 295 indique que l'application f est continue. Elle est donc bornée sur toute partie fermée et bornée de $E_1 \times \cdots \times E_p$, et en particulier sur sa sphère unité $S(0,1)$: il existe donc $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in S(0,1) \quad \big\|f(u_1, \ldots, u_p)\big\| \leqslant C.$$

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.

- Si les x_k sont tous non nuls, alors on a :

$$\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right) \in S(0,1),$$

et donc :

$$\left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right) \right\| \leqslant C,$$

puis, par p-linéarité de f :

$$\big\| f(x_1, \ldots, x_p) \big\| \leqslant C\|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

- Si l'un des x_k est nul, alors, par p-linéarité de f, on a $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$, et dans ce cas l'inégalité souhaitée est également vérifiée.

2. Notons $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application produit matriciel :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

est bilinéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, la question précédente nous assure l'existence d'une constante C, que l'on peut supposer strictement positive, vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \big\| AB \big\| \leqslant C\,\|A\|\,\|B\|.$$

En considérant alors l'application $N : x \mapsto C\,\|x\|$, il est clair que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant N(A)\,N(B).$$

6.3 1. (a) Puisque E est de dimension finie, l'espace produit E^2 l'est aussi donc on peut travailler avec la norme que l'on souhaite. Notons $\|\cdot\|$ une norme de E et munissons E^2 de la norme :

$$N\big((x, y)\big) = \max(\|x\|, \|y\|).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \big(\lim(x_n, y_n) = \ell\big) &\iff N\big((x_n, y_n) - (\ell_1, \ell_2)\big) \to 0 \\ &\iff \max\big(\|x_n - \ell_1\|, \|y_n - \ell_2\|\big) \to 0 \\ &\iff \|x_n - \ell_1\| \to 0 \quad \text{et} \quad \|y_n - \ell_2\| \to 0 \\ &\iff \lim x_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim y_n = \ell_2. \end{aligned}$$

(b)
- *Caractère borné*. Comme A et B sont des parties bornées de E, il existe des constantes M_1 et M_2 telles que :

$$\forall x \in A \quad \|x\| \leqslant M_1 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in B \quad \|y\| \leqslant M_2.$$

Pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a alors :

$$N(x, y) = \max\big(\|x\|, \|y\|\big) \leqslant \max(M_1, M_2),$$

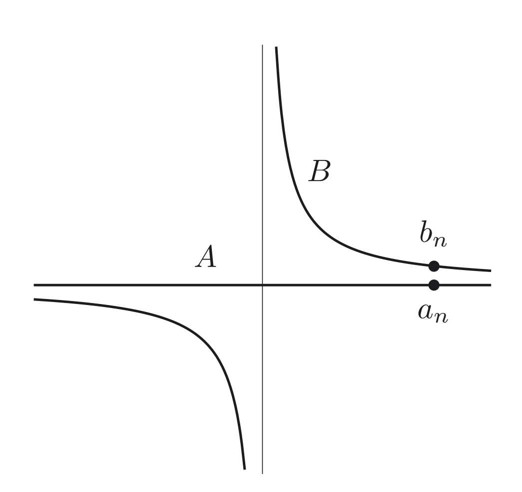
donc $A \times B$ est une partie bornée de E^2.

- *Caractère fermé*. Soit $\big((x_n, y_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A \times B$ qui converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2)$. D'après la question précédente, on a $\lim x_n = \ell_1$ et $\lim y_n = \ell_2$. Comme les parties A et B sont fermées, on en déduit que $\ell_1 \in A$ et $\ell_2 \in B$, et donc $\ell \in A \times B$. Cela prouve que $A \times B$ est une partie fermée.

2. L'application :
$$\begin{array}{rccl}\varphi: & A\times B & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y)\end{array}$$
est continue (*cf.* exercice 36 de la page 239). Comme $A\times B$ est une partie non vide fermée et bornée de l'espace de dimension finie E^2, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle possède un minimum : cela assure l'existence d'un couple $(a,b)\in A\times B$ tel que :
$$d(a,b)=\inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y)=d(A,B).$$

3. Les parties A et B sont fermées car sont respectivement les images réciproques du singleton $\{0\}$ par les applications continues :
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & y\end{array}\qquad\text{et}\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & xy-1.\end{array}$$

Les parties A et B s'écrivent également :
$$A=\big\{(a,0)\,;\ a\in\mathbb{R}\big\}$$
et
$$B=\left\{\left(b,\frac{1}{b}\right)\,;\ b\in\mathbb{R}^*\right\}.$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons :
$$a_n=(n,0)\in A$$
et
$$b_n=\left(n,\frac{1}{n}\right)\in B.$$



Comme $b_n-a_n\to 0$, on a $d(A,B)=0$. Comme de plus A et B sont disjointes, on en déduit que la distance de A à B n'est pas atteinte.

6.4 • **Existence.** Soit $\varphi: K\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x)=\|f(x)-x\|$.
Étant donné que φ est continue (par opérations sur les fonctions continues) et que K est une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, φ admet un minimum. Notons α un point de K en lequel ce minimum est atteint. Si $f(\alpha)\neq\alpha$, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :
$$\varphi\big(f(\alpha)\big)=\big\|f(f(\alpha))-f(\alpha)\big\|<\big\|f(\alpha)-\alpha\big\|=\varphi(\alpha),$$
ce qui contredit la définition de α. On a donc $f(\alpha)=\alpha$, *i.e.* α est un point fixe de f.

• **Unicité.** Si l'on suppose que α et β sont deux points fixes distincts, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :
$$\|\beta-\alpha\|=\big\|f(\beta)-f(\alpha)\big\|<\|\beta-\alpha\|,$$
ce qui est absurde.

6.5 • D'après l'exercice 6 de la page 295, on sait que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & {}^tAA \end{array}$$

est continue. Par opérations sur les applications continues, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \|{}^tAA - I_n\| \end{array}$$

est également continue. Ainsi, puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{0\})$, on en déduit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné, on peut par exemple prendre la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et constater que pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_\infty \leqslant 1$.
En effet, pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1 \qquad \text{et donc} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

6.6 1. • Supposons $\operatorname{rg}(A) \geqslant r+1$ et montrons que l'on peut trouver une sous-matrice carrée de A de taille $r+1$ inversible.
Comme $\operatorname{rg}(A) \geqslant r+1$, on peut trouver $r+1$ colonnes de A formant une famille libre. La matrice de taille $(n, r+1)$ formée par ces $r+1$ colonnes est alors de rang $r+1$, donc on peut y trouver $r+1$ lignes formant une famille libre. La matrice formée par ces $r+1$ lignes est alors une sous matrice carrée de A de taille $r+1$ et inversible.

• Réciproquement, supposons qu'il existe une sous-matrice $\widetilde{A}$ de A de taille $r+1$ inversible, et montrons que $\operatorname{rg}(A) \geqslant r+1$. La matrice $\widetilde{A}$ a été obtenue à partir de A en sélectionnant $r+1$ colonnes et $r+1$ lignes.
Puisque $\widetilde{A}$ est inversible, ses colonnes constituent une famille libre dans l'espace $\mathcal{M}_{r+1,1}(\mathbb{K})$. Par suite, les colonnes de A correspondantes forment, dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ cette fois, une famille libre. Ainsi la famille des colonnes de A est de rang au moins $r+1$, donc A est de rang au moins $r+1$.

2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons que les matrices A_p soient toutes de rang au plus r et montrons qu'il en est de même pour A.
Pour cela, montrons qu'aucune sous-matrice carrée de A de taille $r+1$ n'est inversible. Sélectionnons $r+1$ indices de lignes et $r+1$ indices de colonnes ; notons respectivement $\widetilde{A}$ et $\widetilde{A_p}$ les sous-matrices de A et A_p associées. En travaillant avec la norme infinie, on a :

$$\mathcal{N}_\infty\big(\widetilde{A_p} - \widetilde{A}\big) \leqslant \mathcal{N}_\infty(A_p - A),$$

et donc la suite de matrices $(\widetilde{A_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widetilde{A}$ dans $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$.
Puisque les matrices A_p sont de rang au plus r, aucune des matrices $\widetilde{A_p}$ n'est inversible. On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \det(\widetilde{A_p}) = 0.$$

En passant à la limite et par continuité du déterminant, on obtient $\det(\widetilde{A}) = 0$, ce qui donne le résultat.

6.7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \det(xI_n + A) \end{array}$ est polynomiale de degré n (c'est la fonction polynomiale associée au polynôme caractéristique de $-A$) ; elle s'annule donc en un nombre fini de points. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons :

$$A_p = 2^{-p} I_n + A.$$

Les matrices A_p sont inversibles, car de déterminant non nul, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles. On peut donc trouver un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice A_p soit inversible.

La suite $(A_p)_{p\geqslant p_0}$ est alors une suite de matrices inversibles qui convergent vers A.

6.8 1. • **Séparation.** Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifie $\|P\| = 0$, alors il possède $n+1$ racines distinctes : $a_1, \ldots, a_{n+1}$, et donc est le polynôme nul.

• **Homogénéité.** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \|\lambda P\| &= \max\big\{|\lambda P(a_1)|, \ldots, |\lambda P(a_{n+1})|\big\} \\ &= |\lambda| \max\big\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_{n+1})|\big\} = |\lambda|\ \|P\|. \end{aligned}$$

• **Inégalité triangulaire.** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$. On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad |P(a_k) + Q(a_k)| &\leqslant |P(a_k)| + |Q(a_k)| \\ &\leqslant \|P\| + \|Q\| \end{aligned}$$

et donc :

$$\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

2. • Travaillons avec la norme introduite à la question précédente (rappelons que, puisque $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie, la norme dont on le munit n'a pas d'importance). Si l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad P_m(x) \to P(x)$$

alors on a en particulier :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad P_m(a_k) \to P(a_k)$$

ou encore :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \big|P_m(a_k) - P(a_k)\big| \to 0.$$

On a alors $\|P_m - P\| \to 0$, *i.e.* la suite (P_m) converge vers P.

• Réciproquement supposons que la suite (P_m) converge vers P. Le résultat de la question précédente, appliqué avec $a_k = x + k - 1$, assure que l'on peut considérer la norme suivante sur $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\|P\| = \max\big\{|P(x)|, |P(x+1)|, \ldots, |P(x+n)|\big\}.$$

La traduction pour cette norme de la convergence de la suite (P_m) vers P donne immédiatement $P_m(x) \to P(x)$.

3. Montrons la continuité de Ψ par caractérisation séquentielle.
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (A_p) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A ; montrons que $\Psi(A_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)$.
   Compte tenu de la question précédente, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$:
   $$\Psi(A_p)(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)(x)$$
   ou encore :
   $$\det(xI_n - A_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(xI_n - A). \qquad (\star)$$
   Comme $A_p \to A$, on a :
   $$xI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} xI_n - A.$$
   La propriété $(\star)$ est alors une conséquence de la continuité du déterminant.

6.9 1. Montrons que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite (A_p) de matrices diagonalisables. Toute matrice étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $A = P^{-1}\,T\,P$ avec P inversible et T triangulaire supérieure.
   Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les termes diagonaux de T, ie :
   $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
   Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :
   $$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$
   Justifions que, pour p assez grand, la matrice T_p possède la propriété que ses termes diagonaux sont deux à deux distincts :
   - si les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous égaux, alors c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$;
   - sinon, alors en notant δ l'écart minimal entre deux valeurs propres distinctes de A, *i.e.* :
     $$\delta = \min_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} |\lambda_i - \lambda_j|,$$
     alors la propriété est vérifiée dès que $\dfrac{n-1}{p} < \delta$.

   Ainsi, pour p assez grand, la matrice $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$ est diagonalisable puisqu'elle possède n valeurs propres distinctes.
   Enfin, puisque $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}\,M\,P \end{array}$ est continue car linéaire, on a $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que la matrice diagonale par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut pas être obtenue comme limite d'une suite de matrices diagonalisables. Cela est dû au fait que i est valeur propre de A. Raisonnons par l'absurde : supposons que (A_p) soit une suite de matrices diagonalisables tendant vers A. Notons χ et χ_p les polynômes caractéristiques de A et A_p respectivement. En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad zI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} zI_n - A.$$

Donc, par continuité du déterminant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \chi_p(z) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi(z).$$

En appliquant cela pour $z = i$, et puisque i est valeur propre de A, obtient :

$$\chi_p(i) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (\star)$$

Or, pour $p \in \mathbb{N}$, puisque la matrice A_p est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, *i.e.* de la forme :

$$\chi_p = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ ;$$

on a alors $\chi_p(i) = \prod_{k=1}^{n}(i - \lambda_k)$, et en particulier :

$$\left|\chi_p(i)\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}\left|i - \lambda_k\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k^2 + 1) \geqslant 1. \qquad (\star\star)$$

Les propriétés $(\star)$ et $(\star\star)$ sont contradictoires.

6.10 1. (a) Puisque $A_p \to A$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad xI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} xI_n - A,$$

et donc, par continuité du déterminant :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_{A_p}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(x).$$

En particulier, pour $x = \lambda$, cela donne :

$$\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(\lambda) = 0. \qquad (\star)$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p, comptées avec multiplicités. On a alors :

$$\chi_{A_p} = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{et donc} \quad \chi_{A_p}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k).$$

En passant au module, on obtient :

$$\left|\chi_{A_p}(\lambda)\right| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda - \lambda_k| \geqslant d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big)^n.$$

La limite $(\star)$ assure alors que $d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrons que $A \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$. On a la relation suivante (*cf.* page 230) :

$$\mathrm{Int}(\mathcal{D}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{Adh}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{D}\big).$$

Il s'agit donc de prouver que A n'appartient pas à l'adhérence de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{D}$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie, cela revient à montrer qu'il n'existe aucune suite suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{D}$ tendant vers A. Considérons $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A et montrons que pour p assez grand, A_p est diagonalisable.
Puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \ldots, B(\lambda_n, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes ($\mathbb{K}$ étant naturellement muni de la valeur absolue ou du module).
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, le résultat de la question 1 nous dit que :

$$d\big(\lambda_k, \mathrm{sp}(A_p)\big) \to 0$$

ce qui assure l'existence d'un rang $r_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant r_k \Longrightarrow B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \mathrm{sp}(A_p) \neq \varnothing.$$

Posons $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$ et prenons $p \geqslant r$. Il existe au moins une valeur propre de A_p dans chacune des n boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \ldots, B(\lambda_n, \varepsilon)$. Comme ces boules sont deux à deux disjointes, cela nous fournit n valeurs propres deux à deux distinctes pour A_p. La matrice A_p est alors diagonalisable.

• Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dont les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes, et montrons que $A \notin \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ en prouvant que A est la limite d'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices non diagonalisables.
L'hypothèse faite sur A assure l'existence d'une valeur propre λ d'ordre de multiplicité au moins 2. La matrice A peut alors s'écrire :

$$A = P^{-1}\, D\, P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & & & & (0) \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Posons alors, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-p} & & & (0) \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_p = P^{-1}\, D_p\, P.$$

Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, la matrice D_p n'est pas diagonalisable ; en effet, la présence du coefficient non nul 2^{-p} entraîne que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ a une dimension strictement inférieure à l'ordre multiplicité de λ ; par suite, la matrice A_p n'est pas diagonalisable non plus.
De plus, on a $D_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} D$ et donc $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

6.11 • Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (A_p) une suite d'éléments de T_n convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in T_n$.
Pour cela, montrons que $\operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Comme $A_p \to A$, on a, d'après la première question de l'exercice 6.10 :

$$d\big(\lambda, \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A_p) \subset \mathbb{R}$.
On a donc $d(\lambda, \mathbb{R}) \leqslant d\big(\lambda, \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big)$, puis, d'après la limite (1), on a $d(\lambda, \mathbb{R}) = 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où $\operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$, autrement dit A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*i.e.* $A \in T_n$).

• Prouvons désormais que $T_n = \operatorname{Adh}(D_n)$. Puisque T_n est un fermé contenant D_n, on a $\operatorname{Adh}(D_n) \subset T_n$. Il reste à prouver l'autre inclusion.
Soit $A \in T_n$. Montrons que $A \in \operatorname{Adh}(D_n)$ en prouvant que A est limite d'une suite (A_p) à valeurs dans D_n.

Cela se fait par la même méthode que celle utilisée à la première question de l'exercice 6.9. Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$A = P^{-1}\,T\,P \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$

On justifie alors que, pour p assez grand, les coefficients diagonaux de la matrice T_p sont deux à deux distincts (*cf.* corrigé de l'exercice 6.9).
On obtient alors, en posant $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$:

$$\big(\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p \in D_n\big) \qquad \text{et} \qquad A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

6.12 1. (a) • L'application :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} & \longmapsto & (m_{1,1},\dots,m_{n,n}) \end{array}$$

est linéaire donc continue puisque son espace de départ est de dimension finie. L'application φ apparaît alors comme la composée des deux applications continues Δ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array}$ donc est continue.

• Par continuité de la transposition et du produit matriciel, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & {}^tP\,M\,P \end{array}$$

est continue.

Ainsi, par opérations sur les applications continues, l'application f est continue.

(b) Il a été vu que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*cf.* exercice 6.5 de la page 302). Comme f est continue et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, le théorème des bornes atteintes s'applique : la fonction f est bornée et atteint ses bornes.
En particulier, f est minorée et atteint son minimum.

Remarque On savait déjà que f était minorée car f prend évidemment ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Il s'agissait donc de justifier que f atteignait sa borne inférieure.

2. (a) • Comme B est semblable à la matrice A, on a $\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} A = 0$.
• Comme le minimum de f n'est pas 0, on a $\varphi(B) = f(P_0) > 0$, donc les coefficients diagonaux de B ne sont pas tous nuls.

Ainsi, parmi les coefficients diagonaux de B, au moins un est strictement positif et au moins un est strictement négatif.

(b) Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.
Notons $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Considérons une base $\mathcal{B}' = (\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ obtenue par permutation à partir de $\mathcal{B}$ en venant placer les vecteurs e_k et e_ℓ en premières positions, de telle sorte que :

$$\tilde{e}_1 = e_k \qquad \text{et} \qquad \tilde{e}_2 = e_\ell.$$

La base $\mathcal{B}'$ hérite de $\mathcal{B}$ son caractère orthonormé. Si l'on note C la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, les coefficients diagonaux de C sont donc donnés par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad c_{i,i} = (\,u(\tilde{e}_i) \mid \tilde{e}_i\,).$$

Il en résulte que la diagonale de C s'obtient, à partir de la diagonale de B, par la même permutation que la base $\mathcal{B}'$ a été obtenue à partir de la base $\mathcal{B}$. On a donc :

$$c_{1,1} = b_{k,k}, \quad c_{2,2} = b_{\ell,\ell} \quad \text{et} \quad \varphi(C) = \varphi(B).$$

(c) • Écrivons la matrice C par blocs :

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad C_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C_4 \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R}).$$

D'après l'exercice 4.6 de la page 198, la matrice C_1 est orthosemblable à une matrice dont les deux coefficients diagonaux sont égaux.
Il existe donc $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice ${}^tP\,C_1\,P$ soit de la forme :

$$ {}^tP\,C_1\,P = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ \beta & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\operatorname{Tr} C_1}{2} = \frac{c_{1,1} + c_{2,2}}{2}. $$

Notons de plus que comme $c_{1,1} > 0$ et $c_{2,2} < 0$, on a :

$$ |\lambda| < |c_{1,1}| \qquad \text{et} \qquad |\lambda| < |c_{2,2}|. \tag{$\star$} $$

- Considérons alors la matrice définie par blocs :

$$ Q = \left(\begin{array}{c|c} P & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right). $$

  ∗ On a, en effectuant un produit par blocs :

$$ {}^tQ\,Q = \left(\begin{array}{c|c} {}^tP & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} P & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tPP & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) = I_n $$

  donc la matrice Q est orthogonale.

  ∗ Toujours en effectuant un produit par blocs, on obtient :

$$ {}^tQ\,C\,Q = \left(\begin{array}{c|c} {}^tP\,C_1\,P & {}^tP\,C_2 \\ \hline C_3\,P & C_4 \end{array}\right). $$

  Posons alors $D = {}^tQ\,C\,Q$. La matrice D est orthosemblable à la matrice C et l'on a :

$$ \begin{aligned} \varphi(D) &= 2\,|\lambda| + \sum_{i=3}^{n} |c_{i,i}| \\ &< |c_{1,1}| + |c_{2,2}| + \sum_{i=3}^{n} |c_{i,i}| \qquad \text{(d'après les inégalités } (\star)) \\ &= \varphi(C). \end{aligned} $$

(d) Par propriétés des matrices orthogonales, on montre que la relation « être orthosemblable à » est une relation d'équivalence. Ainsi, par transitivité, la matrice D obtenue à la question précédente est orthosemblable à la matrice A initiale. Il existe donc $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tR\,A\,R$.
On a alors :

$$ f(R) = \varphi(D) < \varphi(C) = \varphi(B) = f(P_0), $$

cela contredit le fait que f atteigne son minimum en P_0. L'hypothèse initiale est donc fausse : on en déduit que le minimum de f vaut 0.
D'où le résultat.

Chapitre 7 : Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

7

I Dérivation des fonctions vectorielles

Le but de cette section est de généraliser aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ les notions de dérivation et de développement limité vues en première année pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Dans toute cette section, n est un entier naturel non nul,

- I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, et a un point de I,
- $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$,
- f est une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$, et l'on désigne alors par f_1, …, f_n ses n **fonctions composantes** (ou **fonctions coordonnées**) dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les fonctions $f_\ell : I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell(t)\, e_\ell.$$

  Lorsque $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc aussi :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big).$$

1 Dérivée en un point

Définition 1

L'application f est **dérivable** en a si le **taux d'accroissement en a** :

$$\begin{array}{rccl} \tau_a(f) : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{array}$$

admet une limite $v \in \mathbb{R}^n$ en a, appelée **vecteur dérivé de f en a**.

Notation Le vecteur dérivé de f en a se note $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$, $Df(a)$ ou $f'(a)$.

Interprétation cinématique Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, et que la position d'un point matériel M_t dépend du temps, on peut lui associer la fonction :

$$f : t \mapsto \overrightarrow{OM_t}.$$

- L'ensemble des $f(t)$, pour t élément de l'intervalle I de définition de cette fonction, est alors appelé **trajectoire du point M_t**.
- La fonction f est alors supposée dérivable, et pour $t_0 \in I$, le vecteur $f'(t_0)$ est le **vecteur vitesse instantanée** du point M_t à l'instant t_0.

p.345 **Exercice 1** Soit $u \in \mathrm{IR}^n$, et $\varphi : I \to \mathrm{IR}$ une fonction dérivable en a. Montrer que :

$$f : t \mapsto \varphi(t)\, u$$

est dérivable en a et donner $f'(a)$.

Proposition 1

Soit v un élément de IR^n. Il est équivalent de dire :

(i) il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathrm{IR}^n$ vérifiant $\lim\limits_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$ et :

$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\, v + (t-a)\, \varepsilon(t) \ ;$$

(ii) la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = v$.

Remarque : prendre garde qu'ici $\varepsilon(t)$ est un vecteur. Démonstration page 345

Remarque On peut encore exprimer (i), en disant que la fonction f possède un **développement limité d'ordre 1** en a.

Proposition 2

Si la fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration page 345

p.345 **Exercice 2** Vérifier que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Proposition 3

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, chacune de ses fonctions composantes dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable en a. On a alors :

$$f'(a) = \sum_{\ell=1}^{n} f'_\ell(a)\, e_\ell.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 345

Écrire les fonctions composantes du taux d'accroissement de f en a.

Remarque En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on retrouve qu'une fonction f, de I dans $\mathbb{C}$, est dérivable en a si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, puisque ce sont les applications composantes de f dans la base canonique.

2 Fonction dérivée

Définition 2

La fonction f est **dérivable** sur I lorsqu'elle est dérivable en tout $a \in I$.

Notation On note alors f' ou Df, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & Df(t) \end{array}$$

qui, à tout $t \in I$, associe le vecteur dérivé de f en t. On l'appelle **l'application dérivée** de f, ou plus simplement la **dérivée de f**.

Proposition 4

La fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I si, et seulement si, tous ses fonctions composantes sont dérivables sur I, et alors :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(t)\, e_k.$$

Démonstration. C'est la version globale de la proposition 3 de la page précédente. □

Remarque Lorsque $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc aussi :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \big(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\big).$$

p.346

Exercice 3 Montrer que les fonctions :

$$\vec{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\sin t, \cos t) \end{array}$$

sont dérivables, et donner leurs dérivées.

Proposition 5

Une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ est constante sur l'intervalle I si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle en tout point de I.

Principe de démonstration. Utiliser les fonctions composantes. Démonstration page 346

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Dans toute cette partie, n, p et q sont des entiers naturels non nuls.

Proposition 6

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Si f et g sont dérivables en a, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a, et :
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
- Si f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I, et :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Démonstration. Il suffit de considérer les fonctions composantes et d'utiliser le résultat analogue vu pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. □

Proposition 7

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

- Si f est dérivable en a, alors $L \circ f$ est dérivable en a et :
$$(L \circ f)'(a) = L\big(f'(a)\big).$$
- Si f est dérivable sur I, alors $L \circ f$ est dérivable sur I et :
$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 346

Exprimer le taux d'accroissement de $L \circ f$ en fonction de celui de f.

Proposition 8

Soit B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, ainsi que des applications $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^p$.

- Si f et g sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ est dérivable en a et :
$$B(f,g)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big).$$
- Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f,g)$ est dérivable sur I et :
$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g').$$

Principe de démonstration. Démonstration page 346

Utiliser les fonctions composantes de f et g.

Notation Ici et dans la suite du chapitre, $B(f,g)$ désigne la fonction $t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big)$.

Applications les plus utiles

- Si les applications $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur I, alors φf est dérivable sur I et :
$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$
- L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni d'un produit scalaire noté $(\ \mid\ )$, si $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur I, alors $(f \mid g)$ est dérivable sur I et :
$$(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g').$$
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne canonique orientée, si $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $g : I \to \mathbb{R}^3$ sont dérivables sur I, alors $f \wedge g$ est dérivable sur I et :
$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'.$$
- Étant donné une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, si $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ sont dérivables sur I, alors leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$:
$$\det_{\mathcal{B}}(f,g) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}\big(f(t), g(t)\big) \end{array}$$
est dérivable sur I, et :
$$\det_{\mathcal{B}}(f,g)' = \det_{\mathcal{B}}(f',g) + \det_{\mathcal{B}}(f,g').$$

p.347

Exercice 4 Soit f une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^n$.

1. Si f est de norme constante, montrer que $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
2. Montrer que $\|f\|_2$ est dérivable en tout point t_0 où le vecteur $f(t_0)$ est non nul.

p.347

Exercice 5 Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, ainsi que f_1 et f_2 deux solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0. \qquad (\mathcal{E})$$
Montrer que $W = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}$ est dérivable et en simplifier la dérivée.

p.348

Exercice 6 Soit u_1, u_2, et u_3 trois fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^3$, telles que, pour tout $t \in I$, la famille $\big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)$ soit une base orthonormée directe.

1. En dérivant $(u_i \mid u_j)$, montrer que A_t, matrice de $\big(u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t)\big)$ par rapport à la base $\big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)$, est antisymétrique.
2. En déduire que, pour tout $t \in I$, il existe un vecteur $\Omega(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$u_1'(t) = \Omega(t) \wedge u_1(t) \quad u_2'(t) = \Omega(t) \wedge u_2(t) \quad u_3'(t) = \Omega(t) \wedge u_3(t).$$

p.348

Exercice 7 Soit M_t un point matériel en mouvement dans un plan tel qu'à chaque instant, son vecteur vitesse soit orthogonal à la droite (OM_t). Montrer que la trajectoire de M_t se trouve sur un cercle de centre O.

Proposition 9

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \to I$.

- Si φ est dérivable en $\alpha \in J$ et si f est dérivable en $a = \varphi(\alpha)$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable en α et l'on a :
$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha)\, f'(\varphi(\alpha)).$$
- Si φ est dérivable sur J, et si f est dérivable sur I, alors la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et l'on a :
$$(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi).$$

Principe de démonstration. Regarder chaque composante. Démonstration page 348

Attention Bien écrire :
$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha)\, f'(\varphi(\alpha))$$
puisqu'il s'agit de la multiplication du vecteur $f'(\varphi(\alpha))$, que l'on met donc à droite, par le scalaire $\varphi'(\alpha)$, que l'on met donc à gauche.

p.349

Exercice 8 Soit r et θ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction f de I dans $\mathbb{R}^2$, définie en coordonnées polaires par :
$$f : t \mapsto r(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) \quad \text{avec} \quad \vec{u} : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta).$$
Montrer que f est dérivable et en donner la dérivée.

p.349

Exercice 9 Soit r, θ et z trois fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction f de I dans $\mathbb{R}^3$, définie donnée en coordonnées cylindriques par :
$$f : t \mapsto r(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + z(t)\, \vec{k} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{k} = (0,0,1) \\ \vec{u} : t \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \end{cases}$$
Montrer que f est dérivable et en donner la dérivée.

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans cette section, p et q sont deux entiers naturels non nuls.

Définition 3

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa fonction dérivée est continue sur I.

Notation $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 10

La fonction (vectorielle) $f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, ses fonctions composantes (à valeurs réelles) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4 de la page 318 et du fait qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est continue si, et seulement si, toutes ses applications composantes le sont. □

Exemples

1. Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, alors $\varphi f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire.
   - Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $(f \mid g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, l'application $\|f\|_2^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Lorsque $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I, il se peut que f' soit aussi dérivable sur I. La dérivée de f' est alors appelée **dérivée seconde** de f, et se note f''.

Interprétation cinématique Si f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, alors f est supposée avoir une dérivée seconde, et le vecteur $f''(t_0)$ est le **vecteur accélération** du point matériel à l'instant t_0.

p.349 **Exercice 10** Avec les notations de l'exercice 8 de la page précédente, et en supposant les fonctions r et θ deux fois dérivables, calculer $f''(t)$ pour tout $t \in I$.

p.349 **Exercice 11** Soit M_t un point matériel en mouvement dans l'espace tel qu'à chaque instant t, son vecteur accélération soit colinéaire à $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$.

1. Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. Lorsque $g \neq 0$, montrer que la trajectoire de M est plane.

On pourrait définir ainsi par récurrence la dérivée d'ordre k de f par :

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

Mais il est plus facile de définir directement la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 4

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$.

- La fonction f est **de classe** $\mathcal{C}^0$ sur I, si elle est continue sur I.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est **de classe** $\mathcal{C}^k$, lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa fonction dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I.

Exemple f est de classe $\mathcal{C}^2$ si, et seulement si, elle est dérivable avec f' de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque Pour $k \geqslant 1$, on peut aussi dire qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsqu'elle admet des dérivées à tout ordre inférieur ou égal à k, et que ces dérivées sont continues (surtout la dernière puisque les autres, qui sont dérivables, sont automatiquement continues).

Notations Soit $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^n$.
- Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on note $f^{(i)}$, $D^i f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}t^i}$ sa **dérivée i-ème** et l'on a donc :

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, k]\!] \quad f^{(i)} = \left(f'\right)^{(i-1)} = \left(f^{(i-1)}\right)'.$$

Définition 5

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, pour tout entier naturel k.

Notation

$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}^n$.

Remarques

- Pour tout couple d'entiers naturels (k, ℓ) vérifiant $k \geqslant \ell$, on a évidement :

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\ell(I, \mathbb{R}^n).$$

- On a aussi : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 11

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si, et seulement si, ses fonctions composantes dans $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Principe de démonstration. Par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$. Démonstration page 350

5 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 12

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.

Principe de démonstration. Utiliser la proposition précédente. Démonstration page 350

Proposition 13

- Lorsque k est un entier naturel non nul, la dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R}^n)$.
- La dérivation est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 6 de la page 319 et de la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. □

p.350 **Exercice 12** Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ montrer que l'on a $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 14

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$ vérifient $\varphi(J) \subset I$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est élément de $\mathcal{C}^k(J, \mathbb{R}^n)$.

Principe de démonstration. Utiliser les fonctions composantes. Démonstration page 350

Proposition 15 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Si l'on suppose $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$, alors on a $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^q)$ et :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B\big(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell)}\big).$$

Principe de démonstration. Démonstration par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration page 351

p.351 **Exercice 13** Avec les notations de l'exercice 8 de la page 321, et en supposant les fonctions r et θ deux fois dérivables, calculer directement f'' sans utiliser f'.

6 Développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Dans toute cette partie, k désigne un entier naturel.

Définition 6

On dit que f possède **développement limité à l'ordre k** en $t_0 \in I$, lorsqu'il existe $k+1$ vecteurs v_0, v_1, ..., v_k de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} (t-t_0)^i\, v_i + \mathrm{o}\big((t-t_0)^k\big).$$

Remarque

On peut aussi exprimer ce qui précède en disant qu'il existe $k+1$ vecteurs v_0, ..., v_k de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{t_0} \varepsilon = 0$, ainsi que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \sum_{i=0}^{k} (t-t_0)^i\, v_i + (t-t_0)^k\, \varepsilon(t). \qquad (*)$$

En désignant :

- par $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ les fonctions composantes de ε dans $\mathcal{B}$,
- par $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$ les composantes de v_i dans $\mathcal{B}$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$,

la relation $(*)$ est équivalente aux n relations :

$$\forall t \in I \quad f_\ell(t) = \sum_{i=0}^{k} (t - t_0)^i \, v_{i,\ell} + (t - t_0)^k \, \varepsilon_\ell(t) \quad \text{pour} \quad \ell \in [\![1, n]\!],$$

puisqu'une fonction tend vers 0 en t_0 si, et seulement si, toutes ses fonctions composantes tendent vers 0 en t_0. Par suite, f possède un développement limité à l'ordre k en t_0 si, et seulement si, toutes ses fonctions composantes possèdent un développement limité à l'ordre k en t_0.

Point méthode

Pour trouver un développement limité de f, on calcule la plupart du temps des développements limités des fonctions composantes.

p.352 **Exercice 14** Développement limité d'ordre 3 en 0 de $f : t \mapsto \big(t - \sin t\,,\, 1 - \cos t\big)$.

p.352 **Exercice 15** Développement limité d'ordre 3 en 0 de $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{1+t^4}\,,\, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.

p.352 **Exercice 16** Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : t \mapsto \big(\cos^3 t, \sin^3 t\big)$.

Toutefois, la proposition suivante peut aussi permettre d'obtenir un développement limité pour une fonction f suffisamment régulière.

Proposition 16

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ admet un développement limité à l'ordre k en $t_0 \in I$ donné par la formule de Taylor–Young :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(t - t_0)^i}{i!} f^{(i)}(t_0) + \mathrm{o}\big((t - t_0)^k\big).$$

Principe de démonstration. Utiliser les fonctions composantes. Démonstration page 352

II Arcs paramétrés

1 Généralités

Définition 7

- Un **arc paramétré** est un couple $\Gamma = (I, \gamma)$, où I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, et γ une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$.
- Le sous-ensemble $\gamma(I)$ de $\mathbb{R}^n$ s'appelle **support** de Γ.

Exemple Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, sa courbe représentative, d'équation $y = f(x)$, ou encore le graphe de f, est le support de l'arc paramétré de $\mathbb{R}^2$, associé à :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \big(t, f(t)\big). \end{array}$$

Cas des arcs rectilignes

- Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ en est un sous-espace vectoriel de dimension 1.
- Mais dans le secondaire, vous avez rencontré dans le plan ou dans l'espace, des droites qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels, puisqu'elles ne contiennent pas 0. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, la **droite passant par a et de vecteur directeur $\vec{u}$** est l'ensemble :

  $$D = \{a + t\,\vec{u}\,;\ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{ou encore} \quad D = a + \mathbb{R}\,\vec{u}.$$

  Cette droite n'est une droite vectorielle que si elle contient 0. Pour distinguer du cas vectoriel, on parle alors de **droite affine**.
- Par suite, D est le support de l'arc paramétré $\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & a + t\,\vec{u}. \end{array}$

  Mais c'est aussi le support par exemple de $\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & a + t^3\,\vec{u}. \end{array}$

Point méthode

Si m est un point de E, on a donc :

$$m \in a + \mathbb{R}\,\vec{u} \iff m - a \in \mathrm{Vect}(\vec{u}).$$

Exemples de parties d'une droite Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

- L'application $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & a + t\,\vec{u}. \end{array}$

  est un arc paramétré dont le support est le **segment** $[a, b]$ avec $b = a + \vec{u}$.
- L'arc paramétré $\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & a + t\,\vec{u}. \end{array}$ a pour support une **demi-droite**.

Cas général

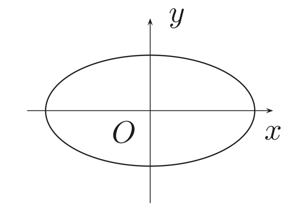
Lorsque n vaut 2 ou 3, le support d'un arc peut être représenté à l'aide de logiciels informatiques, tels que par exemple `python` muni de la bibliothèque `matplotlib`, voire avec `scilab`.

Exemples

- Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Si :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\,\cos t, b\,\sin t) \end{array}$$

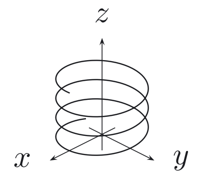
  alors le support de $\Gamma = \big([0,2\pi],\gamma\big)$ est une **ellipse**.



- Pour $(r,k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$, l'arc $(\mathbb{R},\gamma)$, avec

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t, k\,t) \end{array}$$

  est ce que l'on appelle une **hélice circulaire**.



Pour tracer le support d'un arc paramétré, on peut procéder comme un ordinateur, et en déterminer une multitude de points suffisamment proches pour donner l'illusion de la courbe (en les joignant éventuellement par des mini-segments), mais on peut être plus économe et ne déterminer que quelques points, à condition de pouvoir donner l'allure du support de l'arc au voisinage de chacun d'eux. Nous allons voir comment dans la suite.

Interprétation cinématique

En cinématique, on rencontre des arcs paramétrés lors de l'étude du mouvement, sur un intervalle de temps I, d'un point matériel mobile M_t dont la position à l'instant $t \in I$ est définie par $\gamma(t)$.

- Le support de l'arc (I,γ) est alors appelé **trajectoire** du point M_t.
- Dans ce cas, la fonction γ est supposée deux fois dérivable et les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont respectivement appelés **vecteur vitesse** et **vecteur accélération** du point M_t à l'instant t.
- Le physicien nous dit alors que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, ce que l'on retrouvera dans la proposition 17 de la page 330.

Pour pouvoir dériver, il est nécessaire d'avoir des hypothèses sur la régularité de γ, d'où la définition suivante.

Définition 8

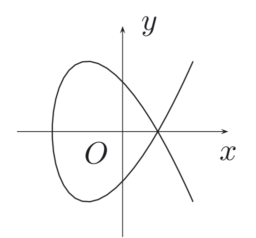
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'arc $\Gamma = (I,\gamma)$ est de **classe $\mathcal{C}^k$** lorsque l'application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples Tous les arcs paramétrés rencontrés jusqu'à présent sont de classe $\mathcal{C}^2$ voire $\mathcal{C}^\infty$, et il en sera de même de la quasi totalité des arcs que vous rencontrerez dans la suite.

Point du support, point de l'arc paramétré

Exemple
Sur un écran d'oscilloscope, on peut observer une trace de spot correspondant à l'arc $\Gamma = \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \gamma\right)$, avec :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathrm{IR}^2 \\ & t & \longmapsto & (-\cos 2t, \sin 3t) \end{array}$$



Dans l'exemple ci-dessus, le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ du support est obtenu pour deux valeurs du paramètre $t = -\frac{\pi}{3}$ et $t = \frac{\pi}{3}$: le point mobile étudié passe plusieurs fois au même endroit, avec des vecteurs vitesses différents. Il y a deux « morceaux du support passant ce point », et pour étudier les tangentes, il est nécessaire de distinguer entre point de l'arc et point du support.

Si (I, γ) est un arc paramétré, pour tout $t \in I$, le couple $\big(t, \gamma(t)\big)$ s'appelle **point de paramètre t de l'arc γ**.

Notation Dans toute la suite, le point $\gamma(t)$ sera aussi noté M_t, ce qui est une façon de faire apparaître le paramètre.

Remarque

- Un point **simple** de Γ est un point qui n'est obtenu que pour une seule valeur du paramètre t.
- Sinon, c'est un point multiple.

Exemple Tous les points de l'arc précédent sont simples, à l'exception du point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

2 Tangente en un point d'un arc paramétré

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$ et $t_0 \in I$. En suivant le physicien, on pourrait dire que la tangente au point de paramètre t_0 de γ est la droite définie par le point $\gamma(t_0) = M_{t_0}$ et le vecteur $\gamma'(t_0)$. Toutefois la définition suivante est à la fois plus géométrique et plus générale.

Définition 9

- L'arc (I, γ) admet une tangente au point M_{t_0} (de paramètre t_0), si la droite $(M_{t_0}M_t)$ admet une position limite quand t tend vers t_0, c'est-à-dire si l'on peut en trouver, au voisinage de t_0, un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ possédant en t_0 une limite non nulle notée $\vec{u}_0$.
- La droite passant par M_{t_0} et dirigée par $\vec{u}_0$ est alors appelée **tangente à l'arc paramétré** (I, γ) au point de paramètre t_0. On dit aussi que **l'arc et la droite sont tangents** en M_{t_0}.

Remarque La définition précédente suppose que la droite $(M_{t_0}M_t)$ est définie pour t voisin de t_0, et donc que l'on a $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ au voisinage de t_0 ; le vecteur $\overrightarrow{M_{t_0}M_t} = \gamma(t) - \gamma(t_0)$ en est alors un vecteur directeur.

Exemple Considérons les fonctions composantes d'un arc plan γ définies par :

$$\forall t \in I \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Si $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ possède une limite m en t_0, alors Γ possède une tangent en M_{t_0}.

- Lorsque $m \in \mathbb{R}$, alors $\left(1, \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}\right)$ est un vecteur directeur de la droite $(M_{t_0}M_t)$, et ce vecteur admet comme limite le vecteur non nul $(1, m)$;
- Lorsque $m = \pm\infty$, alors $\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{y(t)-y(t_0)}, 1\right)$, qui est défini au voisinage de t_0, est un vecteur directeur de la droite $(M_{t_0}M_t)$ admettant comme limite le vecteur $(0, 1)$.

Dans les deux cas, la droite $(M_{t_0}M_t)$ admet donc une position limite, qui est la droite passant pas M_{t_0} et de « pente » m.

Remarque L'exemple ci-dessus montre que la définition précédente est une généralisation de ce que vous avez vu pour les courbes d'équation $y = f(x)$.

Tangente en un point régulier

Définition 10

Le point M_{t_0} de Γ de paramètre $t_0 \in I$ est dit **régulier** lorsque $\gamma'(t_0) \neq 0$. Sinon, on dit que c'est un point **stationnaire**.

p.352 **Exercice 17** Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré, J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\varphi : J \to I$ une application bijective telles que φ et φ^{-1} soient dérivables. On pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

1. Montrer que les arcs paramétrés Γ et $\Gamma_1 = (J, \gamma_1)$ ont même support.
2. Prouver que le point de paramètre θ_0 de Γ_1 en est un point régulier si, et seulement si, le point de paramètre $t_0 = \varphi(\theta_0)$ est un point régulier de Γ.

Avec les notations de l'exercice précédent, on dit que $\Gamma_1 = (J, \gamma_1)$ est un **reparamétrage admissible** de l'arc Γ. Ainsi, un reparamétrage admissible d'un arc ne modifie ni son support, ni le fait qu'un point de ce support soit régulier ou non pour le paramétrage.

p.353 **Exercice 18** Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Quels sont les points réguliers

1. de l'arc paramétré par $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & a + t\,\vec{u} \end{array}$?
2. de l'arc paramétré par $\gamma_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \theta & \longmapsto & a + \theta^3\,\vec{u} \end{array}$?

Quel contre-exemple obtient-on ainsi ?

Proposition 17

Si M_{t_0} est un point régulier de l'arc Γ, alors Γ admet pour tangente en ce point la droite passant par M_{t_0} et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 353

La droite $(M_{t_0}M_t)$ est dirigée par le vecteur $\dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$.

Exemples

1. Soit $(a,\vec{u}) \in \mathrm{IR}^n \times \big(\mathrm{IR}^n \setminus \{0\}\big)$ et $\gamma : \begin{array}{rcl} \mathrm{IR} & \longrightarrow & \mathrm{IR}^n \\ t & \longmapsto & a+t\vec{u} \end{array}$

   dont le support est une droite D.
   - Tout point de paramètre t_0 de cette droite D est régulier puisque $\gamma'(t_0)=\vec{u}$.
   - La tangente au point de paramètre t_0 est la droite passant par $M_{t_0}=\gamma(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire la droite D elle-même.
2. Soit $(r,\alpha) \in \mathrm{IR}_+^* \times \mathrm{IR}^*$. Tout point de l'hélice paramétrée par :

   $$\gamma : \begin{array}{rcl} \mathrm{IR} & \longrightarrow & \mathrm{IR}^3 \\ t & \longmapsto & (r\cos t\,,\, r\sin t\,,\, \alpha\, t) \end{array}$$

   est régulier, et la tangente au point de paramètre t_0 est la droite :

   $$M_{t_0} + \mathrm{IR}\,\gamma'(t_0) \quad \text{avec} \quad \gamma'(t_0) = (-r\sin t_0\,,\, r\cos t_0\,,\, \alpha).$$
3. L'arc paramétré (en forme d'alpha) de la page 328 possède,
   - au point de paramètre $t_1=-\frac{\pi}{3}$, une tangente dirigé par $\gamma'(-\frac{\pi}{3})=(-\sqrt{3},-3)$;
   - au point de paramètre $t_2=\frac{\pi}{3}$, une tangente dirigé par $\gamma'(\frac{\pi}{3})=(\sqrt{3},-3)$.

   Ainsi, en ce point double, le support possède deux tangentes différentes.

p.353 **Exercice 19** En utilisant les hypothèses et les notations de l'exercice 17, vérifier que si $t_0=\varphi(\theta_0)$, alors les vecteurs $\gamma'(t_0)$ et $\gamma_1'(\theta_0)$ dirigent la même droite.

Remarque Le résultat de l'exercice précédent montre qu'en un point simple régulier, la tangente que l'on a définie à l'arc paramétré peut être considérée comme une tangente au support de cet arc.

Définition 11

Γ est un **arc paramétré régulier** lorsque tous ses points sont réguliers.

Équation de la tangente en un point régulier d'un arc plan

Définition 12

On dit que $\Gamma=(I,\gamma)$ est un arc plan, lorsque γ est à valeurs dans IR^2.

Point méthode

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathcal{T}$ est la tangente à l'arc plan $\Gamma = (I, \gamma)$, au point de paramètre t_0, supposé régulier, alors on a :

$$m \in \mathcal{T} \iff \det_{\mathcal{B}}(m - \gamma(t_0)\,,\, \gamma'(t_0)) = 0,$$

ce qui donne une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$.

Démonstration. Un élément $m \in \mathbb{R}^2$ appartient à la tangente $\mathcal{T}$ si, et seulement si :

$$\gamma(t_0) - m \in \mathrm{Vect}(\gamma'(t_0)),$$

ce qui équivaut à dire que la famille $\big(\gamma(t_0) - m\,,\, \gamma'(t_0)\big)$ est liée puisque $\gamma'(t_0) \neq 0$. □

p.353 **Exercice 20** Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et l'ellipse paramétrée par $\gamma : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En donner une équation de la tangente au point de paramètre t_0.

p.353 **Exercice 21** Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$ et l'arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2p}\right) \qquad (\Gamma \text{ est une } \textbf{parabole}).$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, donner une équation de la tangente à Γ au point de paramètre t.
2. Par quels points du plan passe-t-il deux tangentes à Γ ?
3. En supposant $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ par lesquels passent deux tangentes à Γ orthogonales entre elles.

Définition 13

Si Γ est un arc plan admettant une tangente en M_{t_0}, la normale à Γ en M_{t_0} est la perpendiculaire issue de M_{t_0} à cette tangente.

p.354 **Exercice 22** Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et l'ellipse paramétrée par $\gamma : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En donner une équation de la normale au point de paramètre t_0.

Cas des points stationnaires (non réguliers)

On suppose ici que $\Gamma = (I, \gamma)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$ et que le point de paramètre t_0 de Γ vérifie $\gamma'(t_0) = 0$.

Point méthode

Si l'on a $\gamma'(t_0) = 0$ et $\gamma''(t_0) \neq 0$, alors l'arc Γ admet pour tangente en t_0 la droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\gamma''(t_0)$.

p.354

Exercice 23 Justifier l'affirmation précédente.
Indication : utiliser une formule de Taylor à l'ordre 2*.*

Interprétation cinématique Lorsque la vitesse s'annule, et que le vecteur accélération est non nul, la tangente à la trajectoire est dirigée par ce dernier.

p.355

Exercice 24 Tangente au point $t = 0$ de l'arc paramétré Γ défini par

$$\forall t \in [0, 4\pi] \quad x(t) = \cos t - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin t - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

p.355

Exercice 25 Tangente au point $t = 1$ de l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = t^2 - 2t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t.$$

p.355

Exercice 26 *(Approfondissement)*
Dans le cas général,en supposant γ suffisamment dérivable, montrer que la tangente en un point de paramètre t_0 est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul en ce point (s'il existe).

En revanche, il peut exister des cas non triviaux où tous les vecteurs dérivés sont nuls en t_0, ce qui n'empêche pas forcément l'arc d'y avoir une tangente.

p.355

Exercice 27 Montrer que l'arc paramétré Γ défini sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\gamma(0) = (0,0) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \gamma(t) = \left(e^{-1/t^2}, t\,e^{-1/t^2}\right),$$

possède une tangente au point de paramètre 0 et la déterminer.

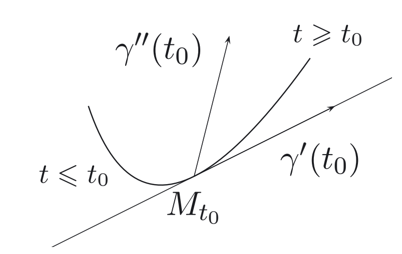
3 Forme du support au voisinage d'un point (arc plan)

Dans la partie précédente, nous avons étudié comment déterminer la tangente en un point d'un arc paramétré. Nous allons ici, pour les arcs plans, étudier comment le support est situé par rapport à cette tangente. On suppose pour cela l'arc suffisamment régulier, et en particulier, de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$.

Point birégulier : lorsque $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ ne sont pas colinéaires

Lorsque les vecteurs $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ ne sont pas proportionnels, alors :

- on a $\gamma'(t_0) \neq 0$, et Γ est donc tangent à la droite $\mathcal{T}$, passant par M_{t_0} et dirigée par $\gamma'(t_0)$;
- au voisinage de t_0, le support de Γ est situé dans le demi-plan défini par $\mathcal{T}$ et $\gamma''(t_0)$.



Justification

- Comme γ est au moins $\mathcal{C}^2$, écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de t_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{t_0}M_t} &= \gamma(t) - \gamma(t_0)\\ &= (t-t_0)\,\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\gamma''(t_0) + (t-t_0)^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to t_0}\varepsilon(t) = 0\end{aligned}$$

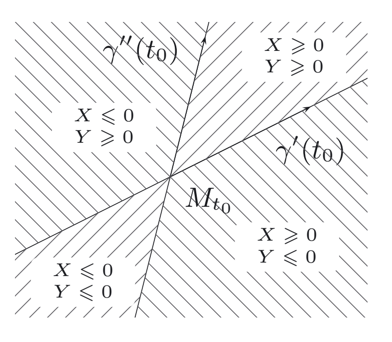
- Lorsque $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''t_0)$ ne sont pas proportionnels et qu'ils forment donc une base $\mathcal{B}'$ de IR^2, on peut décomposer l'égalité vectorielle précédente sur $\mathcal{B}'$. En désignant
  - $*$ par ε_1 et ε_2 les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur ε,
  - $*$ par $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées de $\overrightarrow{M_{t_0}M_t}$,

  on a alors $\lim\limits_{t\to t_0}\varepsilon_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\varepsilon_2(t) = 0$, ainsi que :

$$\begin{cases} X(t) = (t-t_0) + (t-t_0)^2\,\varepsilon_1(t)\\[2ex] Y(t) = \dfrac{(t-t_0)^2}{2} + (t-t_0)^2\,\varepsilon_2(t)\end{cases}$$

- On en déduit au voisinage de t_0 :

$$X(t) \sim_{t_0} (t-t_0) \qquad Y(t) \sim_{t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2}$$



  ce qui montre que, dans un voisinage de t_0,
  - $*$ $X(t)$ a le signe de $(t-t_0)$, et donc change de signe,
  - $*$ $Y(t)$ a le signe de $(t-t_0)^2$, et donc reste positif.

  Avec le régionnement ci-contre, on en déduit dans lequel des quatre quadrants délimités par $\big(M_{t_0}, \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\big)$ se trouve le point M_t, ce qui donne la forme du support. □

Remarque Dans la pratique, la forme précédente, est celle que l'on rencontre le plus souvent. C'est pourquoi un tel point s'appelle aussi **point ordinaire** ou **point banal**.

p.356

Exercice 28 En utilisant les hypothèses et les notations de l'exercice 17 de la page 329, mais en supposant φ de classe $\mathcal{C}^2$, vérifier que si le point de paramètre $t_0 = \varphi(\theta_0)$ est un point birégulier de l'arc Γ, alors c'est un point birégulier de Γ_1.

Point d'inflexion

- On suppose ici :
  - $*$ que le point M_{t_0} est régulier, et donc $\gamma'(t_0) \neq 0$;
  - $*$ que $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont colinéaires et donc qu'il existe $\lambda \in \mathrm{IR}$ tel que :

$$\gamma''(t_0) = 2\,\lambda\,\gamma'(t_0)\ ;$$

  - $*$ que $\gamma'(t_0)$ et $\gamma'''(t_0)$ sont non colinéaires, et forment une base $\mathcal{B}'$ de IR^2.

- Lorsque γ de classe $\mathcal{C}^3$, la formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{t_0}M_t} &= \gamma(t) - \gamma(t_0)\\ &= (t-t_0)\,\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\gamma''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\gamma'''(t_0) + (t-t_0)^3\varepsilon(t)\\ &= \left((t-t_0) + \lambda\,(t-t_0)^2\right)\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}\gamma'''(t_0) + (t-t_0)^3\varepsilon(t)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{t_0} \varepsilon = 0$. Si, dans la base $\mathcal{B}'$, on désigne

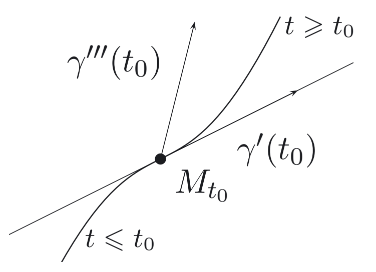
  * par $X(t)$ et $Y(t)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_{t_0}M_t}$,
  * par $\varepsilon_1(t)$ et $\varepsilon_2(t)$ les composantes du vecteurs $\varepsilon(t)$,

on a alors $\lim\limits_{t\to t_0} \varepsilon_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \varepsilon_2(t) = 0$, ainsi que :

$$\begin{cases} X(t) = (t-t_0) + \lambda\,(t-t_0)^2 + (t-t_0)^3\,\varepsilon_1(t)\\ Y(t) = \dfrac{(t-t_0)^3}{3!} + (t-t_0)^3\,\varepsilon_2(t)\end{cases}$$

- On en déduit :

$$X(t) \sim_{t_0} (t-t_0) \qquad Y(t) \sim_{t_0} \frac{(t-t_0)^3}{6}$$



qui sont donc, au voisinage de t_0, du signe de $(t-t_0)$. En en utilisant le régionnement de la page précédente, on en déduit dans quel quadrant se trouve le point M_t lorsque t est voisin de t_0. Dans ce cas, on obtient ce que l'on appelle un **point d'inflexion géométrique**.

p.356 **Exercice 29** Soit $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin 2t\,,\, \cos 3t)\end{array}$

En étudier la forme au voisinage du point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.

Point méthode

Dans ce qui précède, la formule de Taylor a essentiellement permis d'obtenir des développements limités des composantes de γ au voisinage de t_0. Lors de l'étude effective d'un arc, il peut-être plus efficace de partir des développements limités de ces composantes, comme nous le verrons dans la suite.

Dans les autres cas

Pour étudier la forme du support au voisinage :

- d'un point régulier pour lequel $\gamma'(t_0)$, $\gamma''(t_0)$ et $\gamma'''(t_0)$ sont proportionnels,
- d'un point stationnaire (pour lequel $\gamma'(t_0) = 0$),

des développements limités des fonctions composantes x et y de γ permettent en général de trouver un développement limité du style :

$$\overrightarrow{M_{t_0} M_t} = (t - t_0)\, v_1 + (t - t_0)^2\, v_2 + \cdots + (t - t_0)^p\, v_p + (t - t_0)^p\, \varepsilon(t)$$

avec $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs ne dépendant pas de t, et $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$.

En projetant cette relation sur les deux premiers de ces vecteurs formant une base du plan (s'il en existe), on peut alors comme précédemment préciser la forme de l'arc au voisinage de t_0.

Exemple Soit $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t - \sin t\,,\, 1 - \cos t). \end{array}$

Les développements limités classiques donnent :

$$x(t) = t - \sin t = \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad \text{ainsi que} \quad y(t) = 1 - \cos t = \frac{t^2}{2} + o(t^3),$$

et donc :

$$\gamma(t) = t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^3) \qquad (*)$$

- En utilisant la même méthode que dans l'exercice 26, on voit que l'on a :

  $$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{(t - 0)^2} = \frac{\gamma(t)}{t^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  et donc que la droite $(M_0 M_t)$ admet une position limite dirigée par le vecteur $(0, 1)$. Par suite, en 0, l'arc Γ est tangent à Oy.

- Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels, en projetant $(*)$ sur ces deux vecteurs, on voit que l'arc est de part et d'autre de l'ax Oy au voisinage de 0 (*cf.* exercice 36 de la page 339 pour le tracé du support).

On peut aussi souvent revenir à la définition et étudier $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$. Même si cela ne donne que la tangente, il est fréquent que cela permette de conclure.

p.356 **Exercice 30** Reprendre l'exemple précédent en utilisant $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$.

Point méthode

Lorsque la tangente obtenue avec cette dernière méthode n'est pas parallèle aux axes et que les signes de $y(t)-y(0)$ et $x(t)-x(0)$ ne suffisent donc plus pour conclure, il est possible de faire un développement limité du quotient comme dans l'exercice 7.7 de la page 369.

p.356 **Exercice 31** Vérifier que si M_t est un point d'inflexion de l'arc $\Gamma = (I, \gamma)$, avec $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, alors on a :

$$x'(t)\ y''(t) - x''(t)\,y'(t) = \det_{\mathcal{B}}\big(\gamma'(t), \gamma''(t)\big) = 0.$$

4 Tracé des arcs paramétrées

Réduction du domaine d'étude

Il est souvent possible de tracer tout le support d'un arc paramétré sans faire varier le paramètre sur la totalité de l'intervalle I où γ est définie.

Exemple Considérons l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin 2t\,,\ \cos 3t) \end{array}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, désignons par $x(t)$ et $y(t)$ les composantes de $\gamma(t)$.

- Les propriétés de périodicité des fonctions trigonométriques donnent :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t+2\pi) = \gamma(t).$$

  Par suite, les points M_t et $M_{t+2\pi}$ sont égaux, et l'on obtient tout le support en faisant varier t sur n'importe quel intervalle d'amplitude 2π.

- La relation :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t+\pi) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t+\pi) = -y(t)$$

  montre que M_t et $M_{t+\pi}$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox. Il suffit donc de tracer $\gamma\big([\alpha_0, \alpha_0+\pi]\big)$ où α_0 est un réel quelconque, puis de compléter par une symétrie Ox pour avoir $\gamma\big([\alpha_0, \alpha_0+2\pi]\big)$, c'est-à-dire tout le support de Γ.

- La relation :

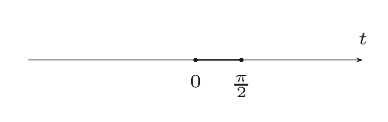
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t)$$

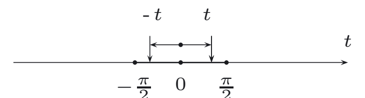
  montre que M_t et M_{-t} sont symétriques par rapport à l'axe Oy. Cela incite à prendre $[\alpha_0, \alpha_0+\pi] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et donc $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$, puisqu'alors $\gamma\big([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big)$ est la réunion de $\gamma\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$ et de son symétrique par rapport à Oy.

Ainsi, on trace $\gamma\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$, puis on complète, d'abord avec une symétrie par rapport à Ox et enfin avec une symétrie par rapport à Oy.

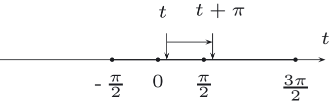
Remarque On peut, sur le schéma suivant, visualiser ce qui précède, en représentant l'axe du paramètre t afin d'y faire apparaître les transformations permettant de réduire le domaine d'étude, et ce qui leur correspond dans le plan du support.

Axe du paramètre t (invisible)

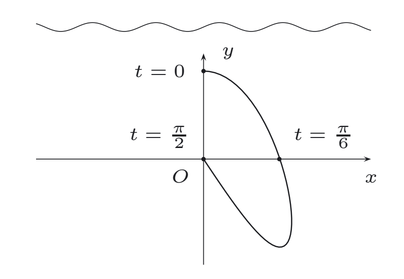


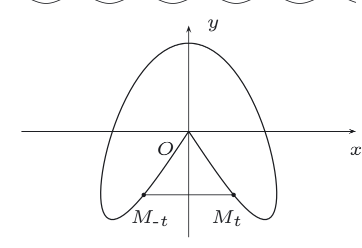


Symétrie 0 sur l'axe des t

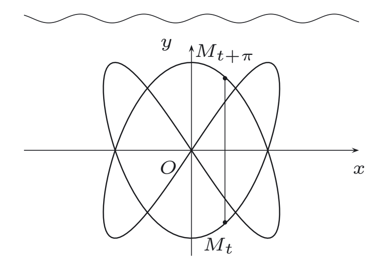


Translation de π sur l'axe des t





Symétrie Oy pour le support



Symétrie Ox pour le support

Plan du support de Γ (visible)

p.357

Exercice 32 Soit $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\cos 2t\,,\, \sin 3t) \end{array}$

1. En comparant $\gamma(t)$ et $\gamma(t+2\pi)$, montrer que son support est entièrement décrit sur un intervalle d'amplitude 2π.
2. En comparant $\gamma(t)$ et $\gamma(\pi - t)$, montrer que son support est entièrement décrit sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. Pourquoi peut-on se limiter à étudier γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

p.357

Exercice 33 Montrer que le support de l'arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t - \sin t\,,\, 1 - \cos t) \end{array}$$

se déduit par une symétrie et des translations de celui de $\Gamma_0 = \big([0, \pi], \gamma_{|[0,\pi]}\big)$.

p.357

Exercice 34 Montrer que le support de l'arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t\,,\, \sin^3 t) \end{array}$$

se déduit de celui de $\Gamma_0 = \big([0, \frac{\pi}{4}], \gamma_{|[0,\frac{\pi}{4}]}\big)$.

p.358 **Exercice 35** Montrer que le support de l'arc paramétré $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}\,,\,\frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$$

est symétrique par rapport à O et par rapport à première bissectrice.

Plan d'étude d'un arc paramétré

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré. Pour en tracer le support :

- commencer par essayer de réduire le domaine d'étude à un intervalle I_0 comme expliqué précédemment ;
- étudier les variations des composantes x et y de γ sur I_0, et reproduire ces résultats dans un tableau de variations ;
- étudier la forme du support au voisinage des points stationnaires en utilisant les méthodes vues dans la section précédente (*cf.* page 332).

On peut alors donner l'allure de $\gamma(I_0)$ en utilisant les résultats du tableau. Il suffit en général de joindre, dans l'ordre, les points y figurant en respectant les variations des fonctions coordonnées.

- un point M_t tel que $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ a une tangente verticale ;
- un point M_t tel que $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ a une tangente horizontale ;
- un point M_t tel que $x'(t) = y'(t) = 0$ est stationnaire, et des développements limités permettent en général de déterminer la forme du support au voisinage d'un tel point.

Pour obtenir tout $\gamma(I)$, il reste à compléter $\gamma(I_0)$ à l'aide des transformations géométriques trouvées lors de la réduction de l'intervalle d'étude.

Exemple Reprenons $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin 2t\,,\,\cos 3t) \end{array}$ et $I_0 = [0, \frac{\pi}{2}]$.

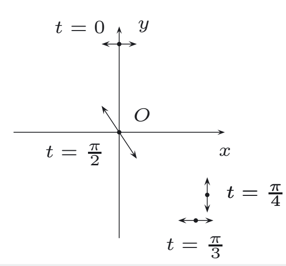
Cet arc est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ et :

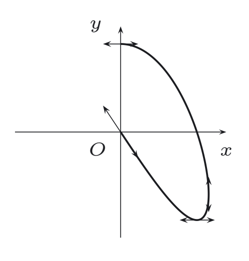
$$\forall t \in I_0 \quad x'(t) = 2\,\cos 2t \quad \text{et} \quad y'(t) = -3\,\sin 3t.$$

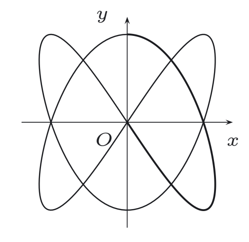
On en déduit facilement le tableau suivant.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1		-2
$y'(t)$	0	$-$	$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$	$-$	0	$+$	3
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

On peut alors placer les points trouvés et leurs tangentes, puis donner l'allure de Γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et enfin compléter par symétrie.







p.358 **Exercice 36** Construire $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t - \sin t \,,\, 1 - \cos t). \end{array}$

p.358 **Exercice 37** Construire $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t \,,\, \sin^3 t) \end{array}.$

p.359 **Exercice 38** Construire $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\frac{t}{1+t^4} \,,\, \frac{t^3}{1+t^4}). \end{array}$

5 Branches infinies

Même si les arcs paramétrés étudiés jusqu'alors avaient tous un un support borné, certains peuvent avoir des branches infinies. Dans cette section,

- on considère un arc paramétré (I, γ) du plan $\mathbb{R}^2$,
- pour tout $t \in I$, on désigne par $(x(t), y(t))$ les coordonnées de $\gamma(t)$ dans la base canonique,
- le réel t_0 désigne une extrémité finie ou infinie de I, n'appartenant pas à I.

Définition 14

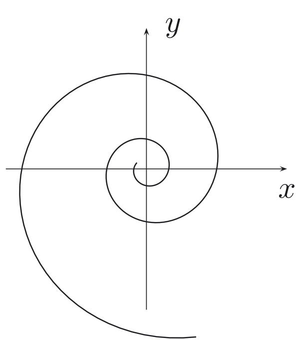
L'arc (I, γ) admet en t_0 une branche infinie si $\lim\limits_{t \to t_0} \|\gamma(t)\|_2 = +\infty$.

Attention

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors l'arc paramètre (I, γ) admet évidemment une branche infinie en t_0.
- Toutefois l'arc (I, γ) peut admettre une branche infinie en t_0 sans que x ou y aient de limite, comme par exemple en $t_0 = +\infty$:

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a^t \cos t \,,\, a^t \sin t) \end{array}$$

avec $a \in [1, +\infty[$, qui est une **spirale**, et que vous pourrez tracer à l'aide d'un logiciel.

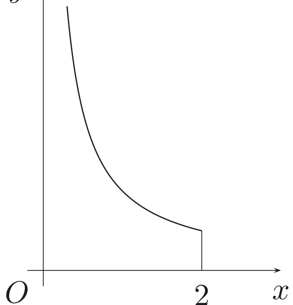


Asymptote

Dans toute la suite on suppose que l'arc (I, γ) admet une branche infinie en t_0. Une asymptote à Γ en t_0 est alors une droite « dont le point M_t se rapproche lorsque t tend vers t_0 ».

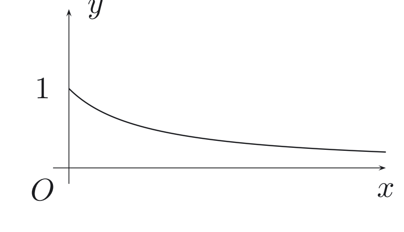
Asymptotes horizontales et verticales

- Lorsque $\lim\limits_{t_0} y = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t_0} x = x_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite verticale d'équation $x = x_0$ est asymptote à l'arc en t_0.
  C'est par exemple le cas en 0 de :
  $$\begin{array}{rccc} \gamma: &]0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, \frac{1}{t}) \end{array}$$
  dont le support est contenu dans la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.



  La position du support par rapport à l'asymptote est alors en général donnée par les variations de x, qui indiquent le signe de $x - x_0$.

- Lorsque $\lim\limits_{t_0} x = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t_0} y = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite horizontale d'équation $y = y_0$ est asymptote à l'arc en t_0.
  C'est par exemple le cas en $+\infty$ de :
  $$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, \frac{1}{t+1}) \end{array}$$
  dont le support est contenu dans la courbe d'équation $y = \frac{1}{x+1}$.



  La position du support par rapport à l'asymptote est alors en général donnée par les variations de y, qui indiquent le signe de $y - y_0$.

p.360 **Exercice 39** Construire l'arc Γ défini sur $]0, \pi[$ par :

$$x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin t \, \cos t$$

Asymptotes non verticales

Définition 15

Lorsque x et y tendent tous deux vers l'infini en t_0, la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à l'arc Γ en t_0 lorsque :

$$\lim_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t) - b\big) = 0.$$

En désignant par :

- M_t le point de paramètre t de Γ,
- N_t le point de même abscisse que M_t, mais situé sur la droite d'équation $y = a\,x + b$,

la condition :

$$\lim_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t) - b\big) = 0.$$

exprime $\lim_{t \to t_0} M_t N_t = 0$, ce qui correspond bien à l'idée intuitive d'une asymptote.

Analyse Si la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à Γ en t_0, alors :

- la fonction $t \mapsto y(t) - a\,x(t)$ possède une limite finie, puisque :

$$\lim_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t)\big) = b\ ;$$

- la fonction x, qui tend vers $\pm\infty$, ne s'annule pas au voisinage de t_0, et l'égalité :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = a + \frac{y(t) - a\,x(t)}{x(t)},$$

  associée au premier point entraîne $a = \lim_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}\cdot$

Ainsi, l'unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ possible est défini par :

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t)\big).$$

Synthèse Si la méthode précédente permet de trouver a et b tels que :

$$\lim_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t) - b\big) = 0,$$

alors, par définition, la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à Γ en t_0.

Point méthode

L'arc Γ possède une asymptote non verticale en t_0, si, et seulement si :

- d'une part, la quantité $\frac{y(t)}{x(t)}$ possède une limite finie a en t_0,
- d'autre part, la quantité $y(t) - a\,x(t)$ possède une limite finie b en t_0.

La droite d'équation $y = a\,x + b$ est alors asymptote à l'arc Γ.

Remarque Lorsque Γ possède une asymptote non verticale en t_0, la position relative de Γ et de cette asymptote est donnée par l'étude du signe de la quantité $y(t) - a\,x(t) - b$.

p.361 **Exercice 40** Étudier les branches infinies de l'arc paramétré défini sur $]1,+\infty[$ par :

$$x(t)=\frac{t^2}{t-1},\quad y(t)=\frac{2\,t+1}{t-1}$$

et en tracer le support.

Point méthode

Un équivalent de $y(t)-a\,x(t)-b$, donné éventuellement par un développement limité de $y(t)-a\,x(t)$, permet de préciser ce signe au voisinage de t_0.

p.363 **Exercice 41** Représenter l'arc défini sur $]1,+\infty[$ par :

$$x(t)=\frac{t}{t^4-1},\quad y(t)=\frac{t^2}{t^4-1}.$$

En préciser la position par rapport à l'asymptote.

p.364 **Exercice 42** En utilisant des développements asymptotiques de x et y, étudier la branche infinie en $+\infty$ de l'arc défini sur $]1,+\infty[$ par :

$$x(t)=\frac{t^2}{t-1},\quad y(t)=\frac{2\,t^3+1}{t^2-t}$$

et en préciser la position par rapport à son asymptote pour t assez grand.

Attention Lorsque $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=a\in\mathbb{R}$, il se peut que $t\mapsto y(t)-a\,x(t)$ n'ait pas de limite finie.

- Cette quantité peut tendre vers l'infini, comme par exemple :

$$\begin{array}{rcclcl}\gamma: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \text{en} & t_0=+\infty\\ & t & \longmapsto & (t,t+\ln t) & & \end{array}$$

  où l'on a $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=1$ et $y(t)-x(t)=\ln t\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}=+\infty$.

  On dit alors que l'arc possède une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y=x$.

- Mais elle peut aussi n'avoir aucune limite, comme par exemple :

$$\begin{array}{rcclcl}\gamma: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \text{en} & t_0=+\infty\\ & t & \longmapsto & (t,\sin t) & & \end{array}$$

  où l'on a :

$$\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=0$$

  alors que $y(t)-0\times x(t)=\sin t$ n'a aucune limite en $+\infty$.

p.365 **Exercice 43** Construire l'arc paramétré :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : &]-\frac{1}{2},+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \Big(2\,t+\dfrac{1}{2\,t+1}, t^2-\dfrac{1}{2\,t+1}\Big). \end{array}$$

6 Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Origine cinématique Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ représentant le mouvement d'un point matériel en fonction du temps. Alors $\gamma'(t) = v(t)$ en est le vecteur vitesse à l'instant t, et, si t_0 et t_1 sont deux éléments de I vérifiant $t_0 < t_1$, le physicien nous dit que la distance parcourue par ce point entre les instants t_0 et t_1 est :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v(t)\|_2 \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t.$$

Intuitivement, entre les instants t et $t+\delta t$, le point parcourt la distance $\|v(t)\|_2 \, \delta t$, que l'on intègre pour avoir la distance totale parcourue.

Dans toute la suite,

- on suppose $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne canonique notée $\| \ \|_2$;
- $\Gamma = (I,\gamma)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ avec $k \geqslant 1$.

Définition 16

Si t_1 et t_2 deux éléments de I avec $t_1 < t_2$, alors la **longueur de l'arc paramétré** $([t_1,t_2],\gamma)$ est le réel positif $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$.

Remarque On peut ainsi calculer la longueur du support de l'arc, à condition que ce dernier ne soit pas parcouru plusieurs fois, et plus précisément que l'application γ soit injective sur $[t_1,t_2[$.

Les exercices suivants permettent de vérifier la cohérence de cette définition.

p.366 **Exercice 44** Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, établir que la longueur, en tant qu'arc paramétré, du segment $[a,b]$ est égal à $\|b-a\|_2$.

p.366 **Exercice 45** Justifier que si Γ_1 se déduit de Γ :

- soit par une isométrie vectorielle,
- soit par une translation, c'est-à-dire une application de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^n \text{ fixé,}$$

alors les deux arcs Γ et Γ_1 ont même longueur.

p.366

Exercice 46 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\varphi : J \to I$ bijective croissante telles que les applications φ et φ^{-1} soient $\mathcal{C}^1$. Si $\theta_1 \in J$ et $\theta_2 \in J$ vérifient $\theta_1 < \theta_2$, montrer que les arcs $\big([\varphi(\theta_1), \varphi(\theta_2)], \gamma\big)$ et $\big([\theta_1, \theta_2], \gamma \circ \varphi\big)$ ont même longueur.

Calcul de la longueur d'un arc

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, le cercle de centre de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ est paramétré par :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (r\cos t\,,\, r\sin t) \end{array}$$

   Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2\,\sin^2 t + r^2\,\cos^2 t} = r,$$

   et son périmètre vaut donc :

$$\int_0^{2\,\pi} r\ \mathrm{d}t = 2\pi r.$$

   Cela correspond bien à ce que vous savez depuis longtemps.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, une hélice circulaire est paramétrée par

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (r\cos t\,,\, r\sin t\,,\, k\,t) \end{array} \qquad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } k \in \mathbb{R}^{*+}.$$

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2\,\sin^2 t + r^2\,\cos^2 t + k^2} = \sqrt{r^2 + k^2}.$$

   La partie correspondant à un tour complet autour de l'axe Oz a pour longueur :

$$\int_0^{2\,\pi} \sqrt{r^2 + k^2}\ \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + k^2}.$$

p.366

Exercice 47 Longueur de l'arc paramétré par $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array}$.

p.367

Exercice 48 Soit r et φ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Si γ est donnée en en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & r(t)\,\vec{u}\big(\varphi(t)\big) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \vec{u} : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta),$$

exprimer la longueur de l'arc $\big([t_1, t_2], \gamma\big)$ en fonction de r, de φ et de leurs dérivées.

p.367

Exercice 49 Exprimer sous forme d'intégrale la longueur de l'ellipse :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (2\cos t, 3\sin t). \end{array}$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Pour tout $t \neq a$, on a :

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}\, u \underset{t\to a}{\longrightarrow} \varphi'(a)\, u.$$

Par suite, f est dérivable en a, et $f'(a) = \varphi'(a)\, u$.

Proposition 1

- Supposons qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ tels que $\varepsilon(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$ et :

  $$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\, v + (t-a)\, \varepsilon(t)$$

  Alors, pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

  $$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = v + \varepsilon(t) \quad \text{et donc} \quad \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \underset{t\to a}{\longrightarrow} v$$

  ce qui prouve (ii).
- Réciproquement, supposons f dérivable en a et $f'(a) = v$.
  Soit $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varepsilon(a) = 0$ et :

  $$\forall t \in I \setminus \{a\} \quad \varepsilon(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - v$$

  Par construction, on a bien :

  $$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\, v + (t-a)\, \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 2 Si l'on prolonge $\tau_a(f)$ en posant $\tau_a(f)(a) = f'(a)$, alors on a :

$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\, \tau_a(f)(t),$$

et le taux d'accroissement $\tau_a(f)$ est continu en a puisque f est dérivable en a. Par suite, f est continue en a, comme somme de produits d'applications continues en a.

Exercice 2 Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- La fonction $f : t \mapsto |t|\, u$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Son taux d'accroissement en 0 n'a pas de limite car :

  $$\forall t > 0 \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = u \qquad \text{et} \qquad \forall t < 0 \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = -u,$$

  ce qui entraîne :

  $$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = u \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = -u.$$

  Comme $u \neq 0$, on a $u \neq -u$, et la fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

Proposition 3 Pour $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{f_\ell(t)-f_\ell(a)}{t-a}\right) e_\ell.$$

On en déduit la première partie du résultat puisqu'une fonction :

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(t)\, e_\ell \end{array}$$

admet pour limite $v = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell\, e_\ell$ en a si, et seulement si :

$$\forall \ell \in [\![1,n]\!] \quad \lim_a g_\ell = v_\ell.$$

Et, lorsque f est dérivable en a, on a donc $f'(a) = \sum_{\ell=1}^{n} f'_\ell(a)\, e_\ell$.

Exercice 3 Chacune de ces fonctions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque ses fonctions composantes le sont. On obtient leur dérivée « en dérivant composante à composante », ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \vec{u}\,'(t) = \bigl(-\sin t, \cos t\bigr) = \vec{v}(t)$$

et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \vec{v}\,'(t) = \bigl(-\cos t, -\sin t\bigr) = -\vec{u}(t).$$

Proposition 5 Une application $f : I \to \mathbb{R}^n$ est constante sur I si, et seulement si, chacune des ses fonctions composantes est constante. Comme ils s'agit de fonctions à valeurs réelles, ces fonctions composantes sont constantes sur l'intervalle I si, et seulement si, elles sont dérivables et de dérivées nulles. On en déduit le résultat.

Proposition 7

- Pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\tau_a(L \circ f)(t) = \frac{(L \circ f)(t) - (L \circ f)(a)}{t-a} = \frac{L\bigl(f(t)\bigr) - L\bigl(f(a)\bigr)}{t-a}$$

  Étant donné que L est linéaire, on a :

$$\tau_a(f)(t) = \frac{L\bigl(f(t) - f(a)\bigr)}{t-a} = L\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right).$$

  Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, l'application linéaire L est continue, et le théorème de composition des limites entraîne que l'on a $\lim_{t\to a} \tau_a(L \circ f)(t) = L\bigl(f'(a)\bigr)$

- Version globale du résultat précédent.

Proposition 8

Soit $\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. Notons $(f_1, \ldots, f_n)$ les composantes de f dans $\mathcal{B}_1$, et $(g_1, \ldots, g_p)$ celles de g dans $\mathcal{B}_2$. On a alors :

$$B(f,g) = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f_\ell\, g_k\, B(u_\ell, v_k).$$

Supposons f et g dérivables en a. Alors, pour $(\ell,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

- les fonctions numériques composantes f_ℓ et g_k sont dérivables en a, et il en est donc de même de leur produit $f_\ell\, g_k$;

- d'après l'exercice 1 de la page 317, la fonction $f_\ell\, g_k\, B(u_\ell, v_k)$ est dérivable en a et :

$$\begin{aligned}\big(f_\ell\, g_k\, B(u_\ell, v_k)\big)' &= (f_\ell\, g_k)'\, B(u_\ell, v_k)\\ &= (f_\ell'\, g_k + f_\ell\, g_k')\, B(u_\ell, v_k)\end{aligned}$$

Par somme, on en déduit que $B(f,g)$ est dérivable et que :

$$\begin{aligned}B(f,g)' &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f_\ell'\, g_k\, B(u_\ell, v_k) + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f_\ell\, g_k'\, B(u_\ell, v_k)\\ &= B(f', g) + B(f, g').\end{aligned}$$

Le second point n'est que la version globale du premier.

Exercice 4

Comme f est dérivable sur I, l'application $\|f\|_2^2 = (\, f \mid f\,)$ est dérivable sur I et :

$$\big(\|f\|_2^2\big)' = 2\,(\, f \mid f'\,).$$

- Si f est de norme constante, alors :

$$2\,(\, f \mid f'\,) = \big(\|f\|_2^2\big)' = 0,$$

  et pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont donc orthogonaux.
- Supposons $f(t_0) \neq 0$. Alors $\|f\|_2$ est dérivable en t_0 car c'est la composée
  - de $\|f\|_2^2$, qui est dérivable en t_0,
  - et de la fonction racine qui est dérivable en $\|f(t_0)\|_2^2$ puisque $\|f(t_0)\|_2^2 > 0$.

Exercice 5

- Comme f_1 et f_2 sont solutions de $(\mathcal{E})$, elles sont deux fois dérivables et :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ t & \longmapsto & (f_1, f_2)\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ t & \longmapsto & (f_1', f_2')\end{array}$$

  sont donc des fonctions vectorielles dérivables.
- La bilinéarité de l'application $\det_{\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ nous dit alors que W est dérivable et que :

$$W' = \begin{vmatrix} f_1' & f_1' \\ f_2' & f_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix}.$$

  Étant donné que f_1 et f_2 sont solutions de $(\mathcal{E})$, on en déduit :

$$W' = \begin{vmatrix} f_1 & -a f_1' - b f_1 \\ f_2 & -a f_2' - b f_2 \end{vmatrix} = -a\, W.$$

Remarque Dans ce cas particulier, on aurait pu évidemment dériver directement :

$$W = f_1\, f_2' - f_2\, f_1'$$

sans utiliser la proposition précédente. Toutefois c'est une méthode qui n'est pas généralisable, avec un calcul plus basique, mais moins évident à faire de tête.

Exercice 6

1. Comme $\big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)$ est une base orthonormée, la fonction $(\, u_i \mid u_j \,)$ est constamment nulle. En la dérivant, on obtient :

$$0 = (\, u_i' \mid u_j \,) + (\, u_i \mid u_j' \,). \tag{$*$}$$

Si l'on pose $A_t = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, la relation $(*)$ s'écrit aussi :

$$0 = a_{j,i} + a_{i,j}.$$

Par suite,pour tout $t \in I$, la matrice M_t est antisymétrique, et il existe donc trois réels $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ tels que :

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & 0 & -\alpha(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t) & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{cases} u_1'(t) = \gamma(t)\, u_2(t) - \beta(t)\, u_3(t) \\ u_2'(t) = \alpha(t)\, u_3(t) - \gamma(t)\, u_1(t) \\ u_3'(t) = \beta(t)\, u_1(t) - \alpha(t)\, u_2(t) \end{cases}$$

On peut alors vérifier que le vecteur :

$$\Omega(t) = \alpha(t)\, u_1(t) + \beta(t)\, u_2(t) + \gamma(t)\, u_3(t)$$

répond au problème.

Exercice 7 Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ la fonction (dérivable) décrivant ce mouvement. D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall t \in I \quad (\, f(t) \mid f'(t) \,) = 0,$$

ce qui signifie que la fonction $\|f\|_2^2$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I. Elle est donc constante, ce qui prouve le résultat.

Proposition 9

- Pour tout $t \in I$, on a :

$$(f \circ \varphi)(t) = f\big(\varphi(t)\big) = \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell\big(\varphi(t)\big)\, e_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} (f_\ell \circ \varphi)(t)\, e_\ell.$$

  * Les fonctions composantes de $f \circ \varphi$ sont donc $(f_1 \circ \varphi), \ldots, (f_n \circ \varphi)$.
  * Elles sont dérivables en α comme composées de fonctions numériques dérivables, et y ont pour dérivée $f_1'(\varphi(\alpha))\, \varphi'(\alpha), \ldots, f_n'(\varphi(\alpha))\, \varphi'(\alpha)$.

  On en déduit que $f \circ \varphi$ est dérivable en α et que :

$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell'\big(\varphi(\alpha)\big)\, \varphi'(\alpha)\, e_\ell = \varphi'(\alpha) \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell'\big(\varphi(\alpha)\big)\, e_\ell = \varphi'(\alpha)\, f'\big(\varphi(\alpha)\big).$$

- Version globale du résultat précédent.

Exercice 8

- La fonction $u \circ \theta$ est dérivable par composition, et :
$$\forall t \in I \quad (\vec{u} \circ \theta)'(t) = \theta'(t)\, \vec{u}\,'\big(\theta(t)\big) = \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big)$$
où $\vec{v}$ est définie par $\vec{v} : \theta \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta) = \vec{u}\big(\theta + \frac{\pi}{2}\big)\cdot$
- Par suite f est dérivable (par bilinéarité du produit), et l'on a :
$$\forall t \in I \quad f'(t) = r'(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + r(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big),$$
ce que l'on peut encore écrire par abus de notation :
$$f' = r'\, \vec{u}(\theta) + r\, \theta'\, \vec{v}(\theta).$$
C'est l'expression de la vitesse en coordonnées polaires.

Exercice 9 Analogue à l'exercice précédent. On obtient :
$$\forall t \in I \quad f'(t) = r'(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + r(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big) + z'(t)\, \vec{k},$$
ou encore :
$$f' = r'\, \vec{u}(\theta) + r\, \theta'\, \vec{v}(\theta) + z'\, \vec{k}.$$

Exercice 10 On a déjà vu que f est dérivable et que :
$$\forall t \in I \quad f'(t) = r'(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + r(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big).$$
Les théorèmes généraux sur les fonctions vectorielles montrent que f' est dérivable et que, pour tout $t \in I$, on a :
$$\begin{aligned} f''(t) = &\Big(r''(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + r'(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big)\Big) \\ &+ \Big(r'(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big) + r(t)\, \theta''(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big) + r(t)\, \theta'^2(t)\, \vec{v}\,'\big(\theta(t)\big)\Big). \end{aligned}$$
Comme $\vec{v}' = -\vec{u}$, on en déduit :
$$f'' = (r'' - r\, \theta'^2)\ \vec{u}(\theta) + (2\, r'\, \theta' + r\, \theta'')\, \vec{v}(\theta).$$
C'est la formule de l'accélération en coordonnées polaires.

Exercice 11

1. La fonction $f : I \to \mathbb{R}^3$ représentant un mouvement est donc deux fois dérivable. Par bilinéarité, la fonction g est alors dérivable, et, pour tout $t \in I$, on a :
$$g'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = f(t) \wedge f''(t).$$
Comme $f(t)$ et $f''(t)$ sont supposés colinéaires, g' est nulle sur I ; on en déduit que g est constante sur l'intervalle I.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur (supposé non nul) de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = \vec{u}$. On a donc :
$$\forall t \in I \quad f(t) \wedge f'(t) = \vec{u}.$$
Par suite, le vecteur $f(t)$ se trouve dans le plan vectoriel (passant par O) orthogonal à $\vec{u}$, ce qui entraîne que le mouvement du point M_t est plan.

Proposition 11

Montrons la propriété par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ puisqu'une fonction est continue si, et seulement si, ses fonctions composantes sont continues.
- Supposons cette propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$, et démontrons-la au rang $k+1$.

  Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si, et seulement si,

  * elle est dérivable sur I, ce qui équivaut à dire que toutes ses fonctions composantes sont dérivables sur I,
  * sa fonction dérivée est de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui d'après l'hypothèse de récurrence, équivaut à dire que toutes ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^k$.

  D'après ce que l'on sait des fonctions réelles d'une variable réelle, cela équivaut donc à dire que toutes les fonctions composantes de f sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui termine la démonstration de la récurrence.

Enfin, une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, et seulement si, elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le début de la démonstration, cela équivaut à dire que chacune de ses composantes est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 12 Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$;
- il contient la fonction nulle ;
- si $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$:

$$(\lambda\, f + \mu\, g)_\ell = \lambda\, f_\ell + \mu\, g_\ell$$

  est de classe $\mathcal{C}^k$ d'après les propriétés des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$.

Par suite, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$.

Exercice 12 Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathbb{R}^p$.

- Notons $(f_1,\dots,f_n)$ les composantes de f dans $\mathcal{B}_1$,
- ainsi que $\big((L\circ f)_1,\dots,(L\circ f)_p\big)$ les composantes de $L\circ f$ dans $\mathcal{B}_2$.

Si $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$ est la matrice de L par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (L\circ f)_i = \sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, f_\ell.$$

Comme $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$, toutes les fonctions f_ℓ sont éléments de $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$. Par suite, chaque composante $(L\circ f)_i$ est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^k$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On en déduit que $L\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 14 La relation :

$$\forall t \in J \quad f\big(\varphi(t)\big) = \sum_{k=1}^{\ell} f_\ell\big(\varphi(t)\big)\, e_\ell.$$

montre que, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $(f\circ\varphi)_\ell = f_\ell \circ \varphi$.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, alors chaque f_ℓ est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et il en est donc de même de toutes les fonctions composantes $(f \circ \varphi)_\ell$ d'après les résultats sur les fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^k$. On en déduit que $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 15

- On le connaît pour $k = 0$.
- Supposons-le vrai pour $k \in \mathbb{N}$. Soit donc $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^p)$. Comme f et g sont donc de classe $\mathcal{C}^k$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B\big(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell)}\big).$$

Ainsi, la fonction $\big(B(f,g)\big)^{(k)}$ est une combinaison linéaire d'images par B de couples de fonctions de classe au moins $\mathcal{C}^1$; elle est donc dérivable sur I, et :

$$\begin{aligned}
\big(B(f,g)\big)^{(k+1)} &= \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B\big(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell)}\big)\right)' \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \Big(B\big(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell+1)}\big) + B\big(f^{(\ell+1)}, g^{(k-\ell)}\big)\Big) \\
&= \binom{k}{0} B\big(f, g^{(k+1)}\big) + \binom{k}{k} B\big(f^{(k+1)}, g\big) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{k} \left(\binom{k}{\ell} + \binom{k}{\ell-1}\right) B\big(f^{(\ell)}, g^{(k-\ell+1)}\big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} B\big(f^{(\ell)}, g^{(k+1-\ell)}\big).
\end{aligned}$$

On en déduit
* d'une part, la formule au rang $k+1$,
* d'autre part, que la fonction $\big(B(f,g)\big)^{(k+1)}$ est continue, par opérations sur les fonctions continues, et donc que l'on a $B(f,g) \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}^q)$.

Cela prouve le résultat au rang $k+1$, et termine la démonstration par récurrence.

Exercice 13 En dérivant deux fois le produit $f = r.(\vec{u} \circ \theta)$, on obtient :

$$f'' = r''.(\vec{u} \circ \theta) + 2\,r'.(\vec{u} \circ \theta)' + r.(\vec{u} \circ \theta)''.$$

Partant de :

$$(\vec{u} \circ \theta)' = \theta'.(\vec{u}\,' \circ \theta) = \theta'.(\vec{v} \circ \theta),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \circ \theta)'' &= \theta''.(\vec{v} \circ \theta) + (\theta')^2.(\vec{v}\,' \circ \theta) \\
&= \theta''.(\vec{v} \circ \theta) - (\theta')^2.(\vec{u} \circ \theta)
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$f'' = \big(r'' - r\,\theta'^2\big).(\vec{u} \circ \theta) + (2\,r'\,\theta' + r\,\theta'')\,(\vec{v} \circ \theta).$$

Exercice 14 Les développements limités usuels :

$$t-\sin t=\frac{t^3}{6}+\mathrm{o}(t^3)\quad \text{et}\quad 1-\cos t=\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^3)$$

donnent directement :

$$f(t)=t^2\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ 0\end{pmatrix}+\mathrm{o}(t^3).$$

Exercice 15 Étant donné que $\dfrac{1}{1+t^4}=1+\mathrm{o}(t^2)$, on a :

$$\frac{t}{1+t^4}=t+\mathrm{o}(t^3)\quad \text{et}\quad \frac{t^3}{1+t^4}=t^3+\mathrm{o}(t^3).$$

On en déduit :

$$f(t)=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\mathrm{o}(t^3).$$

Exercice 16

- L'équivalent $\sin^3\sim t^3$ donne directement :
$$\sin^3=t^3+\mathrm{o}(t^3).$$
- Le développement usuel de cos en 0 donne :
$$\cos^3 t=\Big(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^3)\Big)^3=1-\frac{3\,t^2}{2}+\mathrm{o}(t^3).$$

On en déduit :

$$f(t)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\mathrm{o}(t^3).$$

Proposition 16

Soit $f\in\mathcal{C}^k(I,\mathrm{IR}^n)$. Alors, chacune de ses composantes f_ℓ, pour $\ell\in[\![1,n]\!]$, est une fonction numérique classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et l'on peut donc écrire :

$$f_\ell(t)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(t-t_0)^i}{i!}f_\ell^{(i)}(t_0)+\mathrm{o}\big((t-t_0)^k\big),$$

ce qui est l'égalité attendue, mais écrite composante à composante.

Exercice 17

1. Comme $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$, il est immédiat que l'image de γ_1 est incluse dans celle de γ. Le support de $\Gamma_1=(J,\gamma_1)$ est donc inclus dans celui de Γ.
   Comme φ est bijective, on a $\gamma=\gamma_1\circ\varphi^{-1}$, et le support de Γ est de même inclus dans celui de Γ_1. D'où l'égalité des supports.
2. La règle de dérivation d'une fonction composée donne :
$$\gamma_1'(\theta_0)=\varphi'(\theta_0)\,\gamma'\big(\varphi(\theta_0)\big)=\varphi'(\theta_0)\,\gamma'(t_0).$$
   Comme φ et φ^{-1} sont dérivables, la fonction φ' ne s'annule pas, et donc :
$$\gamma_1'(\theta_0)\neq 0\Longleftrightarrow\gamma'(t_0)\neq 0.$$

Exercice 18

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma'(t) = \vec{u} \neq 0$.
   L'arc $(\mathbb{R}, \gamma)$ n'a donc aucun point stationnaire.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\gamma_1'(\theta) = 3\,\theta^2\,\vec{u}$.
   L'arc $(\mathbb{R}, \gamma_1)$ possède donc un unique point stationnaire pour $\theta = 0$.

L'application $\varphi : \theta \mapsto \theta^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on a $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, et les deux arcs ont donc le même support. Pourtant :

- le point de paramètre $\theta = 0$ est un point stationnaire de $(\mathbb{R}, \gamma_1)$;
- alors que le point de paramètre $t = 0 = \varphi(0)$ n'est pas stationnaire pour $(\mathbb{R}, \gamma)$.

Cet exemple montre que la double hypothèse de dérivabilité de l'exercice précédent est indispensable : ici, φ est dérivable en 0, mais pas φ^{-1}.

Proposition 17 Par définition du vecteur dérivé, on a :

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_{t_0} M_t}}{t - t_0}. \qquad (*)$$

Comme par hypothèse, on a $\gamma'(t_0) \neq 0$, on en déduit que le vecteur $\frac{\overrightarrow{M_{t_0} M_t}}{t - t_0}$ est non nul au voisinage de t_0, et qu'il dirige donc la droite $(M_{t_0} M_t)$. La relation $(*)$ prouve alors le résultat d'après la définition d'une tangente.

Exercice 19 Avec les notations de l'exercice 17, on a :

$$\gamma_1'(\theta_0) = \varphi'(\theta_0)\,\gamma'\big(\varphi(\theta_0)\big) = \varphi'(\theta_0)\,\gamma'(t_0).$$

ce qui prouve le résultat puisque $\varphi'(\theta_0)$ est un réel non nul. Ainsi, un reparamétrage admissible d'un arc ne modifie pas la tangente en un point régulier.

Exercice 20 Tous les points de l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ sont réguliers, et une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ au point de paramètre t_0 est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y - b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = b\,x\,\cos t_0 + a\,y\,\sin t_0 - a\,b = 0.$$

Exercice 21

1. La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale. Pour $t \in \mathbb{R}$, le point M_t de paramètre t est régulier, puisque :

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{p}\right) = \frac{1}{p}(p, t) \neq (0, 0).$$

   Une équation de la tangente en ce point est donc donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - t & p \\ y - \frac{t^2}{2p} & t \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou encore} \quad 2\,t\,x - 2\,p\,y - t^2 = 0.$$

2. Par le point $A(x_0, y_0)$, il passe deux tangentes à la parabole si, et seulement si, l'équation en t :
$$t^2 - 2\,t\,x_0 + 2\,p\,y_0 = 0 \qquad (*)$$
possède deux racines distinctes, c'est-à-dire lorsque son discriminant vérifie :
$$\Delta = 4\,(x_0^2 - 2\,p\,y_0) > 0.$$
Il est immédiat qu'il s'agit des points situés sous la parabole Γ, qui est aussi la courbe d'équation $2\,p\,y = x^2$.
3. Par le point $A(x_0, y_0)$, il passe deux tangentes orthogonales à la parabole si, et seulement si, l'équation en t :
$$t^2 - 2\,t\,x_0 + 2\,p\,y_0 = 0 \qquad (*)$$
possède deux racines t_1 et t_2 vérifiant :
$$\big(\,\gamma'(t_1)\,\big|\,\gamma'(t_2)\,\big) = 0 \quad \text{ou encore} \quad t_1\,t_2 = -p^2.$$
En utilisant la formule donnant le produit des racines d'une équation du second degré, cela équivaut à :
$$y = -\frac{p}{2}\cdot$$
Remarquons qu'il est inutile de parler du discriminant, puisque lorsque $\frac{c}{a} < 0$, l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède deux racines réelles.

Exercice 22 Au point de paramètre t_0, la tangente est dirigée par le vecteur non nul :
$$\gamma'(t_0) = (-a \sin t_0, b \cos t_0).$$
Par suite, la normale en ce point admet pour équation :
$$-a\,\sin t_0\,(x - a\,\cos t_0) + b\,\cos t_0\,(y - b\,\sin t_0) = 0$$
ou encore :
$$-a\,x\,\sin t_0\; + b\,y\,\cos t_0 + (a^2 - b^2)\,\sin t_0\,\cos t_0 = 0.$$

Exercice 23 La fonction γ étant de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor-Young donne :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{t_0}M_t} &= \gamma(t) - \gamma(t_0)\\ &= (t-t_0)\,\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\gamma''(t_0) + (t-t_0)^2\,\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$
L'hypothèse $\gamma'(t_0) = 0$ entraîne alors :
$$\overrightarrow{M_{t_0}M_t} = \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\gamma''(t_0) + (t-t_0)^2\,\varepsilon(t),$$
ce qui entraîne :
$$\lim_{t\to t_0} \frac{2}{(t-t_0)^2}\,\overrightarrow{M_{t_0}M_t} = \gamma''(t_0). \qquad (*)$$
Comme par hypothèse, on a $\gamma''(t_0) \neq 0$, on en déduit que le vecteur $\frac{2}{(t-t_0)^2}\,\overrightarrow{M_{t_0}M_t}$ est non nul au voisinage de t_0, et qu'il dirige donc la droite $(M_{t_0}M_t)$. La relation $(*)$ prouve alors le résultat d'après la définition d'une tangente.

Exercice 24 Le point de paramètre 0 est stationnaire. Comme

$$\big(x''(0), y''(0)\big) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \neq (0,0),$$

l'arc Γ possède au point $(-1,0)$ de paramètre 0 une tangente parallèle à l'axe Ox.

Exercice 25 Le point de paramètre 1 est stationnaire. En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur $f''(1) = (2,4)$.

Exercice 26 Soit (I,γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, et t_0 un élément de I tel que parmi les vecteurs $\gamma'(t_0)$, $\gamma''(t_0)$, $\dots \gamma^{(k)}(t_0)$, il existe au moins un vecteur non nul. Posons :

$$p = \min\left\{i \in [\![1,k]\!] \mid \ \gamma^{(i)}(t_0) \neq 0\right\}.$$

On a donc :

$$\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i < p \quad \gamma^{(i)}\ (t_0) = 0.$$

La fonction γ étant de classe $\mathcal{C}^p$, elle admet, d'après la formule de Taylor-Young, un développement limité à l'ordre p au voisinage de t_0, qui s'écrit :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!}\,\gamma^{(i)}(t_0) + (t-t_0)^p\,\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t_0} \varepsilon = 0.$$

Comme, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, le vecteur $\gamma^{(i)}(t_0)$ est nul, on obtient :

$$\frac{\overrightarrow{M_{t_0}M_t}}{(t-t_0)^p} = \frac{1}{p!}\,\gamma^{(p)}(t_0) + \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t_0} \varepsilon = 0.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\overrightarrow{M_{t_0}M_t}}{(t-t_0)^p} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \frac{1}{p!}\,\gamma^{(p)}(t_0)$$

et comme ce vecteur à une limite non nulle, il est non nul au voisinage de t_0 et dirige donc la droite $(M_{t_0}M_t)$. On en déduit le résultat par définition de la tangente.

Exercice 27

- C'est un exercice classique que de prouver que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

  $$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) = e^{-1/t^2}$$

  est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et a toutes se dérivées nulles en 0.
- On en déduit que tous les vecteurs dérivés de γ sont nuls en 0, ce qui empêche d'utiliser le résultat de l'exercice précédent. En revanche la relation :

  $$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = t$$

  entraîne $\lim\limits_{0} \frac{y}{x} = 0$ et donc que Γ admet l'axe Ox comme tangente en O.

Exercice 28 Avec les notations de l'exercice 17 de la page 329, on a :

$$\begin{cases} \gamma'(t_0) & = \varphi'(t_0)\,\gamma_1'(\theta_0) \\ \gamma''(t_0) & = \varphi''(t_0)\,\gamma_1'(\theta_0) + \big(\varphi'(t_0)\big)^2\,\gamma_1''(\theta_0) \end{cases}$$

et donc :

$$\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0)\big) = \big(\varphi'(t_0)\big)^3 \det\big(\gamma_1'(\theta_0),\gamma_1''(\theta_0)\big).$$

Comme $\varphi'(t_0) \neq 0$, cela prouve que la notion de point birégulier est indépendante du paramétrage admissible utilisé puisque :

$$\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0)\big) \neq 0 \Longleftrightarrow \det\big(\gamma_1'(\theta_0),\gamma_1''(\theta_0)\big).$$

Exercice 29 Avec les notations classiques, on a :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 2\,\cos 2t \\ y'(t) = -3\,\sin 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x''(t) = -4\,\sin 2t \\ y''(t) = -9\,\cos 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x'''(t) = -\;8\,\cos 2t \\ y'''(t) = 27\,\sin 3t \end{cases}$$

et donc :

$$\gamma\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \gamma''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma'''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 8 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Étant donné que $\gamma'\big(\frac{\pi}{2}\big) \neq 0$, que $\gamma'\big(\frac{\pi}{2}\big)$ et $\gamma''\big(\frac{\pi}{2}\big)$ sont colinéaires, et que $\gamma'\big(\frac{\pi}{2}\big)$ et $\gamma'''\big(\frac{\pi}{2}\big)$ ne sont pas colinéaires, le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion de Γ (voir l'exemple de la page 338 pour le tracé).

Exercice 30 Pour tout $t \in [-\pi,0[\,\cup\,[0,\pi]$, on a :

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1-\cos t}{t-\sin t} \sim \frac{3}{t}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{t\to 0}\left|\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}\right| = +\infty$, ce qui prouve que l'arc est tangent à Oy au point de paramètre 0. Comme y est positive et que x est du signe de t, on obtient directement la forme du support.

Exercice 31 On a vu précédemment (*cf.* page 332) que si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ ne sont pas colinéaires, alors le point de paramètre t de Γ est un point banal, et n'est donc pas un point d'inflexion. Par contraposée, si M_t est un point d'inflexion, on a :

$$0 = \det_{\mathcal{B}}\big(\gamma'(t),\gamma''(t)\big) = x'(t)\;y''(t) - x''(t)\,y'(t).$$

Point méthode

Les points d'inflexion sont donc à chercher parmi les solutions de l'équation :

$$x'\,y'' - x''\,y' = 0.$$

En général, cette équation possède un nombre fini de solutions. Pour savoir si ce sont ou non des points d'inflexion, il suffit pour chacun d'eux de déterminer les deux premiers vecteurs dérivés linéairement indépendants, le plus souvent en effectuant des développements limités de $x\,(t)$ et de $y\,(t)$.

Exercice 32

- Comme $\gamma\,(t+2\,\pi)=\gamma(t)$, le support est entièrement décrit dans un intervalle I d'amplitude $2\,\pi$, et il suffit donc de tracer Γ_1 défini par :

$$x(t)=-\cos 2t \quad \text{et} \quad y(t)=\sin 3t \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } t\in[\alpha,\alpha+2\,\pi]\,.$$

- Étant donné que $\gamma\,(\,\pi-t)=\gamma(t)$, les points de paramètre t et $\pi-t$ sont identiques, et l'on a intérêt à choisir le réel α pour que l'intervalle $[\alpha,\alpha+2\,\pi]$ soit symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\alpha=-\frac{\pi}{2}\cdot$ Le support de Γ_1 est alors égal au support de Γ_2 défini par :

$$x(t)=-\cos 2t \quad \text{et} \quad y(t)=\sin 3t \quad \text{avec } t\in\left[-\tfrac{\pi}{2}\tfrac{\pi}{2}\right].$$

- Comme x est paire et y impaire, Γ_2 est symétrique par rapport à l'axe Ox, et l'on peut donc se limiter à étudier γ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 33

- Comme $\gamma\,(t+2\,\pi)=\gamma(t)+2\,\pi\,\vec{\imath}$, l'arc Γ est invariant par des translations de vecteur $2\,k\,\pi\,\vec{\imath}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Il suffit donc de tracer Γ_1 défini par :

$$x(t)=t-\sin t \quad \text{et} \quad y(t)=1-\cos t \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } t\in[\alpha,\alpha+2\,\pi]\,,$$

puis de compléter par ces translations.

- Comme :

$$x\,(-t)=-x\,(t) \quad \text{et} \quad y\,(-t)=y\,(t)\,,$$

si l'on choisit $\alpha=-\pi$ alors Γ_1 est symétrique par rapport à Oy.
Il suffit donc de tracer Γ_0 défini par :

$$x(t)=t-\sin t \quad \text{et} \quad y(t)=1-\cos t \quad \text{avec } t\in[0,\pi]\,,$$

puis de compléter par la symétrie Oy pour avoir Γ_1.

Exercice 34

- Comme $\gamma\,(t+2\,\pi)=\gamma(t)$, le support est entièrement décrit dans un intervalle I d'amplitude $2\,\pi$, et il suffit donc de tracer Γ_1 défini par :

$$x(t)=\cos^3 t \quad \text{et} \quad y(t)=\sin^3 t \quad \text{avec } t\in[0,2\,\pi]\,.$$

- Étant donné que :

$$x\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-y(t) \quad \text{et} \quad y\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=x(t),$$

le point $\gamma\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ se déduit de $\gamma(t)$ par rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}\cdot$ Il suffit donc de tracer Γ_1, restriction de γ à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et de compléter par 3 rotations.

- Comme :

$$x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=x(t),$$

le point $\gamma\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ se déduit du point $\gamma(t)$ par symétrie par rapport à la première bissectrice. Il suffit donc de tracer Γ_0, puis de compléter à l'aide de cette symétrie pour obtenir Γ_1, que l'on complète alors avec les rotations.

Exercice 35

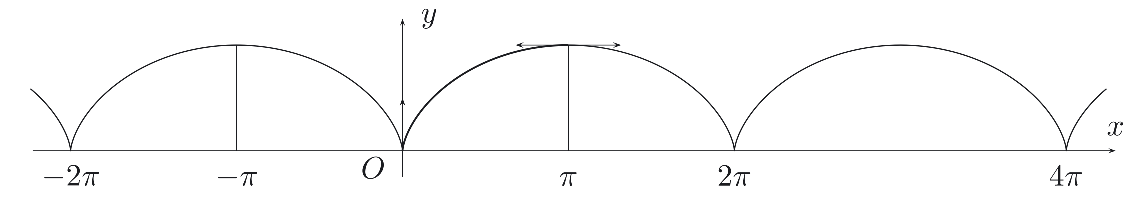
- Étant donné que les fonctions x et y sont impaires, les points M_t et M_{-t} sont symétriques par rapport à l'origine. On pourra donc limiter l'étude de Γ à $\mathbb{R}_+$.
- Pour $t \in \mathbb{R}^*$, les relations :
$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t),$$
montrent que les points M_t et $M_{\frac{1}{t}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$. Comme $M_0 \in \Delta$, on en déduit que Γ est symétrique par rapport à Δ, et que l'on pourra limiter l'étude de Γ à l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 36

- Les fonctions :
$$x : t \mapsto t - \sin t \quad \text{et} \quad y : t \mapsto 1 - \cos t$$
étant évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de γ. Dans l'exercice 33 de la page 337, on a déjà vu qu'il suffisait d'étudier γ sur l'intervalle $[0,\pi]$ puis de compléter par une symétrie et des translations.
- Étant donné que :
$$\forall t \in [0,\pi] \quad x'(t) = 1 - \cos t$$
et que :
$$\forall t \in [0,\pi] \quad y'(t) = \sin t,$$
on obtient facilement le tableau de variations.

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
$y'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	π
y	0	$\nearrow$	2

- Dans cet intervalle, seul le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire. Comme :
$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1 - \cos t}{t - \sin t} \sim \frac{3}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$
l'arc Γ est en ce point tangent à Oy. La position du support par rapport à cet axe se voit sur le tableau de variations.
- On en déduit le tracé de Γ sur $[0,\pi]$, que l'on complète sur tout $\mathbb{R}$, d'abord par une symétrie par rapport à Oy ; puis par des translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{\imath}$.



Cette courbe est appelée **cycloïde**.

Exercice 37

- Les fonctions :
$$x : t \mapsto \cos^3 t \quad \text{et} \quad y : t \mapsto \sin^3 t$$
étant évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de γ. Dans l'exercice 34 de la page 337, on a déjà vu qu'il suffisait d'étudier γ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ puis de compléter par une symétrie et des rotations.

- Étant donné que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad x'(t) = -3\,\cos^2 t \sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\,\sin^2 t\,\cos t,$$

on obtient facilement le tableau de variations suivant :

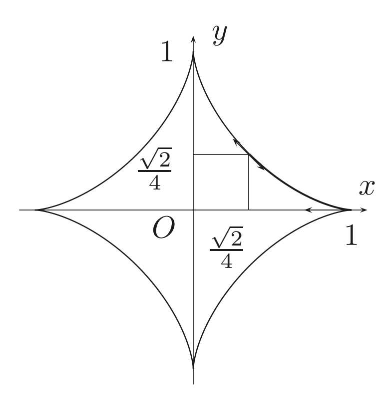
t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$+$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$
x	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

- Dans cet intervalle, seul le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire. Comme :

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t - 1} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)\,(\cos^2 t + \cos t + 1)} \sim -\frac{2\,t}{3} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

l'arc Γ est en ce point tangent à Ox. La position du support par rapport à cet axe se voit sur le tableau de variations.

- On en déduit le tracé de l'arc Γ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]\cdot$ On le complète ensuite à l'aide de la symétrie par rapport à la première bissectrice, puis avec trois rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}\cdot$



Cette courbe est appelée **astroïde**.

Exercice 38

- Comme les fonctions rationnelles :

$$x : t \mapsto \frac{t}{1+t^4} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto \frac{t^3}{1+t^4}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de γ. Dans l'exercice 35 de la page 338, on a déjà vu qu'il suffisait d'étudier γ sur l'intervalle $[0, 1]$ puis de compléter par une symétrie par rapport à la première bissectrice, puis une symétrie par rapport à l'origine du repère.

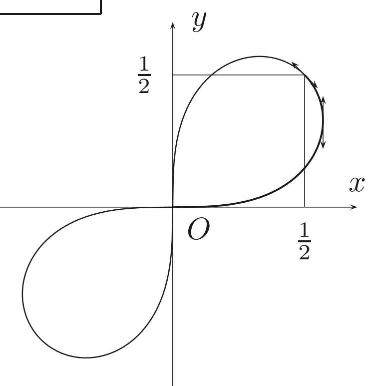
- Étant donné que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad x'(t) = \frac{1 - 3\,t^4}{(1+t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2\,(3 - t^4)}{(1+t^4)^2}$$

on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0		$+$		$\frac{1}{2}$
x	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

- Il n'y a aucun point stationnaire sur cet intervalle. Le point de paramètre $t = 0$, qui est l'origine O du repère, est un point d'inflexion de l'ensemble de l'arc, ce qui n'est pas surprenant puisque ce dernier admet O comme centre de symétrie.
- On en déduit le tracé de Γ sur $[0, 1]$, que l'on complète par la symétrie par rapport à la première bissectrice, puis par la symétrie par rapport à l'origine. Cette courbe est appelée **Lemniscate de Bernoulli**.

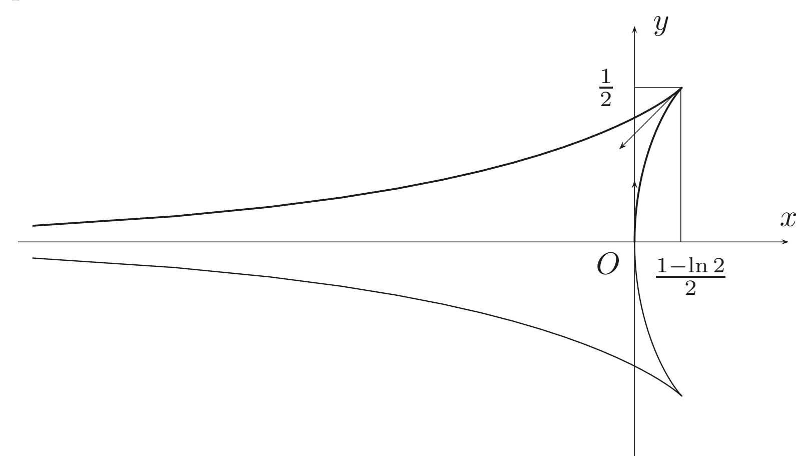


Exercice 39

- Les fonctions x et y étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \pi[$ d'après les théorèmes généraux, il en est de même de γ.
- Comme :
$$\forall t \in \,]0, \pi[\quad x(\pi - t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = -y(t)$$
l'arc Γ est symétrique par rapport à Ox, et il suffit de faire l'étude pour $t \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$
- Étant donné que :
$$\forall x \in \,]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad x'(t) = \frac{\cos t}{\sin t} \cos 2t \quad \text{et} \quad y'(t) = \cos 2t$$
on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	-1
x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1-\ln 2}{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

- Lorsque t tend vers 0, l'arc Γ admet l'axe Ox comme asymptote, Γ est évidemment au dessus de Ox puisque y est positive sur l'intervalle.
- Sur cet intervalle, seul le point de paramètre $t=\frac{\pi}{4}$ est stationnaire.
  En posant $t=\frac{\pi}{4}+h$, on a :
  $$y'\big(\tfrac{\pi}{4}+h\big)=\cos\Big(2\big(\tfrac{\pi}{4}+h\big)\Big)=-\sin 2h=-2h+\mathrm{o}(h^2) \qquad (*)$$
  et donc par intégration : $y\big(\frac{\pi}{4}+h\big)=\dfrac{1}{2}-h^2+\mathrm{o}(h^3)$.
  Comme :
  $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}=\frac{1-\tan h}{1+\tan h}=\frac{1-h+\mathrm{o}(h)}{1+h+\mathrm{o}(h)}=1-2h+\mathrm{o}(h),$$
  la relation $(*)$ nous donne :
  $$x'\big(\tfrac{\pi}{4}+h\big)=\big(1-2h+\mathrm{o}(h)\big)\big(-2h+\mathrm{o}(h^2)\big)=-2h+4h^2+\mathrm{o}(h^2),$$
  ce qui par intégration entraîne :
  $$x\big(\tfrac{\pi}{4}+h\big)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}-h^2+\frac{4\,h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3).$$
  On en déduit :
  $$\gamma\Big(\frac{\pi}{4}+h\Big)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}+h^2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+h^3\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}+\mathrm{o}\big(h^3\big).$$
  La tangente au point de paramètre $t=\frac{\pi}{4}$ est donc dirigée par le vecteur $(1,1)$, et comme le terme suivant est en h^3, l'arc est au voisinage de ce point de part et d'autre de cette tangente. C'est un point de rebroussement.
- On en déduit le tracé de Γ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, que l'on complète par la symétrie par rapport à l'axe Ox pour obtenir l'arc initial.



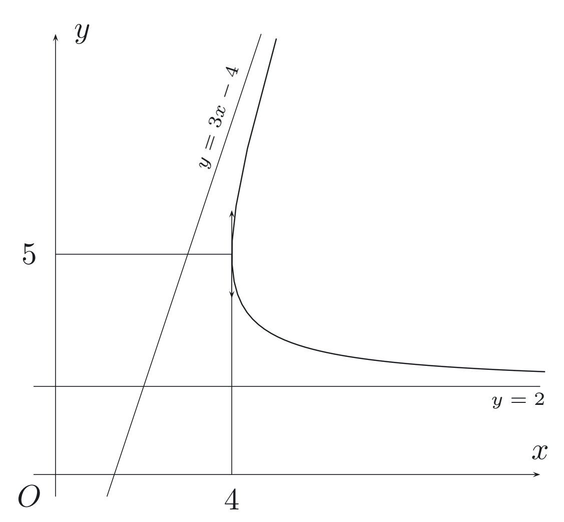
Exercice 40

- Comme les fonctions rationnelles :
  $$x: t\mapsto \frac{t^2}{t-1} \quad \text{et} \quad y: t\mapsto \frac{2\,t+1}{t-1}$$
  sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, il en est de même de l'arc qu'elles définissent.
- Étant donné que : $\forall x\in\,]1,+\infty[\quad x'(t)=\dfrac{t\,(t-2)}{(t-1)^2}\quad$ et $\quad y'(t)=\dfrac{-3}{(t-1)^2}$,

on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$y'(t)$			$-$		
x	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	2

- Il n'y a aucun point stationnaire.
- Étant donné que :
$$x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 2,$$
la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à l'arc lorsque $t \to +\infty$. L'étude des variations de y montre que Γ est situé au dessus de cette asymptote.
- Lorsque t tend vers 1, les fonctions x et y tendent vers $+\infty$, et :
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2\,t+1}{t^2} \underset{t\to1}{\longrightarrow} 3.$$
Étant donné que :
$$y(t) - 3\,x(t) = \frac{2\,t+1-3\,t^2}{t-1} = \frac{(1-t)\,(1+3\,t)}{t-1} = -(1+3\,t) \underset{t\to1}{\longrightarrow} -4,$$
la droite d'équation $y = 3\,x - 4$, est asymptote à l'arc lorsque $t \to 1$. Et l'arc Γ est situé en dessous de cette asymptote puisque :
$$\forall t > 1 \quad 1 + 3\,t > 4 \quad \text{et donc} \quad y(t) - 3\,x(t) < -4,$$
On en déduit le tracé.



Exercice 41

- Comme les fonctions rationnelles :

$$x : t \mapsto \frac{t}{t^4-1} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto y(t) = \frac{t^2}{t^4-1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, il en est de même de l'arc qu'elles définissent.

- Étant donné que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad x'(t) = -\frac{1+3\,t^4}{(t^4-1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{2\,t\,(t^4+1)}{(t^4-1)^2}$$

on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	0 $\qquad$ $-$
x	$+\infty$ $\searrow$ 0
x	$+\infty$ $\searrow$ 0

- Il n'y a aucun point stationnaire.
- En $+\infty$, il n'y a pas de branche infinie, puisque x et y tendent toutes deux vers 0. On peut donc ajouter l'origine au support de Γ. Étant donné que :

$$\frac{y(t)-0}{x(t)-0} = t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

on en déduit que la tangente en ce point est alors l'axe Oy.

- Lorsque t tend vers 1, les fonctions x et y tendent vers $+\infty$, et :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t\to1}{\longrightarrow} 1.$$

Étant donné que :

$$y(t) - x(t) = \frac{t^2-t}{t^4-1} = \frac{t}{t^3+t^2+t+1} \underset{t\to1}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

on en déduit que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{4}$, est asymptote à l'arc lorsque t tend vers 1. Pour en étudier la position, on peut :

* soit faire un développement limité de $y(t) - x(t)$ au voisinage de 1 en po-

sant $t = 1 + h$:

$$\begin{aligned} y(1+h) - x(1+h) &= \frac{1+h}{(1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1} \\ &= \frac{1+h}{4 + 6\,h + \mathrm{o}(h)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1+h}{1 + \frac{3}{2}\,h + \mathrm{o}(h)}\right) \end{aligned}$$

et donc :

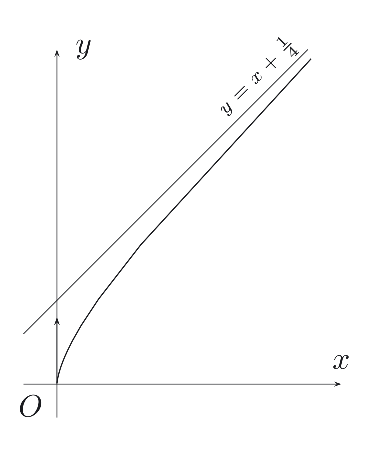
$$y(1+h) - x(1+h) = \frac{1}{4}(1+h)\,\left(1 - \frac{3}{2}\,h + \mathrm{o}(h)\right) = \frac{1}{4} - \frac{h}{8} + \mathrm{o}(h)\ ;$$

ainsi, la droite d'équation $y = x - \frac{1}{4}$ est asymptote à l'arc est en 1, et l'arc *finit par être en dessous* de cette droite lorsque t est voisin de 1 ;

∗ soit de former et factoriser $y(t) - x(t) - \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) - \frac{1}{4} &= \frac{t}{t^3 + t^2 + t + 1} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{t^3 + t^2 - 3\,t + 1}{4\,(t^3 + t^2 + t + 1)} \\ &= -\frac{1}{4}\,(t-1)\,\frac{t^2 + 2t - 1}{t^3 + t^2 + t + 1}\ ; \end{aligned}$$

comme cette quantité est évidemment négative sur tout l'intervalle, on en déduit Γ *est toujours en dessous* de cette asymptote.



Exercice 42 Lorsque t tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{t-1} = t\,\frac{1}{1 - \frac{1}{t}} \\ &= t\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^3}\Big)\right) = t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{2\,t^3 + 1}{t^2 - t} = \frac{2\,t + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t}} \\ &= \Big(2\,t + \frac{1}{t^2}\Big)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^3}\Big)\right) = 2\,t + 2 + \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \end{aligned}$$

Pour obtenir une limite finie, il suffit de faire disparaître les puissances positives t, et donc de calculer :

$$y(t) - 2\,x(t) = \frac{1}{t^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2\,x$ est asymptote à l'arc lorsque t tend vers $+\infty$ et que le support de Γ finit par être au dessus de cette droite.

Exercice 43

- Comme les fonctions rationnelles :

$$x : t \mapsto 2\,t + \frac{1}{2\,t+1} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto t^2 - \frac{1}{2\,t+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, il en est de même de γ.

- Étant donné que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad x'(t) = \frac{8\,t\,(t+1)}{(2\,t+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{2\,(t+1)\,(4t^2+1)}{(2\,t+1)^2}$$

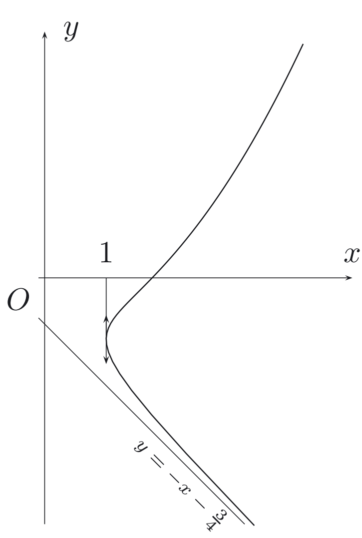
on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$y'(t)$			$+$		
x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Lorsque t tend vers $-\frac{1}{2}$, il est immédiat avec les écritures données de $x(t)$ et de $y(t)$, que la somme $x+y$ a une limite finie qui vaut $-\frac{3}{4}\cdot$ On forme donc :

$$y(t) + x(t) + \frac{3}{4} = t^2 + 2\,t + \frac{3}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{3}{2}\right) \geqslant 0.$$

La droite d'équation $y + x + \frac{3}{4}$ est donc asymptote à l'arc lorsque t tend vers $-\frac{1}{2}$, et elle est reste en dessous de l'arc.



Remarque On aurait pu commencer par étudier la limite de y/x ou faire des développements asymptotiques de x et y, mais cela aurait ici été moins efficace.

- Lorsque t tend vers $+\infty$, on a :



$$\lim_{+\infty} x = \lim_{+\infty} y = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \frac{y}{x} = +\infty.$$

Si l'arc admettait une asymptote, elle serait parallèle à Oy, ce qui est impossible puisque $\lim\limits_{+\infty} y = +\infty$. Cet arc se comporte donc comme une parabole d'axe Oy, il a ce que l'on appelle une branche parabolique de direction Oy.

Exercice 44 Le segment $[ab]$ est l'arc paramétré par :

$$\begin{array}{rccl}\gamma(t): & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & t & \longmapsto & (1-t)\,a+t\,b.\end{array}$$

Pour tout $t\in[0,1]$, on a alors $\gamma'(t)_2=b-a$, et donc :

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \|b-a\|_2\,\mathrm{d}t=\|b-a\|_2.$$

Exercice 45 Soit $\gamma:[t_1t_2]\to\mathbb{R}^n$ un arc paramétré.

- Considérons L une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$, et Γ_1 l'arc transformé de Γ par L qui est donc paramétré par $\gamma_1=L\circ\gamma$.
  - ∗ Comme L est linéaire, d'après la proposition 7 de la page 319, on a :
  $$\gamma_1'=(L\circ\gamma)'=L\circ\gamma'.$$
  - ∗ Étant donné que L est une isométrie vectorielle, on a :
  $$\forall t\in[t_0,t_1]\quad \|\gamma_1'(t)\|_2=\|(L\circ\gamma)'(t)\|_2=\big\|L\big(\gamma'(t)\big)\big\|_2=\|\gamma'(t)\|_2.$$

  On en déduit immédiatement le résultat.
- Si Γ_1 se déduit de Γ par la translation de vecteur a, alors on peut en prendre comme paramétrage $\gamma_1=\gamma+a$, et donc $\gamma_1'=\gamma'$, ce qui permet de conclure immédiatement.

Exercice 46 Soit $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$. La longueur de $\big([\theta_1,\theta_2],\gamma_1\big)$ est :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|\gamma_1'(\theta)\|_2\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|\varphi'(\theta)\,\gamma'\big(\varphi(\theta)\big)\|_2\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}|\varphi'(\theta)|\,\|\gamma'\big(\varphi(\theta)\big)\|_2\,\mathrm{d}\theta.$$

Étant donné que φ est strictement croissante, on a :

$$\forall\theta\in J\quad |\varphi'(\theta)|=\varphi'(\theta).$$

Comme $t_1=\varphi(\theta_1)$ et $t_2=\varphi(\theta_2)$, le changement de variable $t=\varphi(\theta)$ donne alors :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}|\varphi'(\theta)|\,\|\gamma'\big(\varphi(\theta)\big)\|_2\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\big\|\gamma'\big(\varphi(\theta)\big)\big\|_2\,\varphi'(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_{t_1}^{t_2}\|\gamma'(t)\|_2\,\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve l'égalité attendue.

Exercice 47 Étant donné que, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-3\,\cos^2 t\,\sin t\\ 3\,\sin^2 t\,\cos t\end{pmatrix}=3\,\cos t\,\sin t\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

et donc $\|\gamma'(t)\|_2=3\,\cos t\,\sin t$, la longueur de l'arc donné est :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\|\gamma'(t)\|_2\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\,\cos t\,\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\,t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\cdot$$

Exercice 48 En dérivant le produit $\gamma = r\,\vec{u}$, on obtient :

$$\gamma'(t) = r'(t)\,\vec{u}\big(\varphi(t)\big) + r(t)\,\varphi'(t)\,\vec{v}\big(\varphi(t)\big),$$

où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}$. On en déduit :

$$\forall t \in [t_1, t_2] \quad \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\,\varphi'(t)^2},$$

et la longueur cherchée vaut donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_2 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\,\varphi'(t)^2}.$$

Exercice 49 L'ellipse donnée a pour longueur :

$$\int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

quantité qui ne peut être exprimée à l'aide des fonctions élémentaires, ce qui justifie l'introduction des intégrales dites elliptiques.

S'entraîner et approfondir

★ **7.1** Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dérivable en 0 avec $f(0) = 0$, établir :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0).$$

★ **7.2** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On suppose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (\star)$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer f.

★ **7.3** Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_r$ des éléments de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$.

1. Si B est une forme r-linéaire sur $\mathbb{R}^n$, montrer par récurrence que la fonction $B(f_1,\ldots,f_r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a :

$$\big(B(f_1,\ldots,f_r)\big)' = B(f_1', f_2\ldots,f_r) + B(f_1,f_2',f_3\ldots,f_r) + \cdots + B(f_1,\ldots,f_{r-1},f_r')$$

2. Lorsque $r = n$ en déduire la dérivée de $\det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\ldots,f_n)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Calculer D_n', et en déduire D_n.

7.4 **(Spirale logarithmique)** On travaille ici dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, orienté par sa base canonique, et α désigne un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

1. Soit $\Gamma_0 = (\mathbb{R},\gamma_0)$ défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \gamma_0(t) = \left(e^{\theta\cos\alpha}\cos(\theta\sin\alpha)\,,\, e^{\theta\cos\alpha}\sin(\theta\sin\alpha)\right).$$

Vérifier que l'angle orienté entre les vecteurs $\gamma_0(t)$ et $\gamma_0'(t)$ est constant. *Indication : penser à identifier $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$.*

2. Soit $\Gamma = (\mathbb{R},\gamma)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = (1,0)$ et que l'angle orienté entre les vecteurs $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ soit de mesure α. Montrer qu'il existe un intervalle I et une application $\Phi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma\circ\Phi$ soit une restriction de γ_0. Que peut-on en conclure pour le support de Γ ?

7.5 Dans $\mathbb{R}^n$, déterminer les arcs paramétrés (I,γ) de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par l'origine et tels que la famille $\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big)$ soit liée pour tout t.

Indication : utiliser la fonction dérivée de $f : t \mapsto \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|_2}$.

⋆ **7.6** Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$ et l'arc $\Gamma = (\mathbb{R},\gamma)$, où $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$, appelé **parabole**.

1. Déterminer une équation de la normale à l'arc au point de paramètre t.
2. Donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des points où passent trois normales à Γ qui soient deux à deux distinctes.

7.7 Étudier l'arc défini par $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}. \end{cases}$

7.8 1. Représenter l'arc Γ défini par $\begin{cases} x(t) = 3\,t^2 \\ y(t) = 2\,t^3. \end{cases}$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, la tangente au point M_t de cet arc le recoupe en un point de paramètre t' différent de t.
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cet arc.

7.9 Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$, ainsi que le point $A = (R,0)$. Montrer que l'ensemble des projetés orthogonaux de A sur les tangentes à $\mathcal{C}$ est le support d'un arc paramétré, et le représenter.

7.10 Soit Γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que, pour tout M de son support, le point A d'intersection de Ox et de la tangente en M à Γ, vérifie $\big\|\overrightarrow{MA}\big\|_2 = 1$.

1. Montrer que le support d'un tel arc se trouve dans l'une des deux bandes :
$$B_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < v < 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < v < 0\}.$$
2. En supposant Γ régulier et paramétré par une mesure $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'angle orienté $\big(\vec{\imath}, \overrightarrow{A_\theta M_\theta}\big)$, en donner une représentation paramétrique, et l'étudier.

7.11 1. Étudier et tracer l'arc défini par :
$$x(t) = t + \frac{1}{2t^2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}.$$
Justifier en particulier qu'elle admet un axe de symétrie.

2. Montrer que l'ensemble Δ des points par lesquels passent deux tangentes à l'arc orthogonales entre elles est une droite dont on donnera une équation.

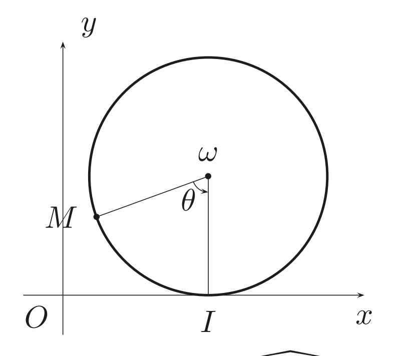
7.12 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ l'arc paramétré défini par :
$$x(t) = a\,\cos^3 t \quad \text{et} \quad y(t) = a\,\sin^3 t \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$
Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la tangente en M_t à Γ coupe respectivement Ox et Oy en P_t et Q_t. Montrer que la longueur P_tQ_t est constante.

7.13 Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$x(t) = 2\,r\,\cos t + r\,\cos 2t \quad \text{et} \quad y(t) = 2\,r\,\sin t + r\,\sin 2t.$$

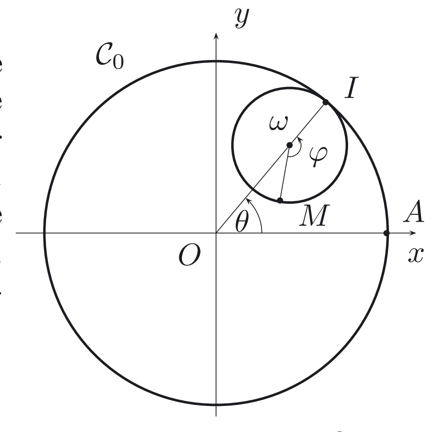
1. Comment en déduire le tracé de celui de l'exercice 7.9 de la page précédente ?
2. Montrer que le point d'intersection de la tangente au point de paramètre t et de la tangente au point de paramètre $t+\pi$ décrit un cercle de centre O.

7.14 Dans le plan euclidien, un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R > 0$ roule sans glisser sur l'axe Ox. Un point $M \in \mathcal{C}$ fixe par rapport à $\mathcal{C}$ décrit une courbe que l'on appelle **cycloïde**. On désigne par ω le centre de $\mathcal{C}$, et par I son point de contact avec Ox. Si à l'origine la point M est en O, le roulement sans glissement se traduit à chaque instant par l'égalité de longueur entre l'arc IM et le segment OI.



1. Déterminer le coordonnées de M en fonction d'une mesure θ de l'angle $\big(\widehat{\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega I}}\big)$.
2. Montrer que la normale en M à la courbe précédente passe par I.

7.15 Dans le plan euclidien, un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r > 0$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_0$ de centre O et de rayon $R = n\,r$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Un point $M \in \mathcal{C}$ fixe par rapport à $\mathcal{C}$ décrit une courbe appelée **hypocycloïde**. On désigne par ω le centre de $\mathcal{C}$, et par I son point de contact avec $\mathcal{C}_0$. Si à l'origine la point M est $A(R,0)$, le roulement sans glissement se traduit à chaque instant par l'égalité de longueur entre les arcs IM et AI.



1. Déterminer le coordonnées de M en fonction d'une mesure θ de l'angle $\big(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\big)$.
2. Que dire de l'ensemble des points M lorsque $n = 2$?
3. Dans la suite, on suppose $n \geqslant 3$. Montrer que la courbe décrite par M est invariante par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}\cdot$
4. Montrer que la normale en M à la courbe précédente passe par I.
5. Calculer la longueur de tout le support.

7.16 Soit P, Q et R trois éléments de $\mathbb{R}[X]$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, ne contenant aucune racine de R. On considère l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ avec γ définie sur I par :

$$\forall t \in I \quad x(t) = \frac{P(t)}{R(t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{Q(t)}{R(t)}\cdot$$

dont on suppose que tout point est régulier. Étant donné a, b et c des réels tels que $(a,b) \neq 0$, montrer que la droite Δ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ est tangente à Γ au point de paramètre t_0 si, et seulement si, t_0 est racine au moins d'ordre deux du polynôme $D = a\,P + b\,Q + c\,R$.

Solution des exercices

7.1 Munissons $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\ \|$.

- Puisque f est dérivable en 0 et $f(0)=0$, il existe $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall t \in [0,1] \quad f(t) = t\, f'(0) + t\, \alpha(t) \quad \text{avec} \quad \alpha(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
- Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $\eta \in]0,1]$, que l'on fixe, tel que :
$$\forall t \in [0,\eta] \quad \|\alpha(t)\| \leqslant \varepsilon.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \eta$, ou encore $n \geqslant n_0 = \lfloor 1/\eta \rfloor + 1$, on a :
$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\Big) f'(0) \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \Big(f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}\, f'(0)\Big) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\, \alpha\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \left\| \alpha\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\, \varepsilon = \frac{n(n+1)}{2n^2}\, \varepsilon \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :
$$\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{n(n+1)}{2n^2}\, f'(0) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\Big) f'(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Étant donné que $\frac{n(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, on en déduit que :
$$\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) = \left(\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{n(n+1)}{2n^2}\, f'(0) \right) + \frac{n(n+1)}{2n^2}\, f'(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\, f'(0).$$

7.2 1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. En posant $x = t-h$ et $y = t+h$, la relation $\star$ donne :
$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{2\,h} = f'(t). \qquad (i)$$

En particulier, pour $h=1$, on en déduit :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = \frac{f(t+1) - f(t-1)}{2}\cdot \qquad (ii)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$.

- Initialisation : par hypothèse, la fonction f est dérivable ; elle est donc continue.
- Supposons f de classe $\mathcal{C}^n$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Par composition, les fonctions :
$$t \mapsto f(t+1) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto f(t-1)$$
sont également de classe $\mathcal{C}^n$, et la relation (ii) entraîne que f' est de classe $\mathcal{C}^n$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Cela prouve par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$ et t_0 un réel donné. La relation (i) donne :
$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad f(t_0+h) - f(t_0-h) = 2\,h\,f'(t_0).$$
En dérivant deux fois cette égalité de fonctions de h, on obtient d'abord :
$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad f'(t_0+h) + f'(t_0-h) = 2\,f'(t_0),$$
puis :
$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad f''(t_0+h) - f'(t_0-h) = 0.$$
Comme $t_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ sont quelconques, on en déduit :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq y \Longrightarrow f''(x) = f''(y)$$
ce qui entraîne que f'' est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2\,A.$$
Par suite, la fonction vectorielle $x \mapsto f'(x) - 2\,x\,A$, qui a une dérivée nulle, est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et il existe $B \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\,x\,A + B.$$
On en déduit de même qu'il existe $C \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2\,A + x\,B + C.$$
Réciproquement, si A, B et C sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction :
$$f : x \mapsto x^2\,A + x\,B + C$$
vérifie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$:
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = (x+y)\,A + B = f'\Big(\frac{x+y}{2}\Big),$$
et répond donc au problème.

7.3 1. Démontrons par récurrence pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'énoncé :

$\mathcal{H}_r$: *Si B est une forme r-linéaire sur $\mathbb{R}^n$, et si $f_1,\dots,f_r$ sont des éléments de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$, alors $B(f_1,\dots,f_r) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et :*
$$\big(B(f_1,\dots,f_r)\big)' = \sum_{k=1}^{r} B(f_1,\dots,f_{k-1},f_k',f_{k+1},\dots,f_r)$$

- On le connaît déjà pour $r=1$ (cas d'une application linéaire) et $r=2$ (cas d'une application bilinéaire).
- Supposons-le vrai à un rang r avec $r \geqslant 2$. Soit B une forme $(r+1)$-linéaire sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que $f_1,\dots,f_{r+1}$ des éléments de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$.
  * Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ les fonctions composantes de f_{r+1}. On a alors :
$$\begin{aligned} B(f_1,\dots,f_r,f_{r+1}) &= B\Big(f_1,\dots,f_r,\sum_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell\,e_\ell\Big) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell\,B\big(f_1,\dots,f_r,e_\ell\big). \qquad (*) \end{aligned}$$

* Pour chaque $\ell \in [\![1,n]\!]$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^{r-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_r) & \longmapsto & B(x_1,\dots,x_r,e_\ell) \end{array}$$

étant évidemment r-linéaire, l'hypothèse $\mathcal{H}_r$ nous dit que $B\big(f_1,\dots,f_r,e_\ell\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que :

$$\big(B(f_1,\dots,f_r,e_\ell)\big)' = \sum_{k=1}^{r} B(f_1,\dots,f_k',\dots,f_r,e_\ell)$$

* Étant donné que les applications φ_ℓ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composantes d'une application de classe $\mathcal{C}^1$, la relation $(*)$ et les théorèmes généraux entraînent que $B(f_1,\dots,f_r,f_{r+1})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\begin{aligned}\big(B(f_1,\dots,f_r,f_{r+1})\big)' &= \sum_{\ell=1}^{n} \big(\varphi_\ell\, B\big(f_1,\dots,f_r,e_\ell\big)\big)' \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\varphi_\ell'\, B\big(f_1,\dots,f_r,e_\ell\big) + \big(B(f_1,\dots,f_r,e_\ell)\big)'\,\varphi_\ell\Big).\end{aligned}$$

* On en déduit le résultat à l'ordre $r+1$ puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} \varphi_\ell'\, B\big(f_1,\dots,f_r,e_\ell\big) &= B\Big(f_1,\dots,f_r,\sum_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell'\, e_\ell\Big) \\ &= B\big(f_1,\dots,f_r,f_{r+1}'\big)\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} \big(B(f_1,\dots,f_r,e_\ell)\big)'\,\varphi_\ell &= \sum_{\ell=1}^{n}\Big(\varphi_\ell \sum_{k=1}^{r} B(f_1,\dots,f_k',\dots,f_r,e_\ell)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell\, B(f_1,\dots,f_k',\dots,f_r,e_\ell)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{r} B\big(f_1,\dots,f_k',\dots,f_r,f_{r+1}\big).\end{aligned}$$

2. Supposons $r=n$ et considérons $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire, on en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned}\big(\det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\dots f_n)\big)' = \det_{\mathcal{B}}(f_1',f_2,\dots f_n) + \det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2',\dots f_n) + \cdots \\ \cdots + \det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\dots f_n').\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Désignons par $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et notons :

$$f_n : x \mapsto \Big(x,\frac{x^2}{2},\dots,\frac{x^n}{n!}\Big).$$

Les composantes de f_n étant polynomiales, on a $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, et donc :

$$D_n = \det_{\mathcal{B}_n}\big(f_n,f_n',\dots,f_n^{(n-1)}\big).$$

D'après ce qui précède, la fonction D_n est dérivable et :

$$D'_n = \det_{\mathcal{B}_n}(f'_n, f'_n, \dots, f_n^{(n-1)}) + \det_{\mathcal{B}_n}(f_n, f''_n, f''_n, \dots, f_n^{(n-1)})$$
$$+ \dots + \det_{\mathcal{B}_n}(f_n, f''_n, \dots, f_n^{(n-1)}, f_n^{(n-1)}) + \det_{\mathcal{B}_n}(f_n, f'_n, \dots, f_n^{(n-2)}, f_n^{(n)}).$$

Par antisymétrie du déterminant, on en déduit :

$$D'_n = \det_{\mathcal{B}}\left(f_n, f'_n, \dots, f_n^{(n-2)}, f_n^{(n)}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & 1 \end{vmatrix}$$

En développant ce dernier par rapport à sa dernière colonne, on obtient :

$$D'_n = \det_{\mathcal{B}_{n-1}}\left(f_{n-1}, f'_{n-1}, \dots, f_{n-1}^{(n-2)}\right) = D_{n-1}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_n(0) = 0$, une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}\cdot$$

7.4 1. Soit f_0 l'application de I dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout θ réel, $f_0(\theta)$ soit l'affixe de $\gamma_0(\theta)$. Pour tout $\theta \in I$, on a alors $f_0(\theta) \neq 0$ et :

$$f_0(\theta) = e^{\theta \cos \alpha} \cos(\theta \sin \alpha) = e^{\theta\, e^{i\alpha}}.$$

Il est immédiat que f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f'_0(\theta) = e^{i\alpha} f_0(\theta).$$

On en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les vecteurs $f_0(\theta)$ et $f'_0(\theta)$ sont non nuls, et que α est une mesure de l'angle orienté entre les vecteurs $\gamma_0(t)$ et $\gamma'_0(t)$.

2. Soit f l'application de I dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le complexe $f(\theta)$ soit l'affixe de $\gamma(t)$.

- Puisque l'on parle de l'angle des vecteurs $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$, on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad f'(t) \neq 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons : $\psi(t) = \dfrac{f'(t)}{e^{i\alpha} f(t)}\cdot$

- Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le réel α est une mesure de l'angle de $\gamma(t)$ et de $\gamma'(t)$, la fonction ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est continue puisque γ, et donc f, sont de classe $\mathcal{C}^1$.

- Par suite, ψ possède sur $\mathbb{R}$ une unique primitive Ψ qui s'annule en 0. Comme $\psi = \Psi'$ est à valeurs strictement positives, Ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I. Sa fonction réciproque $\Phi : I \to \mathbb{R}$ est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
- Posons $f_1 = f \circ \Phi$. Pour tout $\theta \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} f_1'(\theta) &= \Phi'(\theta)\, f'\big(\Phi(\theta)\big) \\ &= \Phi'(\theta)\, \Psi'\big(\Phi(\theta)\big)\, e^{i\alpha}\, f\big(\Phi(\theta)\big) \\ &= e^{i\alpha}\, f\big(\Phi(\theta)\big) && \text{car } \Phi'(\theta)\, \Psi'\big(\Phi(\theta)\big) = 1 \\ &= e^{i\alpha}\, f_1(\theta). \end{aligned}$$

  Par suite, il existe $A \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall \theta \in I \quad f_1(\theta) = A \exp\big(\theta\, e^{i\alpha}\big).$$

  Comme $\Psi(0) = 0$, on a $0 \in I$ et $\Phi(0) = 0$. On en déduit $f_1(0) = 1$, et par suite, $A = 1$, ce qui entraîne :

$$\forall \theta \in I \quad f_1(\theta) = f_0(\theta) \quad \text{et donc} \quad (\gamma \circ \Phi)(\theta) = \gamma_0(\theta).$$

Comme Φ est bijective, les arcs $(\mathbb{R}, \gamma)$ et $(I, \gamma \circ \Phi)$ ont même support ; par suite le support de γ est inclus dans celui de γ_0.

7.5 Soit (I, γ) de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par l'origine. Comme γ ne s'annule pas, on peut définir :

$$\begin{array}{rccc} f : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|_2} \end{array}$$

où $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Cette fonction est dérivable car γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas. Comme $f(t)$ est unitaire pour tout t, on en déduit que $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$, et donc :

$$\forall t \in I \quad f'(t) \in \operatorname{Vect}(\gamma(t))^{\perp}. \tag{i}$$

  On a par ailleurs :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|_2} - \frac{(\,\gamma'(t) \mid \gamma(t)\,)}{\|\gamma(t)\|_2^3}\,\gamma(t) \tag{$*$}$$

- Supposons $\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ liée pour tout t. Étant donné que $\gamma(t) \neq 0$, on en déduit $\gamma'(t) \in \operatorname{Vect}(\gamma(t))$. L'expression $(*)$ ci-dessus montre alors que l'on a :

$$\forall t \in I \quad f'(t) \in \operatorname{Vect}(\gamma(t)). \tag{ii}$$

  Des relations (i) et (ii), on déduit :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = 0,$$

  ce qui entraîne que f est constante sur l'intervalle I. Par conséquent, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \varphi(t)\, \vec{u}.$$

  Le support de (I, γ) est donc une partie de droite.
- Réciproquement, il est clair que toute fonction de ce type est solution du problème.

7.6 1. L'arc Γ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ car les applications composantes sont polynomiales ; pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{p}\right)$. Il s'ensuit que tout point de paramètre t est régulier, et que la normale en ce point a pour équation :

$$0 = 1\,(x-t) + \frac{t}{p}\left(y - \frac{t^2}{2p}\right) = x + \frac{t}{p}\,y - \left(t + \frac{t^3}{2p^2}\right).$$

2. $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels il existe trois réels distincts t_1, t_2, t_3 tels que : $x + \frac{t}{p}\,y - \left(t + \frac{t^3}{2p^2}\right) = 0$.

Étudions les variations de la fonction polynomiale $Q : t \mapsto \frac{t^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right)t - x$ pour savoir quand elle admet trois racines réelles distinctes. On a déjà :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Q'(t) = \frac{3\,t^2}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right).$$

Cas $\frac{y}{p} \leqslant 1$ **:** la dérivée Q' est alors à valeurs positives et s'annule au plus une fois. Ainsi, Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, admet donc au plus un zéro.

Cas $\frac{y}{p} > 1$ **:** en posant $t_0 = \sqrt{\frac{2p^2}{3}\left(\frac{y}{p} - 1\right)}$, on a le tableau suivant :

t	$-\infty$		$-t_0$		t_0		$+\infty$
$Q'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Q	$-\infty$	$\nearrow$	$Q(-t_0)$	$\searrow$	$Q(t_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que Q admet trois racines réelles distinctes si, et seulement si, $Q(t_0)\,Q(-t_0) < 0$. Or :

$$\begin{aligned} Q(t_0)Q(-t_0) &= \left(\frac{t_0^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right)t_0 - x\right)\left(-\frac{t_0^3}{2p^2} + \left(\frac{y}{p} - 1\right)t_0 - x\right) \\ &= x^2 - \left(\frac{t_0^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right)t_0\right)^2 \\ &= x^2 - t_0^2\left(\frac{t_0^2}{2p^2} - \frac{y}{p} + 1\right)^2. \end{aligned}$$

En remplaçant t_0^2 par $\frac{2p^2}{3}\left(\frac{y}{p} - 1\right)$, un calcul immédiat donne alors :

$$Q(t_0)Q(-t_0) = x^2 - \frac{8}{27p}(y-p)^3 = x^2 - \frac{8\,p^2}{27}\left(\frac{y}{p} - 1\right)^3,$$

et la condition cherchée est donc :

$$x^2 - \frac{8\,p^2}{27}\left(\frac{y}{p} - 1\right)^3 < 0.$$

Remarquer que cette dernière relation contient la condition $\frac{y}{p} > 1$.

En conclusion, on a :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 27px^2 < 8(y-p)^3\right\}.$$

7.7 Les fonctions x et y proposées étant définies sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles, elles définissent un arc $(\mathbb{R}, \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \left(\sin t\,,\ \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\right).$$

- Puisque γ est 2π-périodique, on peut en restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$. La fonction x étant impaire et la fonction y étant paire, on peut limiter l'étude à $[0, \pi]$, puis compléter le support avec une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$x'(t) = \cos t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{\sin t \cos t\big(\cos t - 4\big)}{(2 - \cos t)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

- Pour $t \in [0, \pi]$, tous les points de cet arc sont sont réguliers, excepté celui de paramètre $\frac{\pi}{2}$. Pour préciser la forme de l'arc au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, étudions :

$$m(t) = \frac{y(t) - y(\frac{\pi}{2})}{x(t) - x(\frac{\pi}{2})} = \frac{y(t)}{x(t) - 1} = \frac{\cos^2 t}{(2 - \cos t)(\sin t - 1)},$$

qui est bien défini puisque d'après le tableau :

$$\forall [0, \pi] \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2}\right\} \quad x(t) \neq 1.$$

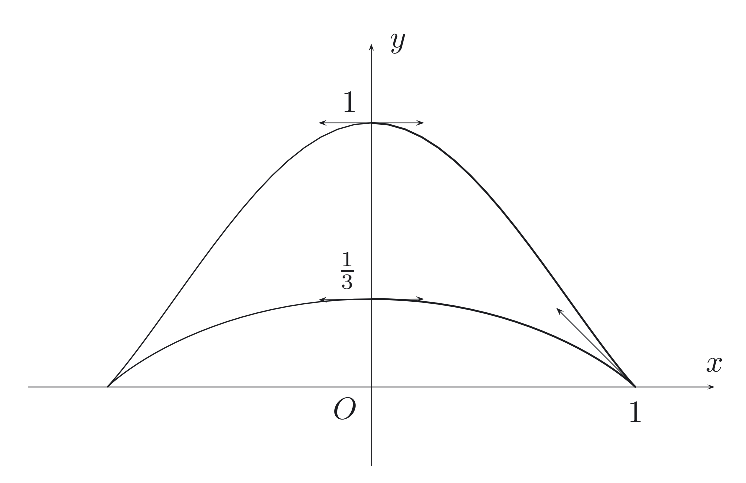
On a alors :

$$\begin{aligned}
m\left(\frac{\pi}{2} + h\right) &= \frac{\sin^2 h}{(2 + \sin h)(\cos h - 1)} \\
&= \frac{h^2 + \mathrm{o}(h^3)}{(2 + h + \mathrm{o}(h))\left(-\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^3)\right)} \\
&= -\frac{1 + \mathrm{o}(h)}{(2 + h + \mathrm{o}(h))\left(\frac{1}{2} + \mathrm{o}(h)\right)} \\
&= -\frac{1 + \mathrm{o}(h)}{1 + \frac{h}{2} + \mathrm{o}(h)} \\
&= -1 + \frac{h}{2} + \mathrm{o}(h)
\end{aligned}$$

On en déduit

* d'une part, $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} m(t) = -1$; l'arc a donc en ce point une tangente pente -1 ;
* d'autre part, que pour t voisin de $\frac{\pi}{2}$, la pente de la droite $(M_t M_{\frac{\pi}{2}})$ est du signe de $h = t - \frac{\pi}{2}$, et change donc de signe ; c'est donc un point de rebroussement.

On en déduit le dessin du support de l'arc.



Pour des raisons évidentes, cet arc est connu sous le nom de **courbe du bicorne**.

7.8 1. Les fonctions x et y proposées étant polynomiales et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles définissent un arc $(\mathbb{R}, \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(3\,t^2, 2\,t^3\big).$$

* Puisque x et y sont respectivement paire et impaire, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$, le support de l'arc étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$x'(t) = 6\,t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 6\,t^2$$

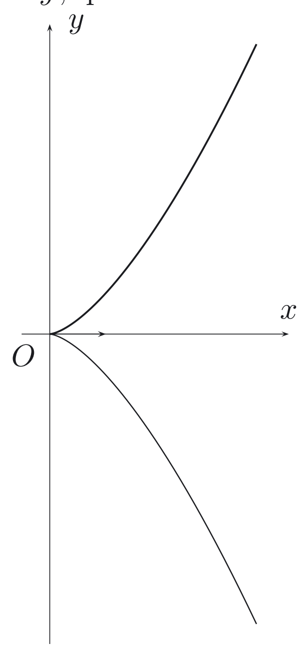
ce qui donne immédiatement le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$y'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

* Tous les points sauf celui de paramètre 0 sont réguliers. Comme :

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

on en déduit que l'arc est tangent à Ox en l'origine. La forme du support est donnée par les signes de x et y, qui sont tous deux positifs pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.



2. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, le vecteur $\gamma'(t)$ est non nul et proportionnel à $(1,t)$. La tangente D_t au point de paramètre t admet donc comme équation :

$$0 = \begin{vmatrix} x - 3\,t^2 & 1 \\ y - 2\,t^3 & t \end{vmatrix} = t\,x - y - t^3.$$

Cette tangente recoupe donc l'arc en un point de paramètre t' de coordonnées $(3\,t'^2, 2\,t'^3)$ si, et seulement si, ce réel t' vérifie :

$$0 = t\,(3\,t'^2) - (2\,t'^3) - t^3 = 3\,t\,t'^2 - 2\,t'^3 - t^3 = (t'-t)^2\,(2\,t'+t).$$

Par suite, il est immédiat que D_t recoupe l'arc au point de paramètre $t' = -\frac{t}{2}$, qui est différent de t puisque $t \neq 0$.

3. Aucune droite ne peut être tangente et normale au même point du support de Γ. Comme la tangente au point de paramètre 0 n'est pas normale à Γ, les droites cherchées sont donc :
   - des tangentes en un point de paramètre $t \in \mathbb{R}^*$, des vecteur directeur $(1,t)$,
   - qui sont normales à Γ au point de paramètre $t' = -\frac{t}{2}$ où elles le recoupent, et donc orthogonales au vecteur $(1,t')$.

   On en déduit la condition :

$$0 = 1 + t\,t' = 1 - \frac{t^2}{2} \quad \text{et donc} \quad t = \pm\sqrt{2}.$$

7.9 1. Le cercle $\mathcal{C}$ est le support de l'arc paramétré défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c(t) = (R\,\cos t, R\,\sin t),$$

dont la tangente D_t au point de paramètre t est dirigée par le vecteur :

$$c'(t) = (-R\,\sin t, R\,\cos t) \quad \text{qui est orthogonal à } c(t).$$

Si M_t est le projeté orthogonal de A sur D_t, alors il existe un réel λ tel que :

$$M_t = c(t) + \lambda\, c'(t).$$

Comme $\overrightarrow{AM_t}$ est orthogonal à $c'(t)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= (\, M_t - A \mid c'(t)\,) \\ &= \big(\, c(t) + \lambda\, c'(t) - A \,\big|\, c'(t)\,\big) \\ &= \lambda\, R^2 - \big(\, A \,\big|\, c'(t)\,\big) \\ &= \ R^2(\lambda + \sin t). \end{aligned}$$

Le point M_t est donc :

$$\begin{aligned} M_t &= c(t) - (\sin t)\, c'(t) \\ &= \big(\, R\, \cos t + R\, \sin^2 t\,,\ R\, \sin t - R\, \sin t \cos t\,\big) \\ &= \left(\frac{R}{2} + R\, \cos t - \frac{R}{2}\, \cos 2t\,,\ R\, \sin t - \frac{R}{2}\, \sin 2t\right), \end{aligned}$$

ce qui donne une représentation paramétrique de l'arc cherché.

2. Il suffit de tracer le support correspondant à $R = 1$, les autres s'en déduisant par homothéties. Étudions donc l'arc défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos t - \frac{1}{2}\, \cos 2t \quad \text{et} \quad y(t) = \sin t - \frac{1}{2}\, \sin 2t.$$

- Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après les théorèmes généraux.
- Comme elles sont 2π-périodiques, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
  Les fonctions x et y étant respectivement paire et impaire, le support de l'arc est symétrique par rapport à Ox, et l'on peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :

$$x'(t) = \sin 2t - \sin t = 2\, \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

et :

$$y'(t) = \cos t - \cos 2t = 2\, \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, \sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cdot$$

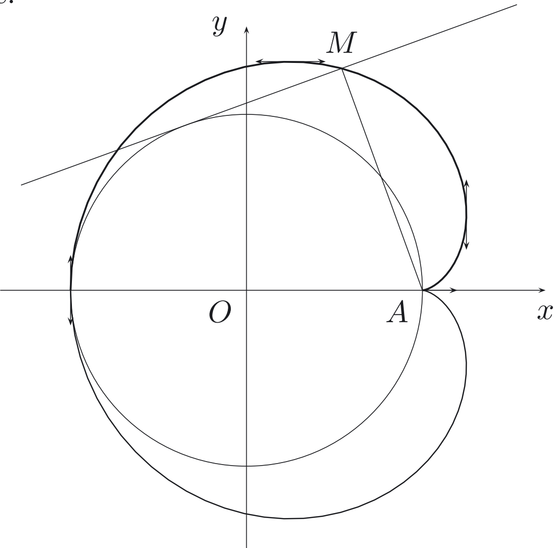
On en déduit facilement le tableau de variations.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0		$-$		0
$y'(t)$	0		$+$		0	$-$	
x	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	$\frac{1}{4}$	↘	-1
y	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

- Dans l'intervalle $[0, \pi]$, seul le point de paramètre 0 est stationnaire. Comme :

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{2\sin(t)-\sin 2t}{2\cos t-\cos 2t-1} = \frac{o(t^2)}{t^2+o(t^2)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

l'arc est tangent à l'axe Ox au point de paramètre 0. On en déduit le tracé du support de l'arc.



Cet arc est appelé **cardioïde**.

7.10 1. L'hypothèse $\|\overrightarrow{MA}\|_2 = 1$ impose évidemment que l'arc est inclus dans la bande :

$$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < v < 1\}.$$

Si l'arc est paramétré par $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$, alors la fonction y ne peut s'annuler puisqu'alors on aurait $A = M$, ce qui est incompatible avec $\|M_t A_t\|_2 = 1$. Comme y est continue sur l'intervalle I, elle garde un signe constant, et donc :

$$\Gamma \subset B_1 \quad \text{ou} \quad \Gamma \subset B_2.$$

2. Soit $\gamma : \theta \mapsto \big(x(\theta), y(\theta)\big)$ un paramétrage de l'arc cherché, avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Étant donné que θ est une mesure de l'angle $\big(\vec{\imath}, \overrightarrow{A_\theta M_\theta}\big)$, et que $\|\overrightarrow{M_\theta A_\theta}\|_2 = 1$, on a :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad y(\theta) = \sin\theta.$$

L'arc étant régulier, la tangente au point M_θ est dirigée par $\gamma'(\theta) = \big(x'(\theta), y'(\theta)\big)$. Comme la tangente est $(A_\theta M_\theta)$, les vecteurs $\gamma'(\theta)$ et $\overrightarrow{M_\theta A_\theta}$ sont colinéaires, et :

$$0 = \begin{vmatrix} x'(\theta) & \cos\theta \\ y'(\theta) & \sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'(\theta) & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = x'(\theta)\,\sin\theta - \cos^2\theta.$$

On en déduit :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad x'(\theta) = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta.$$

Par suite, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad x(\theta) = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \cos\theta + k.$$

Changer la valeur de k revient à faire subir une translation au support. Nous supposerons donc $k = 0$. Comme x et y ont des limites finie en $\frac{\pi}{2}$ traçons l'arc défini par :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x(\theta) = \cos\theta + \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad y(\theta) = \sin\theta.$$

Étant donné que :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x'(\theta) = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad y'(\theta) = \cos\theta,$$

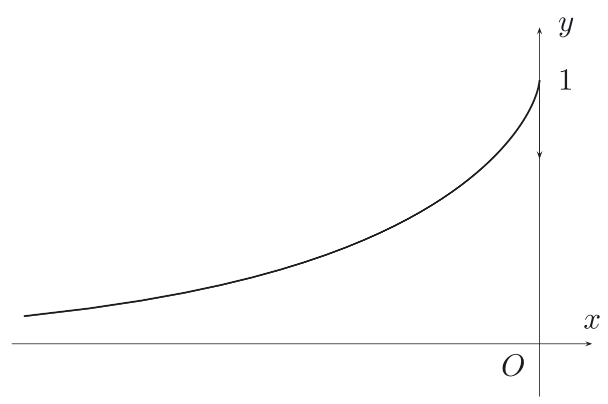
on obtient le tableau de variations suivant.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(\theta)$		$+$	0
$y'(\theta)$		$+$	0
x	$-\infty$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	1

Seul le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ est stationnaire. Comme :

$$x''(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \cos\theta \quad \text{et} \quad y''(\theta) = -\sin\theta,$$

on a $\gamma''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$ et, au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$, l'arc est tangent à Oy, ce qui correspond bien à la définition initiale de la courbe puisque le point $M_{\frac{\pi}{2}}$ est à la distance 1 de l'axe Ox. La position de l'arc par rapport à la tangente est donnée par le tableau de variations. On en déduit le tracé du support de l'arc.



Cette courbe est appelée **tractrice**.

7.11 Les fonctions x et y données sont définies sur la réunion des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Il s'agit donc d'étudier et de tracer la réunion des deux arcs :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1: &]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(t+\frac{1}{2t^2}, \frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(t+\frac{1}{2t^2}, \frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

1. • Les relations $x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$ montrent que le support est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y$, et qu'il suffit d'étudier les arcs définis sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$.

   • Ces arcs sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

   $$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^3} = \frac{t^3-1}{t^3} \quad \text{et} \quad y'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3-1}{t^2},$$

   ce qui conduit au tableau de variations suivant :

t	-1		0		1
$x'(t)$		$+$	‖	$-$	0
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	0
x	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$

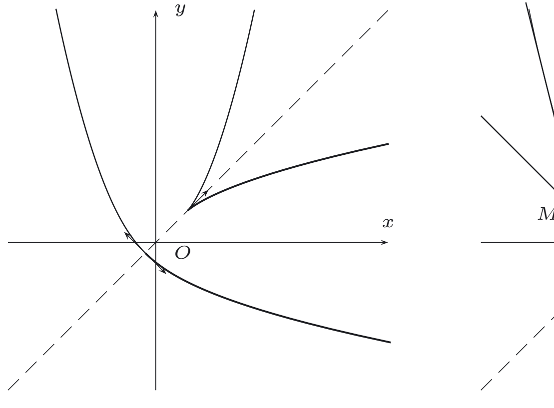
   • Le point de paramètre $t = 1$ est stationnaire. Pour $t \in]0,1[$, étudions :

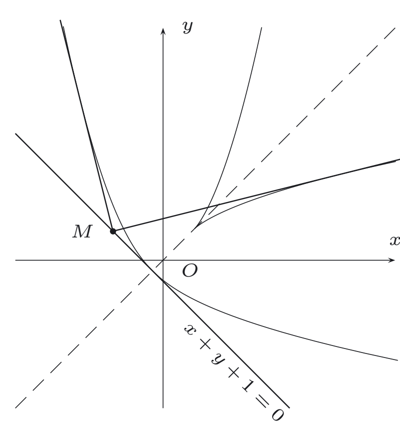
   $$m(t) = \frac{y(t)-y(1)}{x(t)-x(1)} = \frac{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}-\frac{3}{2}}{t+\frac{1}{2t^2}-\frac{3}{2}} = \frac{t\,(t^3+2-3\,t}{2\,t^3+1-3\,t^2} = \frac{t\,(t-1)^2\,(t+2)}{(t-1)^2\,(2\,t+1)}.$$

   On en déduit :

   $$m(t) = \frac{t\,(t+2)}{2\,t+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1,$$

   ce qui prouve que l'arc admet en ce point une tangente de pente 1, qui est donc la première bissectrice. La symétrie précédemment trouvée prouve qu'il s'agit d'un point de rebroussement pour la courbe totale.





2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, même pour $t = 1$, la tangente au point M_t est dirigée par le vecteur $(1, t)$; elle a donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - t - \frac{1}{2t^2} & 1 \\ y - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{t} & t \end{vmatrix} = 0$$

soit $-2\,t^2\,x + 2\,t\,y + t^3 - 1 = 0$, qui est une droite de pente t.

Par un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné, il passe donc autant de tangentes à la courbe donnée que l'équation (en t) :

$$t^3 - 2\,t^2\,x + 2\,t\,y - 1 = 0 \qquad (*)$$

possède de racines réelles non nulles. Il y passe donc deux tangentes orthogonales si, et seulement si, l'équation $(*)$ possède deux racines t_1 et t_2 telles que $t_1\,t_2 = -1$.

- Supposons $(x, y) \in \Delta$. Alors $(*)$ possède deux racines t_1 et t_2 telles que $t_1\,t_2 = -1$, et comme le produit des racines de cette équation est 1, la troisième racine est -1. En remplaçant t par -1 dans $(*)$, on en déduit :

$$x + y + 1 = 0.$$

- Réciproquement, supposons $x + y + 1 = 0$. Alors on a :

$$t^3 - 2\,t^2\,x + 2\,t\,y - 1 = t^3 + 2\,(y+1)\,t^2\,x + 2\,t\,y - 1$$
$$= (t-1)\left(t^2 + (2\,y+1)\,t - 1\right),$$

et l'équation du second degré $t^2 + (2\,y+1)\,t - 1 = 0$ a alors deux racines non nulles de produit vaut -1, ce qui entraîne $(x, y) \in \Delta$.

7.12 Cette courbe (*cf.* exercice 37 de la page 339), est une astroïde. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, le point M_t est régulier et la tangente est donc dirigée par le premier vecteur dérivé :

$$(-3\,a\,\cos^2 t\,\sin t\,,\,3\,a\,\sin^2 t\,\cos t) = 3\,a\,\sin t\,\cos t\,(-\cos t, \sin t).$$

Elle a donc pour équation :

$$0 = \begin{vmatrix} x - a\,\cos^3 t & -\cos t \\ y - a\,\sin^3 t & \sin t \end{vmatrix} = x\,\sin t + y\,\cos t - a\,\sin t\,\cos t.$$

- Comme $\sin t \neq 0$ elle coupe Ox au point $P_t = (a\,\cos t, 0)$;
- comme $\cos t \neq 0$, elle coupe Oy au point $Q_t = (0, a\,\sin t)$.

Il est alors évident que $P_tQ_t = a$, ce qui prouve le résultat.

7.13 Soit $\gamma : t \mapsto \big(2r\,\cos t + r\,\cos 2t\,,\,2r\,\sin t + r\,\sin 2t\big)$.

1. L'arc Γ_0 de l'exercice 7.9 de la page 369 est paramétré par :

$$\gamma_0 : t \mapsto \left(\frac{R}{2} + R\,\cos t - \frac{R}{2}\,\cos 2t\,,\,R\,\sin t - \frac{R}{2}\sin 2t\right)$$

En le translatant de $\left(0, -\frac{R}{2}\right)$, on obtient l'arc γ_1 :

$$\gamma_1 : t \mapsto \left(R\,\cos t - \frac{R}{2}\,\cos 2t\,,\,R\,\sin t - \frac{R}{2}\,\sin 2t\right)$$

Si l'on fait subir à Γ_1 une homothétie de centre O et de rapport $-\frac{2r}{R}$, on obtient :

$$\gamma_2 : t \mapsto \big(-2r\,\cos t + r\,\cos 2t\,,\,-2r\,\sin t + r\,\sin 2t\big)$$

dont le support est égal celui de Γ puisque $\gamma_2(t + \pi) = \gamma(t)$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$x'(t) = -2\,r\,(\sin t + \sin 2t) = -4\,r\,\sin\left(\frac{3\,t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$y'(t) = \quad 2\,r\,(\cos t + \cos 2t) = \quad 4\,r\cos\left(\frac{3\,t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot$$
   - Lorsque $\cos\frac{t}{2} \neq 0$, le point n'est pas stationnaire, et la tangente est dirigée par le vecteur $\left(-\sin\frac{3\,t}{2}, \cos\,\frac{3\,t}{2}\right)\cdot$
   - Il en est de même lors que $\cos\frac{t}{2} = 0$ puisque l'on a vu (*cf.* exercice 7.9) que la tangente est alors parallèle à l'axe Ox.

   Par suite l'équation de la tangente au point de paramètre t est :
$$\begin{vmatrix} x - 2\,r\,\cos t - r\,\cos 2t & -\sin(\frac{3\,t}{2}) \\ y - 2\,r\,\sin t - r\,\sin 2t & \cos(\frac{3\,t}{2}) \end{vmatrix} = 0$$
   et donc :
$$x\,\cos\left(\frac{3\,t}{2}\right) + y\,\sin\left(\frac{3\,t}{2}\right) - 3\,r\,\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0. \qquad (i)$$
   En remplaçant t par $t+\pi$, on obtient l'équation de la tangente au point de paramètre $t+\pi$:
$$x\,\sin\left(\frac{3\,t}{2}\right) - y\cos\left(\frac{3\,t}{2}\right) + 3\,r\,\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0. \qquad (ii)$$
   En résolvant le système formé par (i) et (ii), on obtient les coordonnées du point d'intersection :
$$x = 3\,r\,\cos 2t \quad \text{et} \quad y = 3\,r\,\sin 2t.$$
   Comme t décrit $\mathbb{R}$, ce point décrit le cercle de centre O et de rayon $3r$.

7.14 1. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique du plan euclidien. La relation de Chasles nous donne :
$$\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{\omega M}}\right) = \left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{\omega I}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\omega I}, \overrightarrow{\omega M}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \theta,$$
   et les composantes de $\overrightarrow{\omega M}$ sont donc :
$$\left(R\,\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right), R\,\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = (-R\,\sin\theta, -R\,\cos\theta).$$
   En projetant le relation :
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{I\omega} + \overrightarrow{\omega M}.$$
   on en déduit les coordonnées de M :
$$x = R\,\theta - R\,\sin\theta \quad \text{et} \quad y = R - R\,\cos\theta.$$
   Cette courbe est une cycloïde (voir exercice 36 de la page 339 pour le tracé).

2. D'après l'étude faite lors du tracé de cette courbe, en tout point M_θ de paramètre $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, la tangente est dirigée par le vecteur :
$$\gamma'(\theta) = (1 - \cos\theta\,,\,\sin\theta).$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour composantes :

$$\big(-R\sin\theta\,,\ R\,(1-\cos\theta)\big),$$

on a $(\gamma'(\theta)\mid\overrightarrow{IM})=0$, et $\overrightarrow{IM}$ est donc orthogonal à la tangente. Par suite I est sur la normale en M à la courbe .

Le résultat est immédiat dans le autres cas puisqu'alors M et I sont confondus.

7.15 Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la base canonique du plan euclidien.

1. Soit θ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}})$ et φ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega I}})$. L'égalité des arcs IM et AI se traduit par $r\varphi=R\theta$, ce qui entraîne $\varphi=n\,\theta$. La relation de Chasles donne alors :

$$(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{\omega M}})=(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OI}})+(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{\omega M}})=(1-n)\,\theta.$$

En projetant la relation $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\omega}+\overrightarrow{\omega M}$, on obtient pour les coordonnées de M :

$$\gamma(\theta):\begin{cases}x(\theta)=(n-1)\,r\cos\theta+r\cos\big((n-1)\theta\big)\\ y(\theta)=(n-1)\,r\sin\theta-r\sin\big((n-1)\theta\big)\end{cases}$$

2. Pour $n=2$, on a :

$$x(\theta)=2\,r\,\cos\theta\quad\text{et}\quad y(\theta)=0.$$

L'ensemble des points M est alors le segment $[-1,1]$ de l'axe Ox.

3. Si $z(\theta)$ est l'affixe complexe du point M, alors on a :

$$z(\theta)=(n-1)\,r\,e^{i\theta}+r\,e^{-(n-1)i\theta},$$

et donc :

$$z\Big(\theta+\frac{2\pi}{n}\Big)=(n-1)\,r\,e^{i\,(\theta+\frac{2\pi}{n})}+r\,e^{-(n-1)i(\theta+\frac{2\pi}{n})}$$

Comme :

$$e^{-(n-1)i(\theta+\frac{2\pi}{n})}=e^{-(n-1)i\theta}\,e^{\frac{-2\,(n-1)i\pi}{n}}=e^{-(n-1)i\theta}\,e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

on en déduit immédiatement :

$$z\Big(\theta+\frac{2\pi}{n}\Big)=e^{\frac{2i\pi}{n}}\,z(\theta),$$

ce qui prouve que l'on passe du point de paramètre θ au point de paramètre $\theta+\frac{2\pi}{n}$ par une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

4. En dérivant la fonction $z:\theta\mapsto z(\theta)$, on obtient l'affixe du premier vecteur dérivé :

$$\begin{aligned}z'(\theta)&=(n-1)\,i\,r\big(e^{i\theta}-e^{-(n-1)i\theta}\big)\\&=(n-1)\,i\,r\,e^{\frac{2-n}{2}\,i\theta}\left(2\,i\,\sin\Big(\frac{n\theta}{2}\Big)\right)\\&=-2\,(n-1)\,r\,\sin\Big(\frac{n\theta}{2}\Big)\,e^{-i\,\frac{(n-2)\theta}{2}}.\end{aligned}$$

- Supposons ce premier vecteur dérivé non nul, c'est-à-dire $n\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$.
  - ∗ La tangente est alors dirigée par un vecteur d'affixe $e^{-i\,\frac{(n-2)\theta}{2}}$.

* L'affixe du vecteur $\overrightarrow{IM}$ étant :

$$\begin{aligned} z(\theta) - n\,r\,e^{i\theta} &= r\Big(e^{-(n-1)i\theta} - e^{i\theta}\Big) \\ &= -r\,e^{\frac{2-n}{2}\,i\theta}\,\left(2\,i\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \\ &= -2\,r\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\Big(i\;\, e^{-\frac{n-2}{2}\,i\theta}\Big), \end{aligned}$$

il est immédiat que ce vecteur est orthogonal à la tangente : on en déduit directement que I est sur la normale en M à la courbe.

- Lorsque $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors les points M et I sont confondus sur le cercle $\mathcal{C}$ et le résultat est évident.

5. D'après les calculs précédents, on a :

$$\forall \theta \in \mathrm{IR} \quad \|\gamma'(\theta)\|_2 = |z'(\theta)| = 2\,(n-1)\,r\,\left|\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right|\cdot$$

Pour $n \geqslant 3$, le support de tout l'arc est la réunion de n supports deux à deux disjoints (à l'exception des points limites) déduits par rotations du support de :

$$\begin{array}{rcl} [0, \frac{2\pi}{n}] & \longrightarrow & \mathrm{IR}^2 \\ \theta & \longmapsto & z(\theta). \end{array}$$

La longueur cherchée est :

$$\begin{aligned} \ell &= n\int_0^{\frac{2\pi}{n}} |z'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \\ &= n\int_0^{\frac{2\pi}{n}} 2\,(n-1)\,r\,\left|\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\,(n-1)\,r\int_0^{\frac{2\pi}{n}} n\,\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -4\,(n-1)\,r\left[\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{n}} \\ &= 8\,(n-1)\,r. \end{aligned}$$

7.16 Soit t_0 un élément de I.

- Comme aucun point de Γ n'est stationnaire, la tangente au point de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur $\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$. Par suite, la droite Δ est tangente à Γ au point de paramètre t_0, si, et seulement si,
  * elle passe par ce point, ce qui équivaut à :

$$a\,x(t_0) + b\,y(t_0) + c = 0, \qquad (i)$$

  * elle a même direction que la tangente, ce qui équivaut à :

$$a\,x'(t_0) + b\,y'(t_0) = 0. \qquad (ii)$$

- Le réel t_0 est est racine au moins d'ordre deux de D si, et seulement si :
$$0 = D(t_0) = a\,P(t_0) + b\,Q(t_0) + c\,R(t_0) \qquad (j)$$
et :
$$0 = D'(t_0) = a\,P'(t_0) + b\,Q'(t_0) + c\,R'(t_0). \qquad (jj)$$
- Étant donné que $D = (a\,x + b\,y + c)\,R$ on a :
$$D' = \big(a\,x' + b\,y'\big)\,R + \big(a\,x + b\,y + c\big)\,R'.$$
Ainsi (jj) est équivalent à :
$$0 = \big(a\,x'(t_0) + b\,y'(t_0)\big)\,R(t_0) + \big(a\,x(t_0) + b\,y(t_0) + c\big)\,R'(t_0). \qquad (jj')$$
- Supposons Δ tangente à Γ au point M_{t_0}. Alors on a (i) et (ii). On en déduit :
$$D(t_0) = a\,P(t_0) + b\,Q(t_0) + c\,R(t_0) = \big(a\,x(t_0) + b\,y(t_0) + c\big)\,R(t_0) = 0,$$
ainsi que :
$$D'(t_0) = \big(a\,x'(t_0) + b\,y'(t_0)\big)\,R(t_0) + \big(a\,x(t_0) + b\,y(t_0) + c\big)\,R'(t_0) = 0,$$
ce qui entraîne que t_0 est est racine au moins d'ordre deux de D.
- Supposons t_0 racine au moins d'ordre deux de D. Alors on a (j) et (jj').
  * De (j), on en déduit immédiatement (i) puisque :
  $$a\,x(t_0) + b\,y(t_0) + c = \frac{1}{R(t_0)}\,D(t_0).$$
  * la relation (jj') s'écrit alors :
  $$\big(a\,x'(t_0) + b\,y'(t_0)\big)\,R(t_0) = 0,$$
  ce qui entraîne (ii) puisque $R(t_0) \neq 0$.

  Par suite, Δ est tangente à Γ en M_{t_0}.

On en déduit l'équivalence demandée.

Chapitre 8 : Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un intervalle quelconque

8

Dans ce chapitre, on définit la notion de fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intégrale d'une telle fonction sur un segment.
On cherche ensuite à étendre la notion d'intégrale au cas de certaines fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés dans ce chapitre seront tous d'intérieur non vide.

I Fonctions continues par morceaux

La notion de subdivision a été vue en première année. Voici quelques rappels.

Définition 1

Une **subdivision** du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ strictement croissante telle que $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Le **support** de la subdivision, noté $\operatorname{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des valeurs prises par la suite, à savoir $\operatorname{supp}(\sigma) = \{a_i\,;\ i \in [\![0, n]\!]\}$.

Définition 2

Soit $[a, b]$ un segment, σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est **plus fine** que σ si $\operatorname{supp}(\sigma) \subset \operatorname{supp}(\sigma')$.

Proposition 1

Soit σ et σ' deux subdivisions d'un segment $[a, b]$. Il existe alors une subdivision σ'' de $[a, b]$ qui soit plus fine que σ et plus fine que σ'.

1 Fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 3

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de ce segment telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ possède un prolongement continu sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.

Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

Notation On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarques

- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction f continue par morceaux sur un segment est encore adaptée à f.

  En conséquence, si f et g sont continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée à ces deux fonctions à la fois.
- Si f est une fonction continue par morceaux définie sur $[a, b]$ et si $[c, d]$ est un segment inclus dans $[a, b]$, alors $f_{|[c,d]}$ est encore continue par morceaux.

Point méthode

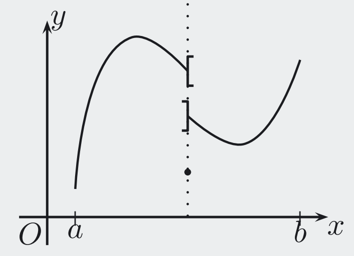
Pour établir qu'une fonction f est continue par morceaux sur un segment, on détermine une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de ce segment telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- la fonction $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ soit continue,
- la fonction $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ admette des limites finies en a_i et a_{i+1}.

Exemples

1. Toute fonction continue sur un segment est continue par morceaux.
2. Toute fonction en escalier sur un segment est continue par morceaux.
3. La restriction à un segment de la fonction partie entière est continue par morceaux, car en escalier.

p.422 **Exercice 1** La fonction dont voici le graphe est-elle continue par morceaux sur le segment $[a, b]$?



p.422 **Exercice 2** La fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+\lfloor 1-x\rfloor}$ est-elle continue par morceaux ?

p.422 **Exercice 3** La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=0$ est-elle continue par morceaux ?

Proposition 2

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Démonstration page 422

Proposition 3

L'ensemble $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, stable par produit.

Principe de démonstration. Démonstration page 422

On utilise la propriété déjà signalée : si deux fonctions sont continues par morceaux sur un segment, il existe une subdivision adaptée à la fois à ces deux fonctions.

L'exercice suivant montre que la composée de deux fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux.

p.422 **Exercice 4** Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin \frac{1}{x}. \end{array}$

1. Montrer que φ a un prolongement continu sur $[0,1]$, qu'on note encore φ.

   Que vaut $\varphi(0)$? Montrer que $\varphi\big([0,1]\big)\subset[-1,1]$.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor. \end{array}$

   Montrer que f est continue par morceaux.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

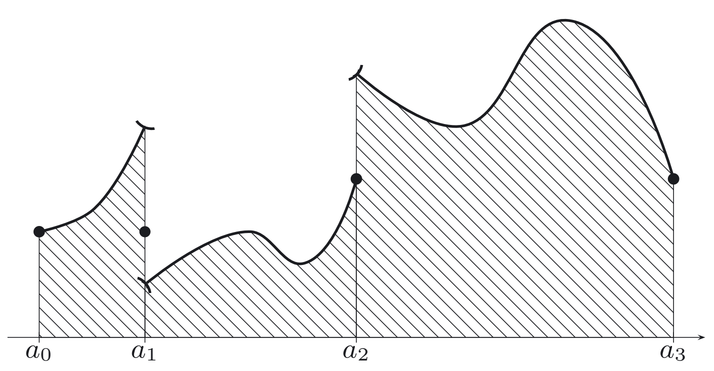
$$u_n=f\circ\varphi\left(\frac{1}{n\pi}\right)\quad\text{et}\quad v_n=f\circ\varphi\left(\frac{2}{(4n-1)\,\pi}\right).$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

   La fonction $f\circ\varphi$ est-elle continue par morceaux ?

2 Intégrale sur un segment

En première année, on a défini l'intégrale sur un segment des fonctions en escalier, puis celle des fonctions continues. Nous allons étendre cette notion d'intégrale sur un segment au cas des fonctions continues par morceaux.



Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f.

Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\widetilde{f_i}$ le prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$ de $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$. Alors la somme :

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} \widetilde{f_i}$$

ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f.

Cette somme est appelée **intégrale** de f. On la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Principe de démonstration. À l'aide de la relation de Chasles, on prouve l'égalité des deux sommes formées à partir de deux subdivisions adaptées à f, dont l'une est plus fine que l'autre.

Démonstration page 423

3 Propriétés de l'intégrale

La plupart des propriétés de l'intégrale des fonctions continues s'étendent aux fonctions continues par morceaux.

Théorème 5 (Linéarité de l'intégrale)

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une application linéaire de $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 424

On utilise l'existence d'une subdivision adaptée à la fois à deux fonctions continues par morceaux données, puis la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions continues.

Proposition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Alors la fonction $|f|$ est continue par morceaux et l'on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Principe de démonstration. On utilise la proposition 4 de la page précédente et le fait que cette inégalité est valable pour les fonctions continues. Démonstration page 424

Proposition 7 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

- Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. (positivité de l'intégrale)
- Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$. (croissance de l'intégrale)

Principe de démonstration. On utilise la proposition 4 de la page précédente et, pour le deuxième point, la linéarité de l'intégrale. Démonstration page 424

Remarque Pour le premier point, si $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ est une subdivision adaptée à f, il suffit qu'on ait $f \geqslant 0$ sur chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$; en effet, les prolongements continus $\widetilde{f}_i$ sont alors positifs.

Attention Comme le montre l'exercice suivant, il existe des fonctions positives non nulles d'intégrale nulle.

p.425 **Exercice 5** Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a,b]$.

Montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ si, et seulement si, f est nulle, sauf peut-être en ses points de discontinuité.

Remarque Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $c \in]a,b[$. Il est évident que les deux fonctions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont continues par morceaux. Pour éviter des notations trop lourdes, on écrira $\displaystyle\int_{[a,c]} f$ plutôt que $\displaystyle\int_{[a,c]} f_{|[a,c]}$.

Proposition 8 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $c \in]a,b[$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4 de la page précédente, en choisissant une subdivision adaptée à f contenant le point c. □

Voici une extension du théorème du changement de variable de première année. La principale difficulté provient du fait qu'en général, la composée d'une fonction continue par morceaux et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas continue par morceaux (on peut montrer que la fonction φ de l'exercice 4 de la page 392 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$).

Proposition 9

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Alors $f \circ \varphi$ est continue par morceaux et l'on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration (non exigible) page 425

Remarque On prouverait de même, lorsque φ est décroissante, la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

4 Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 4

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Notation On note $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. Toute fonction continue est bien sûr continue par morceaux.
2. On a vu page 391 que la fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment ; elle est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$ a pour points de discontinuités les $1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et elle est constante sur $]1,2]$ et sur les $\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

   Cette fonction est donc en escalier sur tout segment inclus dans $]0,2]$ et, par suite, elle est continue par morceaux sur $]0,2]$.

Remarque À la lumière des deux exemples précédents, notons qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle qui n'est pas un segment peut

comporter une infinité de discontinuités, même si cet intervalle est borné ; elle peut également ne pas être bornée, contrairement aux fonctions continues par morceaux sur un segment.

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, stable par produit.

Démonstration. Le résultat a été établi, lorsque I est un segment (voir la proposition 3 de la page 392). La conclusion résulte alors de la définition 4 de la page précédente. □

II Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Dans cette section, on fixe $a \in \mathbb{R}$.

1 Généralités

Définition 5

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Attention Contrairement aux séries numériques, on utilise la même notation dans l'expression « l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (ou diverge) » que pour désigner la valeur de l'intégrale, lorsque celle-ci converge. On prendra donc soin de ne pas faire de calculs ou de transformations sur $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, tant que la convergence n'aura pas été établie.

Point méthode

Prenons le cas où f est continue et notons F une primitive de f.

Puisque $\displaystyle\int_a^x f = [F]_a^x = F(x) - F(a)$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ équivaut à l'existence dans $\mathbb{K}$ de $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ et, dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{+\infty} F - F(a).$$

Exemples

1. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t \,\mathrm{d}t$ diverge.

   La fonction $\cos$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'une de ses primitives est la fonction $\sin$, qui ne possède pas de limite en $+\infty$; d'où la conclusion.

2. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

   La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'une de ses primitives est $F = -f$.

   Comme $\lim\limits_{+\infty} F$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(0) = 1.$$

p.426 **Exercice 6** Déterminer la nature (convergente ou divergente) et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot$

p.426 **Exercice 7** Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}\cdot$

Remarque Comme le montre l'exercice précédent, le fait qu'une fonction f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ vérifie $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ n'entraîne pas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

p.426 **Exercice 8**

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{-t}\right) e^{-t}\mathrm{d}t$.

On cherchera une primitive de $t \mapsto \cos\left(e^{-t}\right) e^{-t}$.

On peut noter un parallèle entre l'étude des intégrales généralisées sur un intervalle $[a,+\infty[$ et celle des séries numériques. Dans ce parallèle, l'analogue du terme général est la fonction f, dont on cherche à définir l'intégrale sur $[a,+\infty[$, et l'analogue de la suite des sommes partielles est la fonction définie sur $[a,+\infty[$ par $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$.

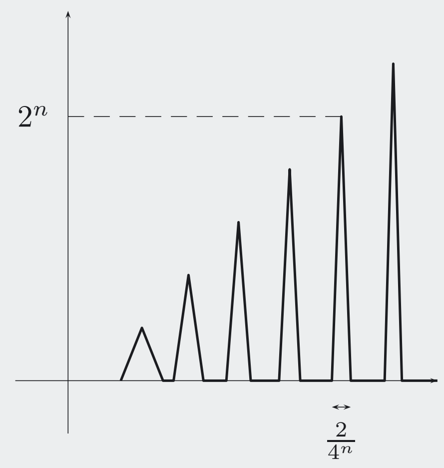
p.426 **Exercice 9** Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,+\infty[, \mathbb{R}\big)$ une fonction possédant une limite finie non nulle en $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Attention Nous verrons dans l'exercice suivant que, contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, ni même que f est bornée au voisinage de $+\infty$.

p.426

Exercice 10 On définit la fonction f continue et affine par morceaux sur $[0, +\infty[$ de la façon suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur les intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ et $[n, n + \frac{1}{4^n}]$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$f\left(n - \frac{1}{4^n}\right) = f\left(n + \frac{1}{4^n}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(n) = 2^n,$$
- en dehors des intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n + \frac{1}{4^n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est nulle.



Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Proposition 11

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in [a, +\infty[$. Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :
$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 427

On utilise la relation de Chasles et la définition de la convergence d'une intégrale.

Remarque De cette proposition on déduit une idée-clé qui apparaîtra à plusieurs reprises dans ce chapitre : si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement local de f au voisinage de $+\infty$.

p.427

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,+\infty[,\mathbb{K}\big)$ telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, de dérivée égale à $-f$.

Proposition 12

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}\big([a,+\infty[,\mathbb{K}\big)$ telles que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}\left([a,+\infty[,\mathbb{K}\right)$.

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}\left([a,+\infty[,\mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^{+\infty} f \end{array}$ est linéaire.

Démonstration. Cet ensemble contient la fonction nulle et, d'après les propriétés des limites, est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}\left([a,+\infty[,\mathbb{K}\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. D'après le théorème 5 de la page 393, on a :

$$\forall x \geqslant a \qquad \int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g.$$

Pour conclure, il suffit de faire tendre x vers $+\infty$. □

Proposition 13

Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,+\infty[,\mathbb{C}\big)$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent, et l'on a alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f) + i \int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes, on a :

$$\forall x \geqslant a \qquad \int_a^x f = \int_a^x \mathrm{Re}(f) + i \int_a^x \mathrm{Im}(f)$$

La conclusion résulte alors immédiatement de la définition 5 de la page 396 et des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes. □

p.427

Exercice 12 Justifier la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t$.

Proposition 14

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Alors $\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\int_a^{+\infty} f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 427

On utilise le fait que $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ et les propriétés de l'intégrale sur un segment.

Proposition 15

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.

1. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a,+\infty[$.
2. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f = +\infty.$$

Principe de démonstration. On utilise la croissance de la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ sur $[a,+\infty[$.

Démonstration page 428

Remarque Les conclusions subsistent si f n'est positive qu'au voisinage de $+\infty$, à cause du caractère local de la nature d'une intégrale.

p.428

Exercice 13 On considère deux fonctions f et g à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ et positives. On suppose que :

$$\forall t \geqslant a \quad f(t) \leqslant g(t).$$

Montrer que :

- si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge ;
- si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

Ce résultat sera généralisé par le théorème de comparaison de la page 403.

2 Intégrales de référence

Comme pour les séries numériques, nous disposerons d'un certain nombre d'exemples de référence qui permettront, par le théorème de comparaison, de déterminer la nature de beaucoup d'intégrales. Il est donc essentiel de connaître parfaitement ces exemples de référence.

Proposition 16

Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Démonstration. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour $\alpha \leqslant 0$ et $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t} \mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x$, par croissance de l'intégrale.

  On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} \mathrm{d}t = +\infty$.

- Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} \cdot$

  Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \cdot$

D'où la conclusion. □

p.428 **Exercice 14** Quelle est la nature, selon $\alpha \in \mathbb{C}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \mathrm{d}t$?

Proposition 17 (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Pour $\alpha \neq 1$ et $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \cdot$$

Par suite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha < 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ pour $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = +\infty$. D'où la conclusion. □

3 Intégrabilité

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ **converge absolument** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Théorème 18

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument, alors elle converge.

Principe de démonstration. On étudie d'abord le cas des fonctions f à valeurs réelles, en utilisant les fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$, puis le cas des fonctions à valeurs complexes, en utilisant les parties réelles et imaginaires. Démonstration page 429

Remarque Ce théorème n'a pas de réciproque : une intégrale peut converger sans être absolument convergente, comme nous le verrons dans l'exercice 36 de la page 421.

Définition 7

On dit que $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument.

Notation Dans ce cas, on note parfois cette intégrale $\int_{[a,+\infty[} f$.

En utilisant la positivité des fonctions et les intégrales de référence, on obtient la proposition suivante.

Proposition 19

1. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Théorème 20 (de comparaison)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité sur $[a,+\infty[$ de g implique celle de f.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrabilité sur $[a,+\infty[$ de g implique celle de f.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrabilité sur $[a,+\infty[$ de g équivaut à celle de f.

Principe de démonstration. On utilise le résultat établi dans l'exercice 13 de la page 400 et la proposition 11 de la page 398.

Démonstration page 430

Point méthode

Pour établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, avec $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$, on peut utiliser le théorème de comparaison de la présente page pour montrer l'intégrabilité de f, puisque cette intégrabilité implique la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exemple Déterminons la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(\ln t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et l'on a :

$$|f| \leqslant |g| \quad \text{avec} \quad \forall t \geqslant 1 \quad g(t) = \frac{1}{t^2}.$$

La fonction g est intégrable sur $[1,+\infty[$, d'après de la proposition 19 de la page précédente. On déduit alors du théorème de comparaison de la présente page que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

p.430 **Exercice 15** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}\,\mathrm{d}t$?

p.430 **Exercice 16** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t)\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$?

p.431 **Exercice 17** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Attention Par contraposition, le théorème de comparaison peut permettre d'établir la non intégrabilité d'une fonction $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$, mais on ne peut pas, en général, en déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Voici un cas particulier très important où le théorème de comparaison de la page précédente permet d'établir la divergence d'une intégrale.

Proposition 21

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction de signe constant au voisinage de $+\infty$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Démonstration. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer l'existence de $b \geqslant a$ tel que f soit positive sur $[b,+\infty[$.

D'après la proposition 11 de la page 398, d'une part, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature et, d'autre part, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} |f|$ sont également de même nature.

Comme $f = |f|$ sur $[b,+\infty[$, on déduit de ce qui précède que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $[b,+\infty[$; d'où la conclusion. □

Rappel Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ deux fonctions telles que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$.
Si g est positive (respectivement négative), alors f est positive (respectivement négative) au voisinage de $+\infty$.

Point méthode

Pour déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, avec $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$, on peut déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. Si cet équivalent g est de signe constant, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, g est intégrable.

En effet, f est alors de signe constant au voisinage de $+\infty$. On déduit de la proposition 21 que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[a,+\infty[$, donc si, et seulement si, g est intégrable sur $[a,+\infty[$.

p.431 **Exercice 18** Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$, avec :

$$\forall t \geqslant 1 \quad f(t) = 2\ln\big(t^{3/2}+1\big) - 3\ln(t+1) \ ?$$

Dans les trois exercices suivants, on détermine la nature des **intégrales de Bertrand** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$, selon $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Il est bon de retenir la méthode d'étude de ces intégrales de Bertrand.

p.431 **Exercice 19** Établir la convergence pour $\alpha > 1$, en utilisant une fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\gamma}}$, avec $\gamma > 1$ bien choisi.

p.431 **Exercice 20** Établir la divergence pour $\alpha < 1$, en utilisant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$.

p.432 **Exercice 21** Faire l'étude pour $\alpha = 1$.

Pour $x > 2$, on effectuera le changement de variable $t = e^u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_2^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^{\beta}}$.

En conclusion l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ converge si, et seulement si :

$$\alpha > 1 \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1)\,.$$

III Généralisation aux autres types d'intervalles

Nous étudions maintenant la notion d'intégrale sur les intervalles suivants :

- $]-\infty, a]$, avec $a \in \mathbb{R}$;
- $[a,b[$ ou $]a,b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$;
- un intervalle ouvert.

1 Cas d'un intervalle $]-\infty, a]$

Les définitions et les résultats obtenus dans le cas d'un intervalle $[a,+\infty[$ s'étendent sans difficulté. Pour la plupart, nous nous contenterons de les énoncer.

Définition 8

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **converge** si $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{a} f$ existe dans $\mathbb{K}$.

Dans ce cas on note $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **diverge**.

On a de même le résultat important qui suit.

Proposition 22

Soit $f :]-\infty, a] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in]-\infty, a]$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{a} f = \int_{-\infty}^{b} f + \int_{b}^{a} f.$$

On a de même les résultats suivants.

Proposition 23

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f \end{array}$ est linéaire.

Proposition 24

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{C})$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \mathrm{Im}(f)$ convergent, et l'on a alors :

$$\int_{-\infty}^{a} f = \int_{-\infty}^{a} \mathrm{Re}(f) + i \int_{-\infty}^{a} \mathrm{Im}(f).$$

Proposition 25

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ converge. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Proposition 26

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{R})$ une fonction positive.

1. L'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_{x}^{a} f$ est majorée sur $]-\infty, a]$.
2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f$ diverge si, et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x}^{a} f = +\infty$.

Il faut adapter l'étude des intégrales de référence de la façon suivante.

Proposition 27

Soit α un réel. L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Proposition 28 (Intégrale de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^{\alpha}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

La notion d'intégrabilité et les résultats la concernant sont les mêmes.

Définition 9

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f$ **converge absolument** si l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} |f|$ converge.

Théorème 29

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f$ converge absolument, alors elle converge.

Définition 10

On dit que $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ est **intégrable** sur $]-\infty, a]$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f$ converge absolument.

Notation Dans ce cas, on note parfois cette intégrale $\int_{]-\infty, a]} f$.

Exemples (Reformulation des propositions 27 et 28)

1. La fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est intégrable sur $]-\infty, 0]$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{|t|^{\alpha}}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

On a utilisé la positivité des fonctions et les intégrales de référence.

Théorème 30 (de comparaison)

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité sur $]-\infty, a]$ de g implique celle de f.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $-\infty$, alors l'intégrabilité sur $]-\infty, a]$ de g implique celle de f.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de $-\infty$, alors l'intégrabilité sur $]-\infty, a]$ de g équivaut à celle de f.

Proposition 31

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{R})$ une fonction de signe constant au voisinage de $-\infty$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ converge si, et seulement si, la fonction f est intégrable sur $]-\infty, a]$.

Point méthode

Pour déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$, avec $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{R})$, on peut déterminer un équivalent de f au voisinage de $-\infty$. Si cet équivalent g est de signe constant, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ converge si, et seulement si, g est intégrable sur $]-\infty, a]$.

2 Cas d'un intervalle borné $]a, b]$ ou $[a, b[$

On s'intéresse ici à des intervalles $]a, b]$ ou $[a, b[$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Nous citerons la plupart des résultats dans le cas d'un intervalle $]a, b]$; il est facile de les adapter au cas d'un intervalle $[a, b[$.

Définition 11

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{K})$, avec $-\infty < a < b < +\infty$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f$ **converge** si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f$ existe dans $\mathbb{K}$.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_{a}^{b} f$ ou $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f$ **diverge**.

On a encore le résultat important qui suit.

Proposition 32

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $c \in]a,b]$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^c f$ sont de même nature.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

On a de même les résultats suivants.

Proposition 33

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_a^b f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}\left(]a,b],\mathbb{K}\right)$.

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}\left(]a,b],\mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}$ est linéaire.

Proposition 34

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{C})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\,(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)$ convergent, et l'on a alors :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f).$$

Proposition 35

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Proposition 36

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{R})$ une fonction positive.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ est majorée sur $]a,b]$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f = +\infty$.

Voici une intégrale de référence (intégrale de Riemann) sur $]0,1]$. Nous étendrons ce résultat à tout intervalle borné $]a,b]$ ou $[a,b[$, après avoir établi le théorème du changement de variable (propositions 56 de la page 419 et 57 de la page 419).

p.432 **Exercice 22** Donner, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\cdot$

Voici une deuxième intégrale de référence sur $]0,1]$.

Proposition 37

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration. La fonction $\ln$ est continue sur $]0,1]$ et l'on a :

$$\forall x \in]0,1] \qquad \int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1.$$

Comme, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, on en déduit le résultat annoncé. □

La notion d'intégrabilité et les résultats la concernant sont les mêmes.

Définition 12

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge absolument** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 38

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument, alors elle converge.

Définition 13

On dit que $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $]a,b]$ si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument.

Notation Dans ce cas, on note parfois cette intégrale $\displaystyle\int_{]a,b]} f$.

Exemples

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$.

On a utilisé le signe constant des fonctions et les intégrales de référence.

p.432 **Exercice 23** Le produit de deux fonctions intégrables sur $]0,1]$ est-il nécessairement intégrable sur $]0,1]$?

Théorème 39 (de comparaison)

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité sur $]a,b]$ de g implique celle de f.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de a, alors l'intégrabilité sur $]a,b]$ de g implique celle de f.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de a, alors l'intégrabilité sur $]a,b]$ de g équivaut à celle de f.

p.432 **Exercice 24** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 \cos t \,\mathrm{d}t$?

Remarque La proposition 37 de la page ci-contre a été obtenue par un calcul de primitive, mais elle aurait pu être établie par comparaison, en établissant, par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, que $|\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, quand $t \to 0^+$.

Voici un résultat spécifique aux intervalles bornés.

Proposition 40

Soit a et b deux réels, avec $a < b$ et $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.
Si f est bornée sur $]a,b]$, alors f est intégrable sur $]a,b]$.

Démonstration. Si $M = \sup\limits_{]a,b]} |f|$, on a $|f| \leqslant M$ et, comme les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles **bornés**, f est intégrable sur $]a,b]$, d'après le théorème de comparaison de la présente page. □

Remarques

1. C'est le cas, en particulier, si f admet un prolongement continu par morceaux sur le segment $[a,b]$, puisque, si l'on note encore f ce prolongement continu par morceaux, la fonction f, continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, est bornée sur $[a,b]$, donc sur $]a,b]$. Remarquons qu'alors :

$$\int_{]a,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

En effet, si $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$, la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\forall x \in\,]a,b] \quad \left|\int_{[x,b]} f - \int_{[a,b]} f\right| = \left|\int_{[a,x]} f\right| \leqslant \int_{[a,x]} |f| \leqslant M\,(x-a).$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to a} \int_{[x,b]} f = \int_{[a,b]} f$, c'est-à-dire l'égalité annoncée.

2. Cette dernière situation se produit le plus souvent, lorsque f est continue et possède un prolongement continu sur le segment $[a, b]$.

3. Le fait que l'intervalle d'intégration $]a, b]$ soit **borné** est évidemment essentiel. Ce type d'intégrales « trivialement convergentes » n'existe pas lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas borné, comme le montre l'exemple d'une fonction constante non nulle sur $[a, +\infty[$.

p.433

Exercice 25 Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$?

Proposition 41

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{R})$ une fonction de signe constant au voisinage de a. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $]a, b]$.

Point méthode

Pour déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$, avec $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{R})$, on peut déterminer un équivalent de f au voisinage de a. Si cet équivalent g est de signe constant, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, g est intégrable sur $]a, b]$.

3 Cas d'un intervalle ouvert

On s'intéresse ici à des intervalles $]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition 42

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$. S'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent, alors, pour tout réel $c' \in]a, b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et $\displaystyle\int_{c'}^b f$ convergent et $\displaystyle\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

On dit dans ce cas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** et l'on pose :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans le cas où un tel c n'existe pas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Démonstration page 433

Proposition 43

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$. On fixe $c \in]a,b[$ et l'on pose :

$$\forall x \in]a,b[\quad F(x) = \int_c^x f.$$

L'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet des limites dans $\mathbb{K}$ en a et b, et l'on a alors $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$.

Démonstration page 433

p.433

Exercice 26 Donner la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Point méthode

Pour déterminer la nature de $\int_a^b f$, on commence par examiner sur quel intervalle d'extrémités a et b la fonction f est continue par morceaux.

Selon les cas, on fait ensuite une ou deux études (en général des études locales permettant d'utiliser les méthodes vues précédemment).

Si, par exemple, a est réel et que f est continue par morceaux sur $[a,b[$, une étude au voisinage de a est inutile.

p.433

Exercice 27 Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$?

p.434

Exercice 28 Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} e^{it} \ln(t)\, e^{-2t} \mathrm{d}t$?

IV Propriétés de l'intégrale

Les propositions suivantes étendent à des intervalles I quelconques des propriétés connues sur un segment.
Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Convention Par extension, lorsque I est un segment et que f est continue par morceaux sur I, on dit encore que l'intégrale $\int_I f$ converge.

Comme $|f|$ est également continue par morceaux, on dit aussi que l'intégrale converge absolument ou que f est intégrable sur I.

Comme nous l'avons déjà signalé, lorsque I, d'extrémités $a < b$, n'est pas un segment, on utilise parfois la notation $\int_I f$ au lieu de $\int_a^b f$.

1 Linéarité, positivité

La proposition 12 de la page 399 et la proposition 14 de la page 400 s'étendent facilement au cas d'un intervalle quelconque.

Proposition 44

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telles que $\int_I f$ existe est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

De plus, l'application $f \mapsto \int_I f$ est linéaire sur ce sous-espace vectoriel.

Proposition 45

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration page 434

Proposition 46

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\int_I f$ converge.

On a alors $\int_I f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\int_I f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration. On utilise les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment et la définition de l'intégrale sur un intervalle quelconque.

Démonstration page 434

Conséquence (Croissance de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ d'intégrales convergentes sur I.

Si $f \leqslant g$, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

En effet, il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction positive $g - f$.

Proposition 47

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable sur I. On a :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f| .$$

Principe de démonstration. Le résultat est connu lorsque I est un segment. Lorsque I n'est pas un segment, on utilise ce premier cas et la définition de l'intégrale d'une fonction intégrable.

Démonstration page 434

2 Relation de Chasles

Proposition 48

Soit J un sous-intervalle d'intérieur non vide de I et f continue par morceaux sur I telle que $\int_I f$ converge. Alors $\int_J f$ converge.

Démonstration.

- Le résultat est évident si J est un segment.
- Si J est ouvert, par définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert, on se ramène aux deux cas $J = [a,b[$ et $J =]a,b]$.
- Traitons par exemple le cas où J est de la forme $[a,b[$.
  * Si $b \in I$, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, donc bornée sur $[a,b]$ et, *a fortiori*, sur $[a,b[$. La proposition 40 de la page 411 permet alors de conclure.
  * Sinon, b est la borne supérieure de I et la convergence de $\int_I f$ entraîne celle de $\int_{[a,b[} f$.

□

Notation Soit $a < b$ les deux bornes (éventuellement infinies) de I et une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge. Soit x et y vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$ et $a \leqslant y \leqslant b$. Si $x \neq y$, l'intégrale de f sur tout intervalle d'extrémités x et y inclus dans I converge, en particulier sur $]x,y[$ si $x < y$ et $]y,x[$ si $x > y$.
On peut donc poser :

$$\int_x^y f = \begin{cases} \int_{]x,y[} f & \text{si } x < y \\ -\int_{]y,x[} f & \text{si } x > y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Proposition 49 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge et x, y, z trois points ou extrémités de I. Alors les intégrales $\int_x^y f$, $\int_x^z f$, $\int_z^y f$ convergent et l'on a la relation de Chasles : $\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$.

Démonstration page 435

3 Fonction de carré intégrable

Définition 14

Une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est dite de **carré intégrable** si la fonction f^2 est intégrable sur I.

p.435

Exercice 29 Donner un exemple d'une fonction continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ non intégrable, mais de carré intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 50

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Démonstration. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et de carré intégrable. De l'inégalité :

$$|fg| \leqslant \frac{|f^2| + |g^2|}{2},$$

on déduit, par comparaison, que fg est intégrable sur I. □

p.435

Exercice 30 Montrer que toute fonction de carré intégrable sur un intervalle I borné est intégrable sur cet intervalle.

Proposition 51

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration. Notons E cet ensemble. E est une partie de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ contenant la fonction nulle et stable par multiplication par un scalaire.

Montrons qu'il est stable par l'addition. Soit $(f, g) \in E^2$; comme fg est intégrable, d'après la proposition 50, la fonction $(f+g)^2$ est intégrable, comme somme de trois fonctions intégrables, puisque $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$. □

Proposition 52

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles, continues et de carré intégrable sur I. Si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est l'application définie par :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \varphi(f, g) = \int_I fg,$$

alors φ est un produit scalaire sur E.

Démonstration. La définition de φ est justifiée par la proposition 50 de la page ci-contre.

- L'application φ est symétrique et, par linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions intégrables, elle est bilinéaire.
- Soit $f \in E$. La fonction f^2 étant continue et intégrable, on peut lui appliquer la proposition 46 de la page 414. On a donc $\int_I f^2 \geqslant 0$, avec $\int_I f^2 = 0$ si, et seulement si, $f^2 = 0$, c'est-à-dire $f = 0$.

Cela prouve que φ est un produit scalaire sur E. □

Puisque φ est un produit scalaire, le résultat suivant a été établi en première année.

Corollaire 53

Soit f et g deux fonctions réelles, continues et de carré intégrable sur I.

On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \left(\int_I f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si, et seulement si, la famille (f,g) est liée.

La proposition suivante montre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie dans un cadre plus large.

Proposition 54 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{C})$ de carré intégrable sur I. On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \left(\int_I \left|f^2\right|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \left|g^2\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

Principe de démonstration. On utilise $\left|\int_I fg\right| \leqslant \int_I |fg|$, puis une méthode analogue à la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz faite en première année.

Démonstration page 435

Attention Ici les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les modules figurant dans le second membre de l'inégalité sont donc indispensables.

V Calcul d'intégrales

1 Intégration par parties

Notation Soit F une fonction continue sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Lorsque $\lim\limits_{b} F$ et $\lim\limits_{a} F$ existent toutes les deux dans $\mathbb{K}$, on note :

$$[F]_a^b = \lim_b F - \lim_a F \quad \text{ou} \quad [F(x)]_a^b = \lim_b F - \lim_a F.$$

En cas d'ambiguïté, on pourra aussi adopter la notation $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.
Bien sûr, lorsque, par exemple, $a \in I$ et que $\lim\limits_{b} F$ existe dans $\mathbb{K}$, on a :

$$[F]_a^b = \lim_b F - F(a).$$

Théorème 55 (Intégration par parties)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'existence de deux termes parmi $\displaystyle\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ entraîne l'existence du troisième et l'on a alors la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Principe de démonstration. Si, par exemple, $I = [a,b[$, pour $x \in]a,b[$ on intègre par parties sur $[a,x]$ et l'on fait tendre x vers b. Démonstration page 436

Point méthode

L'intégration par parties a deux buts possibles :

- étudier la nature d'une intégrale, comme on le verra dans l'exercice 36 de la page 421,
- effectuer un calcul, comme dans l'exercice suivant.

p.436 **Exercice 31** À l'aide d'une intégration par parties, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

2 Changement de variable

Théorème 56 (Changement de variable)

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

Alors $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur $]\alpha,\beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Principe de démonstration.

Les hypothèses sur φ donnent $\lim\limits_{\alpha} \varphi = a$ et $\lim\limits_{\beta} \varphi = b$, ainsi que $\lim\limits_{a} \varphi^{-1} = \alpha$ et $\lim\limits_{b} \varphi^{-1} = \beta$.

La proposition 9 de la page 395 s'applique sur tout segment $[x,y] \subset]a,b[$. On fait tendre ensuite x vers a et y vers b. Démonstration page 437

Remarque Dans le cas d'un intervalle $[a,b[$, on pourra se ramener à la situation du théorème 56, puisque si $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge, il en de même de $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ et les deux intégrales sont égales.

p.438 **Exercice 32** Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Le théorème suivant est une simple adaptation du précédent au cas d'un changement de variable décroissant.

Théorème 57 (Changement de variable)

Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration page 438

Remarque Comme φ' est de signe constant, en appliquant le théorème de changement de variable à $|f|$, on obtient que l'intégrabilité de f sur $]a,b[$ équivaut à celle de $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ sur $]\alpha,\beta[$.

Le résultat suivant termine l'étude des intégrales de référence (intégrales de Riemann sur un intervalle borné quelconque).

Proposition 58

Soit deux réels $a < b$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Principe de démonstration. On utilise le résultat de l'exercice 22 de la page 410 et le théorème 56 de la page précédente (ou le théorème 57 de la page précédente).

Démonstration page 438

p.439 **Exercice 33** Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et la calculer à l'aide du changement de variable $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}\cdot$

3 Étude d'intégrales non absolument convergentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Il se peut qu'une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ ne soit pas intégrable sur I, mais que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge. On dit alors que cette dernière intégrale est **semi-convergente**.
L'étude de la convergence d'une intégrale non absolument convergente ne peut pas se faire à l'aide des théorèmes de comparaison, puisque ces derniers ne peuvent fournir que la convergence absolue. De plus, les théorèmes de convergence que nous verrons dans le chapitre 12 de la page 674 ne concernent que les fonctions intégrables.
Il va donc falloir transformer l'intégrale pour pouvoir étudier sa convergence. Un changement de variable ne sert à rien en général, puisque, d'après la remarque de la page précédente, on ne pourra pas obtenir une intégrale absolument convergente en partant d'une intégrale semi-convergente.
L'outil principal est donc l'*intégration par parties* en vue, en général, de transformer l'intégrale en une intégrale absolument convergente.
Dans les trois exercices suivants, on étudie l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, où α est un réel. Pour certaines valeurs de α, cette intégrale est semi-convergente.
Notons que la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

p.439 **Exercice 34** On suppose $\alpha \leqslant 0$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \geqslant 2$.

En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

p.439 **Exercice 35** On suppose $\alpha > 1$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge absolument.

p.440 **Exercice 36** On suppose $0 < \alpha \leqslant 1$.

1. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t$ diverge. En déduire la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

p.440 **Exercice 37** Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$.

Attention À la lumière de l'exercice précédent, il faut bien noter qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse d'intégrabilité par une hypothèse de convergence d'intégrale dans le théorème de comparaison de la page 403.
En effet, si $f(t) = \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ et $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, on a $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors que :

- l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge,
- l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$ converge.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Cette fonction a un seul point de discontinuité sur le segment $[a,b]$ et, en ce point, elle possède une limite finie à droite et à gauche. Elle est donc continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Exercice 2 On a, pour tout $x \in [-1,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \,; \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]-1,0] \,; \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

La fonction n'est pas continue par morceaux, car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 En considérant les suites $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de deux suites convergeant vers 0 par valeurs supérieures et dont les images par f ont des limites distinctes, respectivement 0 et 1. Par conséquent, f n'a pas de limite à droite en 0. La fonction f n'est donc pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Proposition 2 Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction $f_i = f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ admet un prolongement par continuité $\widetilde{f_i}$ sur le segment $[a_i,a_{i+1}]$. La fonction $\widetilde{f_i}$, continue sur un segment, est bornée ; il existe donc M_i tel que pour tout $x \in]a_i,a_{i+1}[$ on ait $\big|f(x)\big| \leqslant M_i$.

Il est alors clair que pour tout $x \in [a,b]$ on a :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \max\Big\{M_0,\dots,M_{n-1},\big|f(a_0)\big|,\dots,\big|f(a_n)\big|\Big\}.$$

Proposition 3 L'ensemble $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ est une partie de $\mathcal{F}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ contenant la fonction nulle.

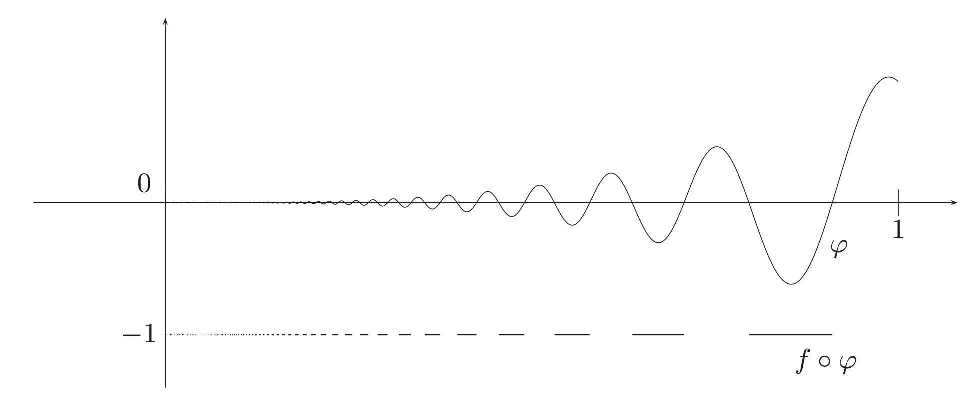
Soit f et g deux éléments de $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f et g, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Puisque, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, les restrictions $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et $g_{|]a_i,a_{i+1}[}$ ont des prolongements continus sur $[a_i,a_{i+1}]$, il en est de même des fonctions $(\lambda\, f + \mu\, g)_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et $(f\,g)_{|]a_i,a_{i+1}[}$. Par suite les fonctions $\lambda\, f + \mu\, g$ et $f\,g$ sont éléments de $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. L'ensemble $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ est donc stable par combinaisons linéaires et par produit, d'où la conclusion.

Exercice 4

1. • La fonction φ est continue sur $]0,1]$ et l'on a : $\forall x \in]0,1] \quad \big|\varphi(x)\big| \leqslant x^3$.
   Par suite, $\lim\limits_{0} \varphi = 0$, ce qui prouve que φ a un prolongement continu sur $[0,1]$.
   Si l'on note encore φ ce prolongement, on a donc $\varphi(0) = 0$.
   • On a $\varphi\big([0,1]\big) \subset [-1,1]$, puisque : $\forall x \in [0,1] \quad \big|\varphi(x)\big| \leqslant x^3 \leqslant 1$.
2. La fonction f est continue par morceaux, puisqu'elle est en escalier.

3. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sin(n\pi) = 0 \quad \text{donc} \quad u_n = f \circ \varphi\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0,$$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin\big((4n-1)\,\frac{\pi}{2}\big) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et donc :
$$\varphi\left(\frac{2}{(4n-1)\,\pi}\right) = -\frac{8}{(4n-1)^3\,\pi^3} \in \left]-1,0\right[.$$
Par suite :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = -1 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = -1.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{(4n-1)\pi} = 0$, on déduit de ce qui précède que la fonction $f \circ \varphi_{|]0,1]}$ ne possède pas de limite en 0, donc $f \circ \varphi$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.



Proposition 4

- Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et $\tau = (b_0, \ldots, b_m)$ une subdivision plus fine que σ (donc adaptée à f). Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note j_i l'unique entier tel que $b_{j_i} = a_i$. Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $j \in [\![j_i, j_{i+1}-1]\!]$, le prolongement continu de $f_{|]b_j,b_{j+1}[}$ à $[b_j, b_{j+1}]$ est égal à $\widetilde{f}_{i|[b_j,b_{j+1}]}$; on en déduit :
$$\begin{aligned} S_\tau(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1} \int_{[b_j,b_{j+1}]} \widetilde{f}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i,a_{i+1}]} \widetilde{f}_i \\ &= S_\sigma(f). \end{aligned}$$
On a utilisé la relation de Chasles pour des intégrales de fonctions continues sur un segment.
- Si σ et τ sont deux subdivisions adaptées à f, il suffit d'utiliser une subdivision plus fine que les deux, donc aussi adaptée à f. On est ainsi ramené au premier cas.

Théorème 5 On utilise les notations de la proposition 4 de la page 393.

Soit $(f,g) \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathrm{IK}\big)^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathrm{IK}^2$ et $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision adaptée à la fois à f et à g, donc aussi à $\lambda f + \mu g$. Par linéarité de la limite, pour chaque $i \in [\![0,n-1]\!]$, le prolongement continu sur $[a_i,a_{i+1}]$ de $(\lambda f+\mu g)_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est égal à $\lambda\widetilde{f_i}+\mu\widetilde{g_i}$. En utilisant la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions continues sur un segment, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\lambda f+\mu g) &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} (\widetilde{\lambda f+\mu g})_i\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} \Big(\lambda\widetilde{f_i}+\mu\widetilde{g_i}\Big)\\ &= \lambda\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} \widetilde{f_i} + \mu\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} \widetilde{g_i}\\ &= \lambda\int_{[a,b]} f + \mu\int_{[a,b]} g,\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Proposition 6

- Soit $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision adaptée à f. Alors, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction de $|f|$ à $]a_i,a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i,a_{i+1}]$, égal à $\left|\widetilde{f_i}\right|$, avec les notations de la proposition 4 de la page 393. Cela prouve que $|f|$ est continue par morceaux et admet σ comme subdivision adaptée.
- En utilisant la proposition 4 de la page 393, l'inégalité établie en première année pour les fonctions continues, ainsi que l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} \widetilde{f_i}\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{[a_i,a_{i+1}]} \widetilde{f_i}\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{[a_i,a_{i+1}]} \left|\widetilde{f_i}\right| = \int_{[a,b]} |f|.\end{aligned}$$

Proposition 7

- Avec les notations de la proposition 4 de la page 393, si l'on a $f \geqslant 0$, on a bien sûr :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!] \quad \widetilde{f_i} \geqslant 0.$$

Le résultat se déduit alors de la positivité de l'intégrale des fonctions continues, vue en première année.

- D'après le premier point, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} (g-f) \geqslant 0$. On en déduit le résultat annoncé, par linéarité de l'intégrale.

Exercice 5 On utilise les notations de la proposition 4 de la page 393.

- Si f est nulle sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, alors les prolongements continus $\widetilde{f}_i$ sont tous nuls et l'on a donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
- Supposons $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$. On a :
$$\left(\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_{[a_i, a_{i+1}]} \widetilde{f}_i \geqslant 0\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i, a_{i+1}]} \widetilde{f}_i = 0.$$
On en déduit que :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_{[a_i, a_{i+1}]} \widetilde{f}_i = 0.$$
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $\widetilde{f}_i$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$; elle est donc nulle, d'après un résultat de première année.
On en déduit que f est nulle, sauf peut-être aux a_i.

Proposition 9 Soit $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f ; pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, posons $\alpha_i = \varphi^{-1}(a_i)$. Comme φ est une bijection strictement croissante, $\tau = (\alpha_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$ et l'on a :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \varphi\left(]\alpha_i, \alpha_{i+1}[\right) =]a_i, a_{i+1}[.$$
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Comme $\lim\limits_{\alpha_i^+} \varphi = a_i$ et $\lim\limits_{a_i^+} f$ existe dans $\mathbb{K}$, on en déduit que $\lim\limits_{\alpha_i^+} f \circ \varphi$ existe dans $\mathbb{K}$, par composition de limites. On prouve de même que $\lim\limits_{\alpha_{i+1}^-} f \circ \varphi$ existe dans $\mathbb{K}$. Par suite, la fonction $(f \circ \varphi)_{|]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ a un prolongement continu sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Ce dernier résultat étant vrai pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur $[\alpha, \beta]$.
Avec les notations de la proposition 4 de la page 393, on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, le théorème du changement de variable vu en première année permet d'écrire :
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \widetilde{f}_i\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$
En notant $g = (f \circ \varphi)\,\varphi'$, la fonction $\left(\widetilde{f}_i \circ \varphi\right)\varphi'$ est le prolongement continu sur le segment $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ de $g_{|]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$, par composition de limites. On a donc :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \widetilde{g}_i(u)\,\mathrm{d}u.$$
On en déduit, par sommation, la formule annoncée.

Exercice 6 La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'une de ses primitives est la fonction $F : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$. Comme $\lim\limits_{+\infty} F$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{+\infty} F - F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 7 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et l'une de ses primitives est $F : t \mapsto \ln t$. Comme $\lim\limits_{+\infty} F = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

Exercice 8 La fonction $f : t \mapsto \cos\left(e^{-t}\right) e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'une de ses primitives est $F : t \mapsto -\sin\left(e^{-t}\right)$.

Comme $\lim\limits_{+\infty} F$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{-t}\right) e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(e^{-t}\right) e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(0) = 0 - (-\sin 1) = \sin 1.$$

Exercice 9 Posons $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell > 0$.

Par définition de la limite, on peut choisir $X > a$ tel que : $\forall t \geqslant X \quad f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}\cdot$

Pour $x \geqslant X$, on a alors :

$$\int_a^x f = \int_a^X f + \int_X^x f \geqslant \int_a^X f + \frac{\ell}{2}\,(x - X).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - X) = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f = +\infty$; d'où la divergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exercice 10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f$ est égale à l'aire d'un triangle dont l'un des côtés a pour longueur $\left(n + \frac{1}{4^n}\right) - \left(n - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{2}{4^n}$ et dont la hauteur orthogonale à ce côté a pour longueur 2^n ; on en déduit :

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f = \frac{1}{2}\,\frac{2}{4^n}\,2^n = \frac{1}{2^n}\cdot$$

Comme la fonction f est positive, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle possède donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} F\left(n + \frac{1}{4^n}\right)$; or :

$$F\left(n + \frac{1}{4^n}\right) = \int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{2^n}\cdot$$

On en déduit $\ell = 1$. Comme $\lim\limits_{+\infty} F$ existe dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Proposition 11 En effet, en utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, on obtient :

$$\forall x \in [b,+\infty[\quad \int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f.$$

Il suffit alors d'appliquer la définition de la convergence d'une intégrale pour conclure.

S'il y a convergence, il suffit de faire tendre x vers $+\infty$ pour obtenir l'égalité annoncée.

Exercice 11 D'après la proposition 11 de la page 398, on peut écrire :

$$\forall x \geqslant a \quad \int_x^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^x f.$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est dérivable, de dérivée f, car c'est une primitive de la fonction continue f ; d'où la conclusion.

Exercice 12 La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{(-1+i)t} \end{array}$ est continue et l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{Im}\big(f(t)\big) = e^{-t}\sin t.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^x f = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^x = \frac{e^{(-1+i)x}-1}{-1+i}\cdot$$

Comme $\left|e^{(-1+i)x}\right| = e^{-x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(-1+i)x} = 0$. Par suite l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \frac{1}{1-i}\cdot$

On déduit alors de la proposition 13 de la page 399 que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot$$

Proposition 14 D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, comme f est positive, on a : $\forall x \geqslant a \quad \displaystyle\int_a^x f \geqslant 0$.

Pour le deuxième point, par positivité et croissance de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ sur $[a,+\infty[$, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$, alors : $\forall x > a \quad \displaystyle\int_a^x f = 0$.

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment, il en résulte que f est nulle sur $[a,x]$ pour tout $x > a$ et donc sur $[a,+\infty[$.

Proposition 15 Comme f est positive, la fonction $F: \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f \end{array}$

est croissante, puisque, d'après la relation de Chasles :

$$\forall (x,y) \in [a,+\infty[^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow F(y) - F(x) = \int_x^y f \geqslant 0.$$

On sait que deux cas se présentent :

- F est majorée et alors $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, égale à $\sup_{x\in[a,+\infty[} F(x)$,
- F n'est pas majorée et alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 13
Il suffit d'établir le premier point, puisque le deuxième en est le contraposé.

Posons $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$. La majoration $f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$ et la positivité de l'intégrale sur un segment entraînent $F \leqslant G$ sur $[a,+\infty[$.

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g$ converge, on déduit de la proposition 15 de la page 400 que G est majorée sur $[a,+\infty[$. Il en est donc de même pour F. Par suite, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Exercice 14 La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

On a vu, dans la proposition 16 de la page 401, que pour $\alpha = 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ diverge.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}\cdot$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}$ existe dans $\mathbb{C}$. En notant que $|e^{-\alpha x}| = e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut distinguer trois cas :

- Pour $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} |e^{-\alpha x}| = 0$ et, par suite, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et sa valeur est $\frac{1}{\alpha}\cdot$
- Pour $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$, on obtient cette fois $\lim_{x\to+\infty} |e^{-\alpha x}| = +\infty$. Par suite, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}$ n'existe pas et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ diverge.

- Pour $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, on a $\mathrm{Im}(\alpha) \neq 0$, car $\alpha \neq 0$.

  En considérant la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, avec $x_k = \frac{2k\pi}{|\mathrm{Im}(\alpha)|}$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\alpha x_k} = e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha)\,\frac{2k\pi}{|\mathrm{Im}(\alpha)|}} = 1.$$

  En considérant la suite $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, avec $x'_k = \frac{(2k+1)\pi}{|\mathrm{Im}(\alpha)|}$, on obtient cette fois :

$$\lim_{k\to+\infty} x'_k = +\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\alpha x'_k} = -1.$$

  On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}$ n'existe pas et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ diverge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Théorème 18

1. *Cas des fonctions à valeurs réelles.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. Introduisons les deux fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$; ces deux fonctions sont continues par morceaux et *positives* et, comme $|f| = f^+ + f^-$, on a les deux inégalités $f^+ \leqslant |f|$ et $f^- \leqslant |f|$.

   En utilisant le résultat établi dans l'exercice 13 de la page 400, on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-$ convergent ; comme $f = f^+ - f^-$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ en résulte.

2. *Cas des fonctions à valeurs complexes.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. De $|f| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(f)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(f)\big)^2}$ on déduit les inégalités :

$$\big|\mathrm{Re}(f)\big| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad \big|\mathrm{Im}(f)\big| \leqslant |f|.$$

   En utilisant le résultat établi dans l'exercice 13 de la page 400, on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f)$ *convergent absolument*, donc convergent d'après le premier cas. La convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ se déduit alors de la proposition 13 de la page 399.

Théorème 20

1. Il suffit d'appliquer le résultat établi dans l'exercice 13 de la page 400 aux fonctions positives $|f|$ et $|g|$.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, il existe $b \geqslant a$ et $K > 0$ tels que :

$$\forall t \geqslant b \quad \big|f(t)\big| \leqslant K\big|g(t)\big|.$$

   Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, elle l'est aussi sur $[b, +\infty[$, d'après la proposition 11 de la page 398. Par suite Kg est intégrable sur $[b, +\infty[$; donc f est intégrable sur $[b, +\infty[$, d'après le premier point. On conclut en utilisant à nouveau la proposition 11 de la page 398.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, il existe deux fonctions φ et ψ de limite 1 en $+\infty$ telles que, au voisinage de $+\infty$:

$$f = \varphi g \quad \text{et} \quad g = \psi f.$$

   Une fonction de limite 1 en $+\infty$ étant bornée au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$ au voisinage de $+\infty$.
   On conclut, en appliquant le deuxième point.

Exercice 15 La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall t \geqslant 0 \quad f(t) = \frac{\sqrt{2}\, e^{it}}{\sqrt{e^t + e^{-t}}}\cdot$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-t} = \mathrm{o}(e^t)$, donc $\sqrt{e^t + e^{-t}} \sim e^{t/2}$ et, par suite :

$$f(t) \sim g(t) \quad \text{avec} \quad \forall t \geqslant 0 \quad g(t) = \sqrt{2}\, e^{it} e^{-t/2}.$$

La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'après de la proposition 19 de la page 402, puisque :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \big|g(t)\big| = \sqrt{2}\, e^{-t/2}.$$

On déduit alors du théorème de comparaison de la page 403 que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 16 La fonction $f : t \mapsto \cos(t) \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et :

$$\forall t \geqslant 1 \quad \big|f(t)\big| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\cdot$$

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2} \quad \text{donc} \quad f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'après l'étude des intégrales de Riemann, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On déduit alors du théorème de comparaison de la page 403 que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

Exercice 17 La fonction $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et, comme elle est positive, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ équivaut à l'intégrabilité de f.

Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-t} = 0$, donc $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (on utilise la nature des intégrales de Riemann). On déduit du théorème de comparaison de la page 403 que f est intégrable sur $[1,+\infty[$. En conclusion l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\ln\left(t^{3/2}\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{t^{3/2}}\right) - 3\ln t - 3\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\\ &= 2\ln\left(1+\frac{1}{t^{3/2}}\right) - 3\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{2}{t^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) - \frac{3}{t} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= -\frac{3}{t} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right) \sim -\frac{3}{t}\cdot \end{aligned}$$

L'équivalent obtenu étant négatif, la méthode précédente s'applique.

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ est donc divergente.

Exercice 19 Notons que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue sur l'intervalle $[2,+\infty[$; comme elle est positive, la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ équivaut à l'intégrabilité sur $[2,+\infty[$ de f.

Choisissons $\gamma \in \,]1,\alpha[$. Comme $t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta}$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$, par croissances comparées, car $\alpha-\gamma > 0$; par suite, $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Puisque $\gamma > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ (on utilise la nature des intégrales de Riemann). On déduit du théorème de comparaison de la page 403 que f est intégrable sur $[2,+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge.

Exercice 20 Comme $tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$, par croissances comparées, car $1-\alpha > 0$; par suite, $\dfrac{1}{t} = \mathrm{o}\big(f(t)\big)$ au voisinage de $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ (on utilise la nature des intégrales de Riemann). On déduit du théorème de comparaison de la page 403 (contraposé

du deuxième point) que f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$. Comme f est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 21 Pour $\alpha = 1$ et $x > 2$, le changement de variable $t = e^u$ donne :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}.$$

D'après l'étude des intégrales de Riemann, on sait que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_{\ln 2}^{y}\frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ existe dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\beta > 1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, on en déduit, par composition de limites, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ existe dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\beta > 1$.

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 22 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$.

- Pour $\alpha = 1$ et $x \in]0,1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x.$$

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

- Pour $\alpha \neq 1$ et $x \in]0,1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

  Par suite $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha > 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ pour $\alpha < 1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 23 D'après l'exercice 22 de la page 410 la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, alors que son carré $f^2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ ne l'est pas. Par suite, le produit de deux fonctions intégrables sur $]0,1]$ peut ne pas être intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 24 La fonction $f : t \mapsto (\ln t)^2 \cos t$ est continue sur $]0,1]$.

Comme $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\sqrt{t}\,(\ln t)^2 = 0$, par croissances comparées, on a $|f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, quand $t \to 0^+$. D'après l'exercice 22 de la page 410 la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$. On déduit alors du théorème de comparaison que la fonction f est intégrable sur $]0,1]$; donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 \cos t\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 25 La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$ et bornée sur cet intervalle borné. D'après la remarque précédente, f est intégrable sur $]0,1]$; donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ converge.

On notera bien qu'en revanche, f ne possède pas de prolongement continu sur le segment $[0,1]$.

Proposition 42 D'après la proposition 11 de la page 398 (même principe pour une borne finie ou infinie), les convergences de $\displaystyle\int_a^c f$ et de $\displaystyle\int_c^b f$ entraînent les convergences de $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et de $\displaystyle\int_{c'}^b f$ et l'on a :

$$\int_a^{c'} f = \int_a^c f + \int_c^{c'} f \quad \text{et} \quad \int_{c'}^b f = -\int_c^{c'} f + \int_c^b f.$$

D'où l'égalité annoncée.

Proposition 43 Cela résulte de la définition précédente.

Exercice 26 La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'une de ses primitives est $F : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$. Comme $\lim\limits_{-\infty} F = -\pi/2$ et $\lim\limits_{+\infty} F = \pi/2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = \pi.$$

Exercice 27 La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- Quand $t \to 0^+$, on a :

$$f(t) = \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) = -2\ln t + \ln\left(1+t^2\right) \sim -2\ln t.$$

  D'après la proposition 37 de la page 410, la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0,1]$; donc, par comparaison, f est intégrable sur $]0,1]$. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.

- On a $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$, quand $t \to +\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (on utilise la proposition 17 de la page 401), on en déduit, par comparaison, que f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 28 La fonction $f : t \mapsto e^{it} \ln(t)\, e^{-2t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- On a $f(t) \sim \ln t$, quand $t \to 0^+$. D'après la proposition 37 de la page 410, la fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$, donc aussi f, par comparaison.

  Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.

- Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\left|e^t f(t)\right| = e^{-t} \ln t$. On en déduit, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^t f(t) = 0$, c'est-à-dire $f(t) = \mathrm{o}\left(e^{-t}\right)$, quand $t \to +\infty$. D'après la proposition 16 de la page 401, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc aussi f, par comparaison. Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Proposition 45 Si l'on note E cet ensemble, E est inclus dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et contient la fonction nulle.

Montrons que E est stable par combinaisons linéaires, en ne considérant pas le cas trivial où I est un segment. Soit f, g deux fonctions de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$; on a :

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|\ |f| + |\mu|\ |g|\,.$$

La fonction majorante étant intégrable, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de la fonction $\lambda f + \mu g$, d'où la conclusion.

Proposition 46

- Lorsque I est un segment, le résultat est connu.

  Lorsque I est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, le résultat a déjà été établi.

  Lorsque $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert, soit $c \in]a, b[$; d'après la proposition 42 de la page 412, on a $\displaystyle\int_I f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Comme $\displaystyle\int_a^c f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_c^b f \geqslant 0$, d'après le cas précédent, on en déduit $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.

- $*$ Supposons $\displaystyle\int_I f = 0$. Pour tout segment J d'intérieur non vide inclus dans I, comme f est positive, on a $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_I f$ et donc $\displaystyle\int_J f = 0$. Comme f est continue, positive et d'intégrale nulle sur J, elle est nulle sur J. La fonction f, nulle sur tout segment inclus dans I, est nulle sur I.

  $*$ Si $f = 0$, on a bien sûr $\displaystyle\int_I f = 0$.

Proposition 47 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

- Si I est de la forme $[a, b[$, on a :

$$\forall x \in]a, b[\quad \left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f|\,.$$

  Le résultat s'en déduit, en faisant tendre x vers b.

- Si I est de la forme $]a,b[$, fixons $c \in]a,b[$ et utilisons la proposition 42 de la page 412 :

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^c f + \int_c^b f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^b f\right|.$$

En utilisant le cas précédent, on obtient :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^c |f| + \int_c^b |f| = \int_a^b |f|,$$

d'où la conclusion.

Proposition 49 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

Dans les autres cas, cela résulte de la proposition 11 de la page 398 et de ses généralisations aux autres intervalles semi-ouverts, ou de la proposition 42 de la page 412.

Exercice 29 D'après l'étude des intégrales de référence (proposition 17 de la page 401), la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ convient.

Exercice 30 Toute fonction constante est de carré intégrable sur I, car I est borné. Soit f une fonction de carré intégrable sur I ; voici deux méthodes pour établir qu'elle est intégrable.

- *Méthode 1.* De l'inégalité :

$$|f| \leqslant \frac{|f|^2 + 1}{2},$$

on déduit, par comparaison, que f est intégrable.

- *Méthode 2.* Comme f est le produit de la fonction constante égale à 1 et de f, la fonction f est de carré intégrable sur I, d'après la proposition 50 de la page 416.

Proposition 54 L'intégrabilité de fg permet d'écrire l'inégalité $\left|\int_I fg\right| \leqslant \int_I |fg|$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x\,|f|+|g|$ est de carré intégrable sur I, comme combinaison linéaire de fonctions de carré intégrable, et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_I \big(x\,|f| + |g|\big)^2 = x^2 \int_I |f|^2 + 2x \int_I |fg| + \int_I |g|^2 \geqslant 0.$$

Deux cas se présentent alors.

- Supposons $\int_I |f|^2 = 0$. La fonction affine $x \mapsto 2x \int_I |fg| + \int_I |g|^2$ étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\int_I |fg| = 0$. L'inégalité

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f^2|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g^2|\right)^{\frac{1}{2}}$$

est alors vérifiée.

- Supposons $\int_I |f|^2 > 0$. Notons P le polynôme de degré 2 :

$$P = X^2 \int_I |f|^2 + 2X \int_I |fg| + \int_I |g|^2 .$$

La fonction polynomiale associée à P étant positive sur $\mathbb{R}$, on sait que son discriminant est négatif, ce qui fournit l'inégalité

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f^2|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g^2|\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où la conclusion.

Théorème 55

- Traitons d'abord le cas où $I = [a,b[$; le cas où $I =]a,b]$ se traite de la même manière.

  Pour $x \in [a,b[$, une intégration par parties sur $[a,x]$ donne :

$$\int_a^x f'g = [fg]_a^x - \int_a^x fg'. \qquad (*)$$

  L'existence de deux limites parmi $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f'g$, $\lim\limits_{x\to b} [fg]_a^x$ et $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x fg'$ entraîne donc celle de la troisième. Si ces limites existent, on obtient alors la formule d'intégration par parties souhaitée, en faisant tendre x vers b dans la relation $(*)$.
- Le cas où $I =]a,b[$ se traite en deux temps, en appliquant l'un des cas précédents à chaque intégrale $\int_a^c f'g$ et $\int_c^b f'g$, où $c \in]a,b[$ est fixé.

Exercice 31 Appliquons le théorème d'intégration par parties sur $[1,+\infty[$ aux deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f : t \mapsto -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \ln t$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, par croissances comparées, le crochet $[fg]_1^{+\infty} = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^{+\infty}$ existe et est nul.

On déduit du théorème 55 de la page 418 que les intégrales :

$$\int_1^{+\infty} f'g = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} fg' = -\int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Remarque La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ a été obtenue lors de l'intégration par parties, mais elle aurait pu être obtenue par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$.

Théorème 56 Comme φ est strictement croissante et bijective, on a :

$$\lim_{y\to\beta} \varphi(y) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y'\to b} \varphi^{-1}(y') = \beta.$$

- Supposons l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.
  - ∗ Fixons $x_0 \in\,]\alpha,\beta[$. Comme $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_{\varphi(x_0)}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.
    Pour $y \in\,]\alpha,\beta[$, la proposition 9 de la page 395 permet d'écrire :

    $$\int_{x_0}^{y} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

    Comme $\lim_{y\to\beta} \varphi(y) = b$, on obtient, par composition de limites :

    $$\lim_{y\to\beta} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

    Par suite, l'intégrale $\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et l'on a :

    $$\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  - ∗ De même, puisque $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_a^{\varphi(x_0)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également. On montre, comme précédemment, que $\int_{\alpha}^{x_0} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et vérifie :

    $$\int_{\alpha}^{x_0} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{a}^{\varphi(x_0)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  - ∗ En utilisant la relation de Chasles, on a donc établi que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et lui est égale.

- Supposons l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ convergente et fixons $x_0 \in]\alpha, \beta[$.
  - Avec les notations précédentes, pour $y' \in]a, b[$, on a, d'après la proposition 9 de la page 395 :
$$\int_{x_0}^{\varphi^{-1}(y')} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{y'} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  - Le même raisonnement de composition de limites que dans le premier point permet de conclure que l'intégrale $\int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a l'égalité :
$$\int_{x_0}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  - On conclut, comme pour le sens direct, par utilisation de la relation de Chasles.

Exercice 32 La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par croissances comparées, on a $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

Appliquons le théorème 56 de la page 419 sur $]0, +\infty[$, en utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même. On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du$ et l'égalité annoncée.

Théorème 57 Le principe est exactement le même que pour le théorème 56 de la page 419, en utilisant cette fois $\lim\limits_{\alpha} \varphi = b$ et $\lim\limits_{\beta} \varphi = a$, ainsi que $\lim\limits_{a} \varphi^{-1} = \beta$ et $\lim\limits_{b} \varphi^{-1} = \alpha$.

Proposition 58 Soit $f : \begin{array}{ccc}]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{(t-a)^{\alpha}} \end{array}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]a,b[\\ u & \longmapsto & a+(b-a)u. \end{array}$

La fonction f est continue par morceaux et la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective. D'après le théorème 56 de la page 419, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. On obtient facilement :
$$\forall u \in]0,1[\quad f(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{u^{\alpha}}.$$

En utilisant le résultat de l'exercice 22 de la page 410, on en déduit que $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^{\alpha}}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

On procède de même dans le deuxième cas, en utilisant $\psi : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]a,b[\\ u & \longmapsto & b+(a-b)\,u \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective, et le théorème 57 de la page 419. On obtient de même que $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 33

- La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et :
  * quand $t \to 0$, on a $f(t) \sim \ln t$; on sait que la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$, par comparaison;
  * quand $t \to +\infty$, on a $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^2} = \mathrm{o}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

  Par suite, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où l'existence de I.
- La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur lui-même. D'après le théorème 56 de la page 419 on peut écrire :

$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -I.$$

  Par suite $I = 0$.

Exercice 34 Puisque $\alpha \leqslant 0$, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad t^\alpha \leqslant 1$. La fonction sin étant positive sur l'intervalle $[2n\pi,(2n+1)\pi]$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

Par ailleurs, la relation de Chasles fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergeait, par définition de la convergence d'une intégrale, on aurait alors :

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0.$$

C'est une contradiction; d'où la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 35 On a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Exercice 36

1. Appliquons le théorème d'intégration par parties sur $[1,+\infty[$ aux deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:
$$f : t \mapsto -\cos t \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\cdot$$
On a :
$$\forall t \geqslant 1 \quad \left|-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right) = 0,$$
car $\alpha > 0$. Par suite, le crochet $[fg]_1^{+\infty}$ existe. On déduit du théorème 55 de la page 418 que les intégrales :
$$\int_1^{+\infty} f'g = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} fg' = \int_1^{+\infty} -\frac{\alpha\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature.
Par ailleurs, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{-\alpha\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{|\alpha|}{t^{\alpha+1}}\cdot$ Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{\alpha\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, car $\alpha+1>1$, donc converge. En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, car $\alpha>0$; on en déduit :
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}\cdot$$
Par comparaison aux séries de Riemann, la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ diverge, car $\alpha\leqslant 1$.
Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t = +\infty$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t = +\infty$.
L'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ diverge donc.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 37 Notons $f : t\mapsto \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$. La fonction f est continue sur $[2,+\infty[$; effectuons un développement de f au voisinage de $+\infty$:
$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{2t} + g(t),$$
avec $g(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

- Par comparaison aux intégrales de Riemann, g est intégrable sur $[2,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$ converge.

- D'après l'exercice 36 de la page 421, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
- On peut écrire :
$$\forall t \geqslant 2 \quad \frac{\sin^2 t}{2t} = \frac{1}{4t} - \frac{\cos(2t)}{4t}.$$
L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{4t}\,\mathrm{d}t$ converge (même principe que dans l'exercice 36 de la page 421), alors que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4t}$ diverge (c'est, à un facteur près, une intégrale de Riemann).
Par suite $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

En conclusion $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge, puisque f est la somme de trois fonctions, deux dont l'intégrale converge, une dont l'intégrale diverge.

S'entraîner et approfondir

8.1 1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\operatorname{Arctan} t)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{Arctan} t)^2}. \end{array}$

Donner un équivalent simple, quand $x \to 0^+$, de $g(x)$.

8.2 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}}$;

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$;

3. $\displaystyle\int_0^1 t^n \left|\ln(1-t)\right|^\alpha \mathrm{d}t$ (on discutera selon $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) ;

4. $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$;

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(t^2 - t\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1}\,\mathrm{d}t$ (on discutera selon $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$).

8.3 Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8.4 Soit $f : t \mapsto \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $\left[1, +\infty\right[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.
2. Justifier l'existence de $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$.
3. Exprimer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ à l'aide de γ.

8.5 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$, après avoir vérifié sa convergence.

8.6 Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 \sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t$.

La calculer, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

8.7 On fixe deux réels $a < b$. Donner la nature, selon $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et la valeur, en cas de convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (b-t)^{\alpha}(t-a)^n \,\mathrm{d}t$.

8.8 Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. (a) Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) = -e^{-x}\ln x + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$, à l'aide d'une intégration par parties.

8.9 1. Justifier la convergence, pour tout réel $\beta \in]0,1[$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\beta}}\,\mathrm{d}u$.

2. En déduire la convergence, pour tout réel $\alpha > 1$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

8.10 Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de F sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $F(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$, quand $x \to +\infty$.

8.11 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+it}\,\mathrm{d}t$ est-elle absolument convergente ? convergente ?

8.12 Soit $f : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t}$.

1. Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(t) - \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, quand $t \to +\infty$.
3. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

8.13 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs réelles positives et décroissante. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}(1/x)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ ne soit pas bornée.

★ **8.14** Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1[,\mathbb{R})$. On suppose f' de carré intégrable et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

8.15 On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{th}(t)$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_A^{3A} \frac{\operatorname{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

8.16 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de F.
2. Soit $x > 0$. Justifier la convergence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \pi/2$.

8.17 1. Soit $f : \begin{array}{rcl}]0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{array}$.

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$.

   Justifier l'existence de I_n. Calculer $I_{n+1} - I_n$ puis I_n.

3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de I.

Solution des exercices

8.1 1. La fonction f est continue sur $]0,1]$ et l'on a :

$$\forall t \in]0,1] \quad f(t) = \frac{(\operatorname{Arctan} t - t)(\operatorname{Arctan} t + t)}{t^2 (\operatorname{Arctan} t)^2}\cdot$$

En utilisant le développement limité d'ordre 3 de la fonction Arctan au voisinage de 0 :

$$\operatorname{Arctan} t = t - \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right),$$

on obtient les équivalents suivants :

$$\operatorname{Arctan} t - t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^3}{3} \qquad \operatorname{Arctan} t + t \underset{t\to 0}{\sim} 2t \qquad t^2 (\operatorname{Arctan} t)^2 \underset{t\to 0}{\sim} t^4.$$

On en déduit $\lim\limits_{0} f = -2/3$. La fonction f est intégrable sur $]0,1]$, puisqu'elle possède une limite finie en 0. Cela prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$.

2. Pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$g(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int_x^1 f = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 - \int_x^1 f = \frac{1}{x} - 1 - \int_x^1 f.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 f$ converge, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 f$ existe dans $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on en déduit, $1 + \displaystyle\int_x^1 f = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, quand $x \to 0^+$, c'est-à-dire :

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\cdot$$

8.2 Dans chacune des six questions suivantes, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée f.

1. La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et quand $x \to \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \frac{\pi}{2} - x \quad \text{donc} \quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}\cdot$$

On déduit de l'équivalent précédent que f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 58 de la page 420) ; donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}}$ converge.

2. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

   - Quand $x \to 0$, on a :

   $$\operatorname{Arctan} x \sim x \quad \text{et} \quad e^x - 1 \sim x.$$

   Par suite, $\lim\limits_{0} f = 1$; la fonction f est intégrable sur $]0,1]$, puisqu'elle a une limite finie en 0.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$ et, quand $x \to +\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{donc} \quad e^x - 1 = e^x\left(1 - e^{-x}\right) \sim e^x.$$
On a donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\, e^{-x}$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on en déduit que f est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison.

D'après les deux points précédents, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$; donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x$ converge.

3. La fonction f est continue sur $]0, 1[$.
   - Quand $t \to 0$, on a $\ln(1-t) \sim -t$ et donc $f(t) \sim t^{n+\alpha}$.
   Les fonctions étant positives, on déduit du dernier équivalent que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f$ converge, par comparaison aux intégrales de Riemann, si, et seulement si, $n + \alpha > -1$.
   - Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{u\to0^+} \sqrt{u}\,|\ln u|^\alpha = 0$; on en déduit, quand $t \to 1$:
   $$\left|\ln(1-t)\right|^\alpha = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) \quad \text{donc} \quad f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right).$$
   Par comparaison, on déduit de ce qui précède que f est intégrable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (on utilise la proposition 58 de la page 420), donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 f$ converge.

   En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si, et seulement si, $n + \alpha > -1$

4. Pour tout $x > \frac{2}{\pi}$, on a $\frac{1}{x} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\frac{1}{x} > 0$. Par suite, la fonction f est continue sur $\left]\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$, comme composée de fonctions continues.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
   $$\cos\frac{1}{x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right).$$
   On a $\sin u \sim u$, quand $u \to 0$; donc, comme $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit, quand $x \to \frac{2}{\pi}$:
   $$\cos\frac{1}{x} \sim \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2x}\left(x - \frac{2}{\pi}\right) \sim \frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{2}{\pi}\right).$$
   Par croissances comparées, on a $\ln u = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$, quand $u \to 0^+$; donc, comme $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2x}\left(x - \frac{2}{\pi}\right) = 0$, on peut écrire, quand $x \to \frac{2}{\pi}$:
   $$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}}}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x - \frac{2}{\pi}}}\right),$$

en utilisant l'équivalent obtenu plus haut. On en déduit que f est intégrable sur $\left]\frac{2}{\pi}, 1\right]$, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 58 de la page 420).

- On a $\ln u \sim u - 1$, quand $u \to 1$; donc, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$, on a, quand $x \to +\infty$:
$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \sim \cos\frac{1}{x} - 1 \sim -\frac{1}{2x^2},$$
en utilisant l'équivalent $\cos t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$, qui se déduit du développement limité d'ordre 2 de la fonction $\cos$ en 0.
D'après l'équivalent $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, f est intégrable sur $\left]\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge.

5. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.
   - Quand $t \to 1$, on a :
   $$\ln\left(t^2 - t\right) = \ln t + \ln(t-1) = \ln(t-1) + \mathrm{o}(1) \sim \ln(t-1),$$
   d'où :
   $$f(t) \sim \frac{\ln(t-1)}{4} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right),$$
   par croissances comparées.
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en déduit que f est intégrable sur $]1, 2]$ (on utilise la proposition 58 de la page 420).
   - On a, au voisinage de $+\infty$:
   $$\ln\left(t^2 - t\right) = 2\ln t + \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 2\ln t + \mathrm{o}(1) \sim 2\ln t.$$
   On en déduit $f(t) \sim \frac{2\ln t}{t^2}$ et, par croissances comparées, $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$; donc f est intégrable sur $[2, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, f est intégrable sur $]1, +\infty[$ et par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
6. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.
   - Faisons une étude locale au voisinage de 1. On a, quand $u \to 0$:
   $$f(1+u) = \frac{\left(\ln(1+u)\right)^\alpha}{(1+u)^\beta - 1} = \frac{\left(u + \mathrm{o}(u)\right)^\alpha}{\beta u + \mathrm{o}(u)} \sim \frac{u^{\alpha-1}}{\beta}.$$
   On a donc $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{(t-1)^{\alpha-1}}{\beta}$ et, comme les fonctions sont de signe constant, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 58 de la page 420).

- Pour l'étude locale au voisinage de $+\infty$, distinguons deux cas.
  - ∗ Pour $\beta > 0$, on a $f(t) \sim \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}$, quand $t \to +\infty$. Utilisons l'étude des *intégrales de Bertrand* faite dans les exercices de la page 405 (attention ce résultat serait à redémontrer, car hors programme). D'après le théorème de comparaison, les fonctions étant de signe constant, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$ ou $\beta = 1$ et $\alpha < -1$.
  - ∗ Pour $\beta < 0$, on a $f(t) \sim -(\ln t)^\alpha$. En comparant à nouveau à une *intégrale de Bertrand*, on constate que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

8.3 1. La fonction $u : t \mapsto \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) = 1$, on a $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \sim \frac{t^2+2}{t^2+1} - 1 = \frac{1}{t^2+1} \sim \frac{1}{t^2}$, au voisinage de $+\infty$.

Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[a, +\infty[$, pour tout $a \geqslant 0$; cela prouve que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

D'après l'exercice 11 de la page 399, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue, sur $\mathbb{R}_+$. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$; comme $f = g \circ h$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme composée de fonctions continues.

2. On reprend les fonctions g et h introduites à la question précédente. Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $f = g \circ h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   Pour le calcul de f', on utilise l'exercice 11 de la page 399 et le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

3. L'expression obtenue pour $f'(x)$ montre que $\lim\limits_{0^+} f' = -\infty$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de limite de la dérivée permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. En conclusion, f n'est pas dérivable en 0.

8.4 1. • La fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est en escalier, donc continue par morceaux, sur tout segment inclus dans $\left[1,+\infty\right[$. Elle est donc continue par morceaux sur ce dernier intervalle. La fonction f est donc continue par morceaux sur $[1,+\infty[$, par opérations sur les fonctions continues par morceaux.

• On a, pour tout $t \geqslant 1$:

$$0 \leqslant t - \lfloor t \rfloor \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Pour établir que la suite (γ_n) a une limite, montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$, avec $u_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, converge (on utilise le « lien suites-séries »).

On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge; d'où la conclusion.

3. Calculons, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\int_1^n f &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t && \text{(linéarité)}\\
&= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t && \text{(relation de Chasles)}\\
&= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k} - \frac{k}{k+1}\right) = \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \gamma_n.
\end{aligned}$$

On peut donc conclure, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = 1 - \gamma$.

8.5 La fonction $g : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

• Quand $t \to 0$, on a :

$$g(t) = -2\ln t + \ln\left(1 + t^2\right) \sim -2\ln t$$

puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} (-2\ln t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln\left(1+t^2\right) = 0$. Comme la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, la fonction g est intégrable sur $]0,1]$, par comparaison.

• Quand $t \to +\infty$, on a $g(t) \sim \frac{1}{t^2}$; donc g est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On déduit de cette étude que g est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, effectuons une intégration par parties sur $]0,+\infty[$ avec les fonctions $f : t \mapsto t$ et g. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

- quand $t \to 0$, on a $f(t)\,g(t) \sim -2t\ln t$, en utilisant l'équivalent déjà obtenu de g, d'où $\lim\limits_{0} fg = 0$, par croissances comparées ;
- quand $t \to +\infty$, on a $f(t)\,g(t) \sim \frac{1}{t}$, d'où $\lim\limits_{+\infty} fg = 0$.

Par suite, le crochet $\big[fg\big]_0^{+\infty}$ existe et est nul.

Comme on sait déjà que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg'$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g = \big[fg\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} fg'$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \big[2\,\mathrm{Arctan}\,t\big]_0^{+\infty} = \pi.\end{aligned}$$

8.6 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}$ est continue sur $\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right[$, comme composée de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ continue sur ce même intervalle, à valeurs dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et de la fonction $u \mapsto \frac{u^2\cos u}{\sqrt{\sin u}}$ continue sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

  On en déduit $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$, ce qui prouve l'intégrabilité de f sur $\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \left]\frac{2}{\pi},+\infty\right[\\ u & \longmapsto & \frac{1}{u} \end{array}$ étant une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, on déduit du théorème de changement de variable que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\circ\varphi(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et que :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\circ\varphi(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

  On obtient :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}}\,\mathrm{d}u = \Big[2\sqrt{\sin u}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

8.7 • La fonction $f : t \mapsto (b-t)^{\alpha}(t-a)^{n}$ est continue sur $[a, b[$ et :

$$(b-t)^{\alpha}(t-a)^{n} \underset{t \to b}{\sim} (b-a)^{n}(b-t)^{\alpha}.$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ si, et seulement si, $\alpha > -1$; comme cette fonction est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

• Pour tout $\alpha > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I(\alpha, n) = \displaystyle\int_a^b (b-t)^{\alpha}(t-a)^{n}\,\mathrm{d}t$.

Pour $n \geqslant 1$, effectuons une intégration par parties :

$$\int_a^b (b-t)^{\alpha}(t-a)^{n}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,(t-a)^{n}\right]_a^b + \frac{n}{\alpha+1}\int_a^b (b-t)^{\alpha+1}(t-a)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégration par parties est justifiée car :

* les fonctions $t \mapsto -\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $t \mapsto (t-a)^{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$;
* on a $\lim\limits_{t \to b} (b-t)^{\alpha+1}(t-a)^{n} = 0$, donc le crochet $\left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,(t-a)^{n}\right]_a^b$ existe (et est égal à 0).

On a donc établi :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall \alpha > -1 \quad I(\alpha, n) = \frac{n}{\alpha+1}\,I(\alpha+1, n-1). \qquad (1)$$

• Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha > -1 \quad I(\alpha, n) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(\alpha+k)}\,(b-a)^{\alpha+n+1}.$$

* Le résultat est vrai pour $n = 0$, puisque :

$$\forall \alpha > -1 \quad I(\alpha, 0) = \int_a^b (b-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

* Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (1) et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall \alpha > -1 \quad I(\alpha, n+1) &= \frac{n+1}{\alpha+1}\,I(\alpha+1, n)\\ &= \frac{n+1}{\alpha+1}\,\frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(\alpha+1+k)}\,(b-a)^{\alpha+1+n+1}\\ &= \frac{(n+1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n+2}(\alpha+k)}\,(b-a)^{\alpha+n+2}.\end{aligned}$$

Le résultat annoncé est donc établi.

8.8 1. • La fonction $u : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a $u(t) = \mathrm{o}\left(e^{-t}\right)$, quand $t \to +\infty$. Pour tout $x > 0$, la fonction u est donc intégrable sur $[x,+\infty[$, par comparaison, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle.

• Si U est une primitive de u sur $]0,+\infty[$, on a :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \lim_{+\infty} U - U(x).$$

Comme U est de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de f et l'on a :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -U'(x) = -u(x) = -\frac{e^{-x}}{x}\cdot$$

2. (a) On a :

$$\forall x > 0 \quad f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[-e^{-t}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}\cdot \tag{1}$$

(b) En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x > 0 \quad f(x) &= \left[e^{-t}\ln t\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t\\ &= -e^{-x}\ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est justifiée, car :

- les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$;
- le crochet $\left[e^{-t}\ln t\right]_x^{+\infty}$ existe, puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\ln t\right) = 0$, par croissances comparées.

(c) • Comme la fonction f est positive, on déduit de (1) que $f(x) = \mathrm{o}\left(e^{-x}\right)$, quand $x \to +\infty$. Par comparaison, f est intégrable sur $[1,+\infty[$, puisque la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur cet intervalle.

• Comme $e^{-x}\ln x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$, la fonction $x \mapsto e^{-x}\ln x$ est intégrable sur $]0,1]$ par comparaison, puisque la fonction ln est intégrable sur cet intervalle.
D'après la question 2b, la fonction f est somme de deux fonctions :
  * la première est intégrable sur $]0,1]$;
  * la deuxième a une limite finie en 0, puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

La fonction f est donc intégrable $]0,1]$, comme somme de deux fonctions intégrables.

On a ainsi établi l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.

3. Effectuons une intégration par parties, avec les fonctions f et $g : x \mapsto x$ sur $]0,+\infty[$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

- quand $x \to +\infty$, on a $f(x) = \mathrm{o}\left(e^{-x}\right)$, donc $xf(x) = \mathrm{o}\left(xe^{-x}\right)$; par croissances comparées, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(xf(x)\big) = 0$;
- par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(xe^{-x}\ln x\right) = 0$;

comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t$ converge, on a :

$$\lim_{x \to 0} \left(x \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t \right) = 0\,;$$

d'après la question 2b, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0} \bigl(x f(x) \bigr) = 0$.

Par suite, le crochet $[fg]_0^{+\infty}$ existe et est égal à 0.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f g'$ converge, le théorème d'intégration par parties fournit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f' g$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} f g' = [fg]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f' g,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} f = -\int_0^{+\infty} f' g = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = \bigl[-e^{-x} \bigr]_0^{+\infty} = 1.$$

8.9 1. La fonction $h : u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^\beta}$ est continue sur $]0, +\infty[$

- Pour tout $u > 0$, on a $\bigl| h(u) \bigr| = \frac{1}{u^\beta}\cdot$

  L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ étant convergente, car $\beta < 1$, la fonction h est intégrable sur $]0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 h$ converge.

- Effectuons une intégration par parties, avec les fonctions $f : u \mapsto -ie^{iu}$ et $g : u \mapsto \frac{1}{u^\beta}$ sur $[1, +\infty[$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

  ∗ comme $|f| = 1$, $\lim\limits_{+\infty} fg = 0$, ce qui prouve l'existence de $\bigl[fg \bigr]_1^{+\infty}$;

  ∗ on a :

  $$\forall u \geqslant 1 \quad \bigl| f(u) \, g'(u) \bigr| = \beta \left| \frac{e^{iu}}{u^{\beta+1}} \right| = \frac{\beta}{u^{\beta+1}},$$

  ce qui prouve l'intégrabilité de fg', car $\beta + 1 > 1$, et donc la convergence de $\int_1^{+\infty} fg'$.

  On déduit du théorème d'intégration par parties la convergence de $\int_1^{+\infty} f' g$, c'est-à-dire de $\int_1^{+\infty} h$.

Par suite, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h$ converge.

2. Appliquons le théorème du changement de variable de la page 419 avec $\varphi : u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}}$ à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

   La fonction φ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même. On déduit du théorème précité que les intégrales suivantes sont de même nature :
$$\int_0^{+\infty} e^{it^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\alpha\, u^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,\mathrm{d}u.$$
   On a $1-\frac{1}{\alpha} \in\,]0,1[$, car $\alpha > 1$. D'après la première question, la deuxième intégrale est alors convergente et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

8.10 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et, comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, elle possède un prolongement continu sur $[0,+\infty[$.
- Effectuons une intégration par parties, avec les fonctions $f : t \mapsto -\cos t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :
  * comme f est bornée, $\lim\limits_{+\infty} fg = 0$, ce qui prouve l'existence de $\big[fg\big]_1^{+\infty}$;
  * on a :
$$\forall t \geqslant 1 \quad \big|f(t)\,g'(t)\big| = \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$
    ce qui prouve l'intégrabilité de fg' et donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} fg'$.

  On déduit de cette étude la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, donc *a fortiori* de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $x \geqslant 0$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}_+$

2. L'intégration par parties effectuée à la question précédente est possible sur tout intervalle $[x,+\infty[$, avec $x > 0$, ce qui donne :
$$\forall x > 0 \quad F(x) = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   Par inégalité triangulaire, on en déduit :
$$\begin{aligned}\forall x > 0 \quad \big|F(x)\big| &\leqslant \frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty} = \frac{2}{x}\cdot\end{aligned}$$
   Cette majoration prouve que $F(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$, quand $x \to +\infty$.

8.11 Notons $u : t \mapsto \frac{e^{it}}{1+it}\cdot$

- Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\left|u(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et donc $\left|u(t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}\cdot$

  Comme les fonctions sont positives, cela prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u|$ diverge, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- Intégrons par parties avec les fonctions $f : t \mapsto -ie^{it}$ et $g : t \mapsto \frac{1}{1+it}$ sur $[0,+\infty[$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left|f(t)\, g(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot$$

  Comme $\lim\limits_{+\infty} |fg| = 0$, le crochet $\left[fg\right]_0^{+\infty}$ existe.

  On a :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left|f(t)\, g'(t)\right| = \left|-\frac{e^{it}}{(1+it)^2}\right| = \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

  Par suite $\left|f(t)\, g'(t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, ce qui prouve, par comparaison aux intégrales de Riemann, que fg' est intégrable sur $[0,+\infty[$; donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg'$ converge.

  On déduit de cette étude que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+it}\,\mathrm{d}t$, converge.

8.12 1. Pour $t > 1$, on a $\sqrt{t} > \sin t$ et, comme $1 > \sin 1$, la fonction $h : t \mapsto \sqrt{t} - \sin t$ ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. La fonction h étant continue, f est continue sur $[1,+\infty[$, comme quotient de fonctions continues, la deuxième, h, ne s'annulant pas.

2. On a, au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \frac{1}{1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + g(t),$$

   avec $g(t) \sim \frac{\sin^2 t}{t}$; on a donc $f(t) - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin^2 t}{t}\cdot$

3. Nous utiliserons les résultats obtenus dans l'exercice 36 de la page 421 (*attention*, les démonstrations de ces résultats hors programme seraient à refaire).

   - L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, d'après l'exercice rappelé.
   - Comme $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est une fonction positive, on déduit de l'équivalent obtenu $g(t) \sim \dfrac{\sin^2 t}{t}$, au voisinage de $+\infty$, que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or $\dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos 2t}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge, en utilisant la même méthode que dans l'exercice rappelé.

On déduit de cette étude que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, puisque f est la somme d'une fonction dont l'intégrale converge et d'une fonction dont l'intégrale diverge.

8.13 1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$.

Notant ℓ cette limite, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell - \ell = 0$.

2. Comme f est positive et décroissante, on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant \frac{x}{2} f(x) \leqslant \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{car} \quad \forall t \in \left[x/2, x\right] \quad f(t) \geqslant f(x).$$

On déduit de la première question que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} f(x)\right) = 0$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x f(x)\right) = 0.$$

Cela signifie que $f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

3. Il suffit de reprendre l'exercice 10 de la page 398, puisqu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n f(n) = n 2^n.$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$. Par suite, la fonction $x \mapsto x f(x)$ n'est pas bornée (en fait la fonction f n'est elle-même pas bornée).

8.14 Comme l'intervalle $[0,1[$ est borné, la fonction constante égale à 1 est de carré intégrable. Soit $x \in [0,1[$; la fonction $f' = 1 \times f'$ est intégrable sur $[x,1[$, comme produit de deux fonctions de carré intégrable et l'on peut écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_x^1 f'\right| \leqslant \left(\int_x^1 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^1 f'^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{1^-} f = 0$, on a $\displaystyle\int_x^1 f' = [f]_x^1 = -f(x)$ et l'on en déduit :

$$\left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{1-x}\sqrt{\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On a, par définition de la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\lim_{x\to 1^-}\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On a ainsi démontré $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

8.15 1. (a) On a :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \mathrm{th}(t) = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\quad\text{donc}\quad \lim_{t\to+\infty}\mathrm{th}(t) = 1.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{th}(t) = 1$, il existe $X > 0$ tel que :

$$\forall t\geqslant X\quad 1-\frac{\varepsilon}{\ln 3}\leqslant \mathrm{th}(t)\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{\ln 3}\cdot$$

Pour $A\geqslant X$, on alors :

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\ln 3}\right)\int_A^{3A}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_A^{3A}\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\left(1+\frac{\varepsilon}{\ln 3}\right)\int_A^{3A}\frac{\mathrm{d}t}{t}\cdot$$

Comme $\int_A^{3A}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(3A)-\ln A = \ln 3$, on a établi :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists X>0\quad\forall A\geqslant X\qquad\left|\int_A^{3A}\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\ln 3\right|\leqslant\varepsilon,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{3A}\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 3$.

2. On a $\mathrm{sh}(x)\sim x$ et $\mathrm{ch}(x)\sim 1$, quand $x\to 0$, donc $\mathrm{th}(x)\sim x$. On en déduit que les fonctions $x\mapsto\frac{\mathrm{th}(x)}{x}$ et $x\mapsto\frac{\mathrm{th}(3x)}{x}$ ont un prolongement continu sur $[0,+\infty[$; un réel $A>0$ étant fixé, on peut donc écrire :

$$\int_0^A\frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A\frac{\mathrm{th}(3x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^A\frac{\mathrm{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variable $x=\frac{t}{3}$ dans l'intégrale $\int_0^A\frac{\mathrm{th}(3x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A\frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{3A}\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_0^A\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_A^{3A}\frac{\mathrm{th}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On déduit alors de la question précédente :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 3,$$

ce qui prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(3x)-\operatorname{th}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 3.$$

8.16 1. Fixons $x>0$. La fonction $f : t\mapsto\sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}$ est continue sur $[0,x[$ et l'on a, au voisinage de x :

$$\sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} = \sqrt{\frac{1+t^2}{x+t}}\frac{1}{\sqrt{x-t}} \sim \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}\frac{1}{\sqrt{x-t}}.$$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $[0,x[$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et donc la convergence de $\displaystyle\int_0^x\sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

2. La fonction $g : t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^2-t^2}}$ est continue sur $[0,x[$ et, de la même façon que dans la première question, on obtient l'équivalent $g(t)\sim\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\dfrac{1}{\sqrt{x-t}}$ et la convergence de $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}$.

Pour tout $x>0$, on a :

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{x\sqrt{1-\left(\frac{t}{x}\right)^2}} = \left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Pour tout $x>0$, on peut écrire :

$$\forall t\in[0,x[\quad 1\leqslant\sqrt{1+t^2}\leqslant\sqrt{1+x^2}.$$

D'où l'encadrement :

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}\leqslant F(x)\leqslant\sqrt{1+x^2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :

$$\forall x>0\quad \frac{\pi}{2}\leqslant F(x)\leqslant\frac{\pi}{2}\sqrt{1+x^2}.$$

Cet encadrement donne $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\pi/2$.

8.17 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Pour conclure, il suffit, d'après le théorème de limite de la dérivée, d'établir l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{0^+} f$ et de $\lim\limits_{0^+} f'$.

- Un développement au voisinage de 0 donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x}{2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - x}{2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\dfrac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{2x\sin(x/2)} \sim \frac{-\frac{x^3}{24}}{x^2} \sim -\frac{x}{24}. \end{aligned}$$

  On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

- On a, pour tout $x \in]0,\pi]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4x^2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

  En procédant comme au dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - 4\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2}{4x^2\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - 4\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)}{4x^2\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{4x^2\sin^2(x/2)} \sim \frac{-\frac{x^4}{24}}{x^4}. \end{aligned}$$

  On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{24}$.

Le prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ de f ainsi obtenu sera encore noté f.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi]$. Comme $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}}$ au voisinage de 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2n+1$.

   Cette fonction a donc un prolongement continu sur $[0,\pi]$, d'où l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)\,t\big)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos\big((n+1)\,t\big)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin\big((n+1)\,t\big)}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, \mathrm{d}t = \pi.$$

3. Une intégration par parties avec $\lambda > 0$ donne :

$$\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,g(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \cos(\lambda x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{|g(b)|+|g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |\cos(\lambda x)\,g'(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{|g(b)|+|g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |g'(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$, puisque le majorant tend vers zéro.

4. • Nous avons établi la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ dans l'exercice 36 de la page 421 (*attention*, la démonstration de ce résultat hors programme serait à refaire).
   • En appliquant à la fonction f de la première question le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Vu la définition de f, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{I_n}{2}\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \frac{2u}{2n+1}$ donne :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$ et l'on peut conclure que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Chapitre 9 : Compléments sur les séries numériques

Compléments sur les séries numériques

9

Le but de ce chapitre est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.
Rappelons qu'une série $\sum u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est **absolument convergente**, ou **converge absolument**, si la série $\sum |u_n|$ converge, et qu'alors cette série converge.

I Comparaison à une série

1 Les théorèmes de comparaison

Rappelons ces importants théorèmes vus en première année.

Théorème 1

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant |v_n|$.

   Alors la convergence *absolue* de la série $\sum v_n$ entraîne la convergence *absolue* de $\sum u_n$.
2. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors la convergence *absolue* de la série $\sum v_n$ entraîne la convergence *absolue* de la série $\sum u_n$.

Remarques

1. On retrouve en particulier le théorème de comparaison énoncé en première année pour les séries à termes réels positifs, séries pour lesquelles convergence absolue et convergence se confondent.
2. Rappelons notamment que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes réels positifs et vérifient $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors la divergence de la série $\sum u_n$ entraîne la divergence de la série $\sum v_n$.
3. Rappelons que si la série $\sum u_n$ à termes réels positifs est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geqslant 0$.

   Si de plus il existe un terme strictement positif, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n > 0$.

Attention Pour le deuxième point du théorème, le caractère *absolu* de la convergence est important, car, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, la convergence de la série $\sum v_n$ n'entraîne pas la convergence de la série $\sum u_n$.
En effet, considérons les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Nous verrons page 468 que la série $\sum v_n$ converge. On a bien sûr $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, mais la série harmonique $\sum u_n$ diverge.

Théorème 2

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes *positifs*. Si $u_n \sim v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarques

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels. Si $\sum v_n$ est à termes positifs et si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et le théorème 2 s'applique.
2. Le théorème s'étend bien sûr au cas des séries à termes négatifs.
3. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$ vérifiant $u_n \sim v_n$; on a alors $|u_n| \sim |v_n|$ et, d'après le théorème 2, la convergence absolue de $\sum u_n$ équivaut à la convergence absolue de $\sum v_n$.

Rappel

1. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. La série géométrique $\sum a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$, converge si, et seulement si, $|a| < 1$.

Point méthode

Pour étudier une série, on commence par examiner si elle converge absolument, auquel cas la convergence est assurée.

Pour cela, on peut comparer la série $\sum u_n$ à une série de référence (série de Riemann, série géométrique).

Remarque On rappelle que pour comparer deux séries, on compare leurs termes généraux et non pas leurs sommes partielles.

p.472 **Exercice 1** Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{\cos(1/n)}{n^2 + \sqrt{n}}$?

Attention Pour le théorème 2 de la page précédente, le fait que les séries soient à termes positifs (ou de signe constant) est essentiel. Nous verrons page 470 un exemple de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n \sim v_n$, l'une des séries convergeant et l'autre divergeant.

Voici un exemple d'utilisation du deuxième point du théorème 1 de la page 462.

Exemple Étudions la série $\sum u_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{\ln n}{n^2}\cdot$
Comme $n^{3/2} u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{3/2} u_n\right) = 0$, par croissances comparées, et donc $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\cdot$
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison, donc converge.

p.472 **Exercice 2** Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin n}{2^n + n|\cos n|}$?

p.472 **Exercice 3** Soit $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En utilisant une comparaison à une série de Riemann, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

p.472 **Exercice 4** Soit $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En utilisant une comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

p.472 **Exercice 5** Soit $\beta \leqslant 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

Lien suite-série

Rappelons qu'on appelle série télescopique une série dont le terme général est de la forme $v_{n+1} - v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Les sommes partielles d'une telle série s'écrivent :

$$\sum_{p=0}^{n} (v_{p+1} - v_p) = \sum_{p=1}^{n+1} v_p - \sum_{p=0}^{n} v_p = v_{n+1} - v_0.$$

On en déduit :

Proposition 3 (Lien suite-série)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{K}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

On a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - v_0$.

Voici un exemple d'utilisation du lien suite-série et des méthodes rappelées précédemment.

Proposition 4 (Formule de Stirling)

On a l'équivalent suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Démonstration (non exigible) page 472

2 Règle de d'Alembert

Lemme 5

Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{C}^*$.

1. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant k.$$

   Alors $\sum u_n$ converge absolument.

2. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1$ pour $n \geqslant n_0$.

   Alors $\sum u_n$ diverge.

Principe de démonstration. On effectue une comparaison à une série géométrique.

Démonstration page 473

Proposition 6 (Règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{C}^*$ telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

1. On se ramène au premier point du lemme 5, en choisissant $k \in]\ell, 1[$.
2. On se ramène au deuxième point du lemme 5. □

Exemple Montrons que $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- Si $z = 0$, le résultat est évident.
- si $z \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{|z^n|}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite strictement positive et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On en déduit que la série est absolument convergente, par application de la règle de d'Alembert.

On montrera, au chapitre 11 (voir page 615) que cela permet de définir rigoureusement la fonction exponentielle complexe, utilisée en première année, en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Attention Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas conclure directement, comme on le verra dans l'exercice suivant.

p.474 **Exercice 6** Déterminer deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, l'une étant convergente, l'autre divergente.

Remarque La règle de d'Alembert utilise une comparaison aux séries géométriques. Elle est donc inefficace pour l'étude des séries à convergence « moins forte ».

p.474 **Exercice 7** Donner la nature, selon $x \in \mathbb{R}$, de la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

II Comparaison à une intégrale

Rappel Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$.

1. On a l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f \leqslant f(n-1).$$

2. On en déduit l'encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{1}^{n+1} f \leqslant \sum_{p=1}^{n} f(p) \leqslant \int_{0}^{n} f.$$

3. Lorsque la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ convergent, on a, par sommation et passage à la limite, l'encadrement des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f.$$

p.474

Exercice 8

1. Soit $\alpha \in]0,1]$. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

2. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}$.

p.476

Exercice 9 Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} f(p).$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. En déduire l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_n - \int_0^n f\right)$.
3. En prenant $f : t \mapsto \frac{1}{t+1}$, justifier l'existence du réel appelé *constante d'Euler* :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n\right).$$

Théorème 7

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue par morceaux, positive et *décroissante* sur $[n_0,+\infty[$.

Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la fonction f est intégrable sur $[n_0,+\infty[$.

Principe de démonstration. Démonstration page 476

On utilise l'encadrement rappelé plus haut :

$$\forall n \geqslant n_0+1 \quad \int_{n_0+1}^{n+1} f \leqslant \sum_{p=n_0+1}^{n} f(p) \leqslant \int_{n_0}^{n} f.$$

L'exercice suivant complète l'étude des séries de termes généraux $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, appelées **séries de Bertrand**, commencée avec les exercices 3, 4 et 5. La nature des séries de Bertrand est hors programme, mais il est bon de retenir la méthode pour les étudier.

p.477

Exercice 10

1. Donner, selon $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.
2. Lorsqu'elle diverge, donner un équivalent simple de ses sommes partielles.
3. Lorsqu'elle converge, donner un équivalent simple de ses restes.

III Étude de séries non absolument convergentes

1 Théorème des séries alternées

Définition 1 (Série alternée)

On dit que la série réelle $\sum u_n$ est **alternée** si la suite $\left((-1)^n\, u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant, c'est-à-dire s'il existe une suite (v_n) positive telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n\, v_n \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^{n+1}\, v_n.$$

Théorème 8 (Théorème des séries alternées)

Une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 est convergente.

De plus :

- sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives,
- le reste $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

En particulier, la somme de la série est du signe de u_0.

Principe de démonstration. Montrer que les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Démonstration page 478

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, d'après le théorème des séries alternées ; en effet, elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît et tend vers zéro. Sa somme sera calculée dans l'exercice 9.12 de la page 484.

Cette série n'est pas absolument convergente, puisque la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Remarque Si une série $\sum u_n$ est alternée de terme général de limite nulle, mais que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne décroît qu'à partir d'un certain rang, on pourra lui appliquer le théorème de convergence ci-dessus, puisque la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Mais on ne pourra écrire les encadrements du théorème que pour des indices n tels que la suite $(u_p)_{p\geqslant n}$ décroît.

p.479

Exercice 11

Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

p.479

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}\cdot$

Quelle est la nature de la série $\sum R_n$? On pourra chercher à majorer $|R_n|$.

Attention Une série alternée ne converge pas nécessairement, même si son terme général tend vers 0. La décroissance de la valeur absolue de son terme général est essentielle.
Montrons par exemple que la série $\sum u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

est divergente. Ses sommes partielles S_n sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\cdot$$

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, alors que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et est à termes positifs ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = -\infty$, ce qui prouve la divergence de la série $\sum u_n$.

2 Utilisation d'un développement asymptotique

Point méthode

Pour étudier une série à termes réels non absolument convergente, on pourra faire (si c'est possible !) un développement asymptotique du terme général, le dernier terme écrit étant :

- ou bien le terme général d'une série absolument convergente,
- ou bien de signe fixe.

Exemples

1. Étudions la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}\cdot$
   - On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^{2/3}}$; d'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge.
   - On pourrait envisager d'utiliser le théorème des séries alternées, mais l'hypothèse de décroissance de la suite $\big(|u_n|\big)$ pose un vrai problème (on peut même établir que cette suite ne décroît à partir d'aucun rang !). On doit donc utiliser une autre méthode.

- Effectuons plutôt un développement de u_n :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^{2/3}}} = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^{n+1}\cos n}{n^{4/3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + v_n.$$
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ converge d'après le théorème des séries alternées (elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$ tend vers 0 en décroissant).
La série $\sum v_n$ converge absolument puisque $|v_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{4/3}}$ converge.
En conclusion, la série $\sum u_n$ converge, comme somme de deux séries convergentes.

2. Étudions, selon $\alpha > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\cdot$

Un développement de u_n donne :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le théorème des séries alternées (elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant).

On a $v_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$; l'équivalent obtenu étant de signe constant, le théorème de comparaison assure que la série $\sum v_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$, donc convergente si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

En conclusion, la série $\sum u_n$, somme d'une série convergente et de la série $\sum v_n$, converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

On notera, sur cet exemple, l'intérêt d'avoir arrêté le développement après obtention d'un terme de signe fixe et la difficulté, selon α, de poursuivre ce développement jusqu'à obtention du terme général d'une série absolument convergente.

Attention À la lumière de l'exemple précédent avec $\alpha = 1/2$, notons deux grosses fautes à éviter dans l'étude des séries à termes quelconques.
Posons $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\cdot$

- On a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, puisqu'elle vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, mais la série $\sum u_n$ diverge.

  Ainsi, dans le *théorème de comparaison*, le fait que l'une des séries soit à *termes réels positifs* ou *absolument convergente* est essentiel.

- On a $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$; la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ décroît mais pas la suite $(|u_n|)$, sinon la série $\sum u_n$ vérifierait les hypothèses du théorème des séries alternées et convergerait, ce qui n'est pas le cas.

  Ainsi, pour l'application à une série $\sum u_n$ du théorème des séries alternées, la décroissance d'une suite équivalente à $(|u_n|)$ ne suffit pas.

p.479 **Exercice 13** Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$?

p.479 **Exercice 14** Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{n} + (-1)^n}}$?

IV Produit de Cauchy de deux séries

Définition 2

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$.

Théorème 9

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes complexes convergent *absolument*, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries converge *absolument* et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

Démonstration (non exigible) page 480

Attention La convergence absolue des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est essentielle, comme le montre l'exercice suivant.

p.481 **Exercice 15** On considère les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

On note $\sum w_n$ leur produit de Cauchy.

1. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ? absolument convergente ?
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in [\![0, n]\!] \quad |u_p v_{n-p}| \geqslant \frac{2}{n+2}.$$

   En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Comme on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \cos\big(1/n\big) = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{n} = \mathrm{o}\left(n^2\right),$$
on peut écrire $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Les séries étant à termes positifs et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit, par comparaison, que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 Notons u_n le terme général de cette série. Par croissances comparées, on a $n = \mathrm{o}\left(2^n\right)$, donc aussi $n\left|\cos n\right| = \mathrm{o}\left(2^n\right)$ et par suite $2^n + n\left|\cos n\right| \sim 2^n$. Comme la suite $(\sin n)$ est bornée, on en déduit $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison, donc converge.

Exercice 3 Notons u_n le terme général de cette série. Soit $\gamma \in \left]1, \alpha\right[$; par croissances comparées, on a :
$$n^{\gamma-\alpha} = \mathrm{o}\big((\ln n)^\beta\big) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est à termes positifs et converge, car $\gamma > 1$. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison, donc converge.

Exercice 4 En notant u_n le terme général de cette série, on a :
$$\forall n \geqslant 2 \quad n\,u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \qquad \text{avec} \qquad 1-\alpha > 0,$$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$, par croissances comparées, c'est-à-dire $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(u_n\right)$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente et les séries étant à termes positifs, on en déduit, par comparaison, la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 5 En notant u_n le terme général de cette série, on a :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{n\,u_n} = (\ln n)^\beta \qquad \text{avec} \qquad \beta \leqslant 0.$$
Dans la suite $\left(\frac{1}{n\,u_n}\right)$ est bornée, c'est-à-dire $\frac{1}{n} = \mathrm{O}\left(u_n\right)$. Les séries étant à termes positifs, on conclut, par comparaison à la série harmonique, que la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 4

- Montrons l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{e^n n!}{\sqrt{n}\,n^n}$. L'existence C équivaut à l'existence dans $\mathbb{R}_+^*$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, c'est-à-dire à l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(a_n\right)$. D'après le lien suites-séries, cela équivaut à la convergence de la série $\sum u_n$, avec :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(a_{n+1}\right) - \ln\left(a_n\right) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e\,(n+1)\,n^n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\cdot$$

Pour étudier la série $\sum u_n$, effectuons un développement de son terme général :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot \end{aligned}$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison aux séries de Riemann. Nous avons ainsi établi l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot$

Une façon plus naturelle d'obtenir la forme de cet équivalent sera vue dans l'exercice 9.18 de la page 486.

- Pour déterminer la constante C, utilisons les intégrales de Wallis définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x.$$

On peut démontrer (voir le livre de première année) les résultats suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)\,!}{2^{2n}\,(n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}\cdot$$

En reprenant l'équivalent $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on obtient :

$$I_{2n} \sim \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}C^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}\cdot$$

L'équivalent $I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\,I_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et finalement $C = \sqrt{2\pi}$, d'où la conclusion.

Lemme 5

1. Posons $v_n = k^n$; comme $k \in \left]0,1\right[$, la série géométrique $\sum k^n$ converge. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant k = \frac{v_{n+1}}{v_n}$, ou encore $\frac{|u_{n+1}|}{v_{n+1}} \leqslant \frac{|u_n|}{v_n}\cdot$

   Ainsi la suite $\left(\frac{|u_n|}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante donc $|u_n| \leqslant \frac{|u_{n_0}|}{v_{n_0}}\,v_n$, pour $n \geqslant n_0$; par suite, la série $\sum u_n$ converge absolument, d'après le théorème de comparaison.

2. La suite $\left(|u_n|\right)_{n\geqslant n_0}$ est alors croissante. On en déduit $|u_n| \geqslant |u_{n_0}| > 0$, pour $n \geqslant n_0$. Par suite, le terme général de la série $\sum u_n$ ne tend pas vers 0 et cette série diverge grossièrement.

Exercice 6 Pour une série de Riemann $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et ceci pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, alors que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge sinon.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$; pour $x \neq 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\,|x| = \frac{n+1}{4n+2}\,|x|.$$

- Pour $|x| < 4$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{4} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Pour $|x| \geqslant 4$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{4n+2}\,|x| \geqslant \frac{4n+4}{4n+2} \geqslant 1.$$

  La suite strictement positive $\left(|u_n|\right)$ étant croissante, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

La convergence pour $x = 0$ étant évidente, on peut conclure que la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge si, et seulement si, $x \in \,]-4, 4[$.

Exercice 8

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)^\alpha}$ étant continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \leqslant \int_0^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha}.$$

   - Pour $\alpha \in \,]0,1[$ et $n \geqslant 2$, on en déduit $u_n \leqslant \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant v_n$, avec :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[(t+1)^{1-\alpha}\right]_1^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[(t+1)^{1-\alpha}\right]_0^{n-1}.$$

     Comme $1-\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1 - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \mathrm{o}\big((n+1)^{1-\alpha}\big) \\ &\sim \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

     On prouve de même $v_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

En divisant l'encadrement initial par $n^{1-\alpha}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

- Pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2 \quad 1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n.$$

Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, majorant et minorant dans l'encadrement précédent sont équivalents à $\ln n$; en divisant l'encadrement initial par $\ln n$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n.$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\forall p \geqslant 2 \quad \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{p^\alpha} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent. Par sommation des encadrements précédents, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geqslant 1 \quad -\frac{1}{\alpha-1} \left[t^{1-\alpha}\right]_{n+1}^{+\infty} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant -\frac{1}{\alpha-1} \left[t^{1-\alpha}\right]_{n}^{+\infty},$$

ou encore :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Dans ce dernier encadrement, majorant et minorant sont équivalents à $\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$; en divisant cet encadrement par $n^{1-\alpha}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Exercice 9

1. La fonction f étant décroissante, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f \leqslant f(n-1) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n).$$

La fonction f, étant décroissante et positive (donc minorée), possède une limite finie en $+\infty$; il en est donc de même de la suite $\big(f(n)\big)$. D'après le lien suites-séries, la série de terme général $f(n-1) - f(n)$ est alors convergente. On en déduit, par comparaison, la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite de ses sommes partielles a une limite finie ; or, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n} u_p = \sum_{p=1}^{n} \left(\int_{p-1}^{p} f \right) - S_n = \int_0^n f - S_n.$$

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(S_n - \displaystyle\int_0^n f \right)$ existe dans $\mathbb{R}$.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t+1}$ vérifie les hypothèses de l'énoncé. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n-1} - \int_0^{n-1} f = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} - \ln n.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} - \ln n \right)$ existe dans $\mathbb{R}$; on en déduit immédiatement l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n \right)$.

Théorème 7 Pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, posons $S_n = \sum\limits_{p=n_0+1}^{n} f(p)$. On a alors :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1 \quad \int_{n_0+1}^{n+1} f \leqslant S_n \leqslant \int_{n_0}^{n} f.$$

- Supposons f intégrable sur $[n_0, +\infty[$ et posons $I = \displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$. Comme f est positive, on a : $\forall n \geqslant n_0 \quad \displaystyle\int_{n_0}^{n} f \leqslant I$.

  Par suite, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ sont majorées ; donc cette série converge.
- Supposons f non intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Comme cette fonction est positive, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_{n_0+1}^{x} f = +\infty$; donc la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. Par suite, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0+1} f(n)$ diverge.

Exercice 10

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. D'après le théorème 7 de la page 467, la série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[2, +\infty[$, c'est-à-dire puisque f est positive, si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si l'on note u la fonction $\ln$, on a $f = u'u^{-\alpha}$; par suite, une primitive de f est $\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln u$ si $\alpha = 1$.
   En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. On suppose la série divergente, c'est-à-dire $\alpha \in]0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $S_n = \sum\limits_{p=2}^{n} \frac{1}{p(\ln p)^\alpha}$.
   Par décroissance de f, on peut écrire :
   $$\forall p \geqslant 3 \quad \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\alpha} \leqslant S_n \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\alpha},$$
   puis, en sommant :
   $$\forall n \geqslant 3 \quad \frac{1}{2\,(\ln 2)^\alpha} + \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\alpha} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\,(\ln 2)^\alpha} + \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\alpha}.$$
   - Pour $\alpha \in]0, 1[$, en utilisant la primitive déjà calculée de f, on obtient :
     $$\forall n \geqslant 3 \quad \frac{1}{2\,(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\left[u^{1-\alpha}\right]_{\ln 3}^{\ln(n+1)} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\,(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\left[u^{1-\alpha}\right]_{\ln 2}^{\ln n}.$$
     Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, majorant et minorant, dans l'encadrement précédent, sont équivalents à $\dfrac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
     En divisant cet encadrement par $(\ln n)^{1-\alpha}$, on obtient :
     $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{(\ln n)^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
   - Pour $\alpha = 1$, on obtient :
     $$\forall n \geqslant 3 \quad \ln\big(\ln(n+1)\big) + C \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) + C', \qquad \text{(E)}$$
     où C et C' sont deux constantes. On a :
     $$\forall n \geqslant 3 \quad \ln\big(\ln(n+1)\big) = \ln\left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(\ln n) + a_n,$$
     où l'on a posé $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\ln n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on en déduit que $\ln\big(\ln(n+1)\big) \sim \ln(\ln n)$. Par suite, dans l'encadrement (E), majorant et minorant sont équivalents à $\ln(\ln n)$. En divisant cet encadrement par $\ln(\ln n)$, on obtient :
     $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln n)} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n \sim \ln(\ln n).$$

3. Par décroissance de f, on peut écrire, pour tout entier $k \geqslant 3$:
$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour $\alpha > 1$, on en déduit, par sommation :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha},$$
c'est-à-dire, en utilisant la primitive déjà calculée de f :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{(\alpha-1)\big(\ln(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.$$
Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, on en déduit que majorant et minorant du dernier encadrement sont équivalents à $\frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}$.

En multipliant cet encadrement par $(\ln n)^{\alpha-1}$, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$
c'est-à-dire :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.$$

Théorème 8 Quitte à changer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer $u_n = (-1)^n v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive.

Les relations :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+2} = S_{2n} + u_{2n+2} + u_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+2} - v_{2n+1}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+3} = S_{2n+1} + u_{2n+3} + u_{2n+2} = S_{2n+1} - v_{2n+3} + v_{2n+2}$$
ainsi que la décroissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraînent que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+2} \leqslant S_{2n} \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3}.$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par ailleurs, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1};$$
donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Cela prouve la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la série $\sum u_n$.

De plus, sa somme S est toujours comprise entre deux termes consécutifs, puisque :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}.$$

Cela donne le schéma suivant, avec par exemple n impair :

u_{n+1}

S_n S S_{n+1}

R_n

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

En particulier, $|R_0| \leqslant |u_1| \leqslant |u_0|$; donc $S = u_0 + R_0$ est du signe de u_0.

Exercice 11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot$

- Pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.
- Pour $\alpha > 0$, la série $\sum u_n$ converge, d'après le théorème des séries alternées : elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant.
- Puisque la série $\sum |u_n|$ est la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, la série $\sum u_n$ converge absolument si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 12

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série alternée et la suite $\left(\dfrac{1}{(n+x)^2}\right)$ est évidemment décroissante de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge et que ses restes vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |R_n| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(n+x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

Cette majoration permet d'affirmer que la série $\sum R_n$ est absolument convergente, par comparaison aux séries de Riemann, donc convergente.

Exercice 13 Un développement de u_n donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

La série $\sum u_n$ est donc la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$, qui converge, d'après le théorème des séries alternées (voir l'exemple de la page 468), et d'une série absolument convergente, par comparaison aux séries de Riemann.

Par suite, la série $\sum u_n$ converge, comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 14 Un développement de u_n donne :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)^{-1/2} &= \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} - \frac{1}{2n^{3/4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} - v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n \sim \frac{1}{2n^{3/4}}\cdot \end{aligned}$$

- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ converge, d'après le théorème des séries alternées (voir l'exercice 11 de la page 468).
- L'équivalent obtenu de v_n étant positif, le théorème de comparaison permet de conclure que la série $\sum v_n$ diverge, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$ diverge.

La série $\sum u_n$ est donc divergente, comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Théorème 9

- Traitons d'abord le cas où les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont à termes réels positifs.

  Notons U_n et V_n les sommes partielles d'ordre n de ces deux séries, U et V leurs sommes et W_n la somme partielle d'ordre n de leur série produit de Cauchy. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} W_n &= \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\sum\limits_{p+q=k} u_p v_q \right) &= \sum\limits_{p+q\leqslant n} u_p v_q. \\ U_n V_n &= \left(\sum\limits_{p=0}^{n} u_p \right) \left(\sum\limits_{q=0}^{n} v_q \right) &= \sum\limits_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_p v_q. \end{cases}$$

  Comme $p+q \leqslant n$ entraîne $(p,q) \in [\![0,n]\!]^2$, on en déduit $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant UV$, car les termes dans les sommes sont positifs.
  Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ sont donc majorées ; par suite, cette série converge et, en faisant tendre n vers l'infini dans la majoration précédente, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n \leqslant UV$.
  Par ailleurs $(p,q) \in [\![0,n]\!]^2$ entraîne $p+q \leqslant 2n$; comme les termes dans les sommes sont positifs, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n V_n \leqslant W_{2n}$$

  puis, en faisant tendre n vers l'infini, $UV \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$. On a donc finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = UV.$$

- Dans le cas général, on peut commencer par remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| = \left| \sum_{p+q=n} u_p v_q \right| \leqslant \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| = w'_n.$$

  La série $\sum w'_n$ converge, d'après le premier cas, puisque c'est la série produit de Cauchy des séries à termes positifs convergentes $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$. Par comparaison, la série $\sum w_n$ converge absolument.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$E_n = \left\{ (p,q) \in [\![0,n]\!]^2 \,\middle|\, p+q \leqslant n \right\} \quad \text{et} \quad F_n = \left\{ (p,q) \in [\![0,n]\!]^2 \,\middle|\, p+q > n \right\}.$$

Les ensembles E_n et F_n sont complémentaires dans $[\![0,n]\!]^2$ et, en conservant les notations introduites au début, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |U_n V_n - W_n| &= \left| \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_p v_q - \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q \right| = \left| \sum_{(p,q)\in F_n} u_p v_q \right| \\ &\leqslant \sum_{(p,q)\in F_n} |u_p v_q| = \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} |u_p v_q| - \sum_{(p,q)\in E_n} |u_p v_q| \\ &= U'_n V'_n - W'_n. \end{aligned}$$

où U'_n et V'_n sont les sommes partielles d'ordre n des séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, et où W'_n est la somme partielle d'ordre n de leur série produit de Cauchy. D'après le premier cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (U'_n V'_n - W'_n) = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n V_n - W_n) = 0$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = UV$.

Exercice 15

1. La série $\sum u_n$ converge, d'après le théorème des séries alternées : elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

   Comme $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, par comparaison aux séries de Riemann.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

   - On a : $\forall p \in [\![0,n]\!] \quad |u_p v_{n-p}| = \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$.

     La fonction $f : t \mapsto (t+1)(n-t+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

     $$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = (n-t+1) - (t+1) = n - 2t.$$

     L'étude du signe de f' étant immédiate, la fonction f atteint un maximum global en $t = n/2$. On en déduit :

     $$\forall p \in [\![0,n]\!] \quad |u_p v_{n-p}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{f\left(\frac{n}{2}\right)}} = \frac{2}{n+2}.$$

   - On a : $w_n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p |u_p| (-1)^{n-p} |u_{n-p}| = (-1)^n \sum\limits_{p=0}^{n} |u_p u_{n-p}|$.

     On déduit alors du point précédent :

     $$|w_n| = \sum_{p=0}^{n} |u_p u_{n-p}| \geqslant \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1.$$

   La série $\sum w_n$ diverge grossièrement, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

S'entraîner et approfondir

9.1 Nature des séries $\sum u_n$, avec :

1. $u_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4}$;
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2 - k^2}$;
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\, e^{-u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$;
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}$, selon $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

9.2 Nature des séries $\sum u_n$, avec :

1. $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$;
2. $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} - (\operatorname{Arctan} n)^{\alpha}$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$;
4. $u_n = \frac{a_n - 1}{n}$, où $a_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n}$;
5. $u_n = \dfrac{1}{q_n\, n^{\alpha}}$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, où q_n désigne le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.
   On pourra encadrer tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par deux puissances de 10 consécutives.

9.3 Nature des séries $\sum u_n$, avec :

1. $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right) - \frac{\pi}{6}$, selon le réel $\alpha > 0$;
2. $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$;
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha} + (-1)^n\, n^{\beta}}$, selon les réels $\alpha \neq \beta$;
4. $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{t^{\alpha}}\, \mathrm{d}t$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.4 Le but de cet exercice est de déterminer la nature, selon $a > 0$ et $\alpha > 0$, de la série $\sum u_n$, avec $u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}}$.

1. Donner la nature de la série $\sum u_n$, en supposant $\alpha > 1$.
2. En utilisant l'exercice 9 de la page 467, conclure lorsqu'on suppose $\alpha = 1$.
3. En utilisant l'exercice 8 de la page 467, conclure lorsqu'on suppose $\alpha < 1$.

9.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(\ln n)}{n}\cdot$

1. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$, avec $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

9.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, k!$.

1. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+1)} + v_n \qquad \text{avec} \qquad |v_n| \leqslant \frac{n-2}{n\,(n-1)\,(n+1)}\cdot$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

9.7 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$ pour la fonction exponentielle sur le segment $[0,1]$.

2. En déduire l'existence d'une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers telle que :

$$e\,n! = N_n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$$

3. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(2\pi e n!)}{n^\alpha}$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$?

9.8 Donner la nature et, en cas de convergence, la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, avec :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n\,(n+3)}\right)\cdot$$

9.9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}$.

1. Pour quels $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Calculer alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

9.10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$x_{n+1} = x_n\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $x_n \sim C n^\alpha$.

9.11 Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1.$$

On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer l'existence dans $\mathbb{C}$ de $\lim_{n \to +\infty} P_n$:

1. dans le cas où $u_n \in \mathbb{R}$, en passant au logarithme ;
2. dans le cas général, en utilisant la série $\sum (P_{n+1} - P_n)$.

9.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}\cdot$

1. Montrer que la suite (s_n) converge.
2. En utilisant l'égalité $\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p \mathrm{d}t$, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n - \ln 2| \leqslant \frac{1}{n+2}\cdot$$
Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot$
4. Déduire de la question précédente la convergence et la somme de la série :
$$\sum \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right)\cdot$$

9.13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot$

1. En utilisant l'égalité $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t$, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$
3. Montrer que, quand $t \to 0$:
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = 1 + 2t + \mathrm{O}\left(t^2\right).$$
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \ln\big(\tan(\alpha_n)\big)$?

9.14 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \geqslant 3$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \frac{P_{n+1}}{P_n}\right).$$

1. Quelle est la nature, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de la série $\sum u_n$?
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(n^{\alpha} P_n)$ ait une limite dans $\mathbb{R}_+^*$.

9.15 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0^+} h \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

9.16 1. Soit $A > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + A \sin^2 t}$, à l'aide du changement de variable $u \mapsto \operatorname{Arctan} u$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^6 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série $\sum v_n$, avec $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1 + t^6 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\,\pi}{1 + n^6 \pi^6 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^6 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

9.17 Soit x un réel tel que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Le but de l'exercice est d'établir la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$.

On définit la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$s_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \sum_{p=1}^{n} \cos(px).$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos(px)}{p} = \frac{s_n}{n} + \sum_{p=1}^{n-1} s_p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$

3. Conclure.

9.18 Dans le but d'obtenir la forme d'un équivalent simple de $n!$, on cherche des approximations de $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ à l'aide d'intégrales.

1. La méthode des rectangles mène à prendre $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln t \,\mathrm{d}t$ comme approximation de $\ln n$.

   Montrer que la série de terme général $\ln n - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln t \,\mathrm{d}t$ diverge.

   La divergence de la série précédente ne permet pas d'obtenir directement la forme d'un équivalent simple de $n!$.

   On cherche donc à améliorer cette méthode.

2. La méthode du point médian mène à prendre $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t$ comme approximation de $\ln n$.

   (a) Montrer que $\ln n = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   (b) En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

9.19 Convergence commutative des séries absolument convergentes

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Soit $\sum u_n$ une série *absolument convergente* et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Alors la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

1. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   (a) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

   $$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{p} u_{\sigma(n)} \leqslant S.$$

   (b) En déduire que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

   (c) Établir l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels absolument convergente.
   (a) On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

   $$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}\cdot$$

   Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant x^+ \leqslant |x| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x^- \leqslant |x|\,.$$

   (b) Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
   (c) Démontrer le résultat annoncé, pour les séries à termes réels.
3. Démontrer le résultat annoncé, pour les séries à termes complexes.

Remarque
Le résultat établi dans cet exercice sera utile dans les chapitres de probabilité.

Solution des exercices

9.1 1. Notons $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction Arcsin. Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, le terme général de la série est défini à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n_0} \leqslant 1$ et l'on a :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot$$

Comme la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, donc en $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut écrire :

$$u_n = \frac{1}{n}\,f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{n}\cdot$$

L'équivalent obtenu étant positif, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\![1,n]\!] \quad (n+k)^2 - k^2 = n^2 + 2kn \leqslant n^2 + 2n^2 = 3n^2,$$

et par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}\cdot$$

Les séries étant à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

3. On a $u_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$ et donc :

$$\forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,e^{-u_n} \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}\cdot$

La série $\sum u_n$, à termes positifs pour $n \geqslant 1$, est donc divergente, par comparaison aux séries de Riemann.

4. Effectuons un développement limité du terme général de la série :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - n\left(1+\frac{b}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n\left(1+\frac{a}{3n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1+\frac{b}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{2a-3b}{6n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot \end{aligned}$$

- Si $2a-3b \neq 0$, on a $u_n \sim \dfrac{2a-3b}{6n}$ et, comme l'équivalent obtenu est de signe constant, les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{2a-3b}{6n}$ sont de même nature. On en déduit que $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

- Si $2a - 3b = 0$, on a $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; on en déduit la convergence absolue de la série $\sum u_n$, par comparaison aux séries de Riemann et donc la convergence de la série $\sum u_n$.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $2a - 3b = 0$.

9.2 1. Effectuons un développement de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right)\right) - \exp(-1/6) \\ &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) - \exp(-1/6) \\ &= \exp\left(n^2 \left(-\frac{1}{6n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) - \exp(-1/6) \\ &= \exp(-1/6)\left(\exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right) \\ &= \exp(-1/6)\,\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \end{aligned}$$

Comme $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison aux séries de Riemann, donc converge.

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{n}\right)} = n.$$

Comme $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$, on en déduit $\operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$, d'où $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot$

Pour $\alpha = 0$, la série $\sum u_n$ est la série nulle, donc converge.

Pour $\alpha \neq 0$, cherchons un équivalent de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}\right)^\alpha\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{2\alpha}{\pi n} \cdot \end{aligned}$$

L'équivalent obtenu étant de signe constant (celui de α), cela prouve que la série $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

3. Le terme général est défini et strictement positif pour $n \geqslant 3$.

Comme on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$, on peut écrire :

$$\ln u_n = \sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right) \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \quad \text{d'où} \quad \frac{\ln n}{\ln u_n} \sim -\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \cdot$$

Par croissances comparées, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln u_n} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln n = \mathrm{o}\left(\ln u_n\right).$$

Par suite :

$$\ln\left(n^2 u_n\right) = 2\ln n + \ln\left(u_n\right) \sim \ln\left(u_n\right) \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right) = -\infty$, d'où l'on déduit, en prenant l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 u_n\right) = 0$ et donc $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n > 0$ et :

$$\begin{aligned}\ln a_n &= n \ln\left(\frac{\ln\left(n+1\right)}{\ln n}\right)\\ &= n\ln\left(\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\\ &= n\ln\left(1+\alpha_n\right) \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\cdot\end{aligned}$$

De $\alpha_n \sim \frac{1}{n\ln n}$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, puis que $\ln\left(1+\alpha_n\right) \sim \alpha_n$. On a donc $\ln a_n \sim \frac{1}{\ln n}$; comme $a_n = e^{\ln a_n}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, puis :

$$\ln a_n \sim a_n - 1 \sim \frac{1}{\ln n} \quad \text{d'où} \quad u_n \sim \frac{1}{n\ln n}\cdot$$

La *série de Bertrand* $\sum \frac{1}{n\ln n}$ étant divergente (*attention*, ce résultat hors programme, établi dans l'exercice 5 de la page 464, doit être redémontré), la série $\sum u_n$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$10^{q_n - 1} \leqslant n < 10^{q_n}.$$

On en déduit :

$$q_n - 1 \leqslant \frac{\ln n}{\ln 10} < q_n \quad \text{donc} \quad q_n \sim \frac{\ln n}{\ln 10}\cdot$$

Par suite, si $u_n = \frac{1}{q_n n^\alpha}$, la série $\sum u_n$ à termes positifs vérifie $u_n \sim \frac{\ln 10}{n^\alpha \ln n}\cdot$

En utilisant le résultat établi dans les exercices 5 et 10 sur les *séries de Bertrand* (attention, ce résultat hors programme doit être redémontré), on peut conclure, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

9.3 1. La fonction $f : t \mapsto \operatorname{Arccos}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et l'on a :

$$\forall t \in \left]-1,1\right[\quad f'\left(t\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad f''\left(t\right) = -\frac{t}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

La formule de Taylor-Young permet d'écrire le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+t\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t+f''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}\left(t^2\right)$$
$$=\frac{\pi}{6}-2t-2\sqrt{3}\,t^2+\mathrm{o}\left(t^2\right).$$

On en déduit le développement suivant :

$$u_n=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n^\alpha}+v_n \quad \text{avec} \quad v_n\sim-\frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}\cdot$$

- La série alternée $\sum\frac{2(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 ; elle est donc convergente.
- De l'équivalent $v_n\sim-\frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}$ on déduit que $\sum v_n$ est de même nature que la série $\sum\left(-\frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}\right)$, puisque cette dernière série est à termes négatifs. Par suite, la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha>1$.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>\frac{1}{2}\cdot$

2. Un développement du terme général (défini pour $n\geqslant 2$) donne :

$$u_n=\cos\left(-\pi n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$=\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\pi}{3n}+v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente. La série alternée $\sum\left(-1\right)^{n+1}\frac{\pi}{3n}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 ; elle est donc convergente.

En conclusion, la série $\sum u_n$, somme de deux séries convergentes, est convergente.

3. Le terme général est défini pour $n\geqslant 2$. Distinguons deux cas, selon α et β.

- Pour $\beta>\alpha$, on a $u_n=\frac{1}{n^\beta+(-1)^n n^\alpha}>0$. Comme $u_n\sim\frac{1}{n^\beta}$, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\beta>1$, par comparaison aux séries de Riemann.
- Pour $\beta<\alpha$, un développement de u_n donne :

$$u_n=\frac{\left(-1\right)^n}{n^\alpha}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\beta}}}=\frac{\left(-1\right)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right)\cdot$$

  * Pour $\alpha\leqslant 0$, comme $u_n\sim\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, le terme général de la série $\sum u_n$ ne tend pas vers 0 ; par suite, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$*$ Pour $\alpha > 0$, on peut écrire $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n$ avec $v_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\cdot$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 ; elle est donc convergente.

La série $\sum u_n$, somme de la série convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et de la série $\sum v_n$, est de même nature que la série $\sum v_n$.

De l'équivalent $v_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}$ on déduit que $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \left(-\dfrac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right)$, puisque cette dernière série est à termes négatifs. On en déduit que la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha - \beta > 1$.

En conclusion, voici les cas de convergence :

- $\beta > \alpha$ et $\beta > 1$,
- $\beta < \alpha$ et $2\alpha - \beta > 1$.

4. Pour $n \geqslant 1$, le changement de variable $t = u + n\pi$ donne, par π-périodicité de la fonction tan :

$$|u_n| = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{(u+n\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}u.$$

- Pour $\alpha \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n| \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{\pi^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, puisque son terme général ne tend pas vers 0.
- Pour $\alpha > 0$, la série $\sum u_n$ est alternée, la suite $\big(|u_n|\big)$ tend vers 0, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(n\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4\,(n\pi)^\alpha},$$

et la suite $\big(|u_n|\big)$ décroît, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_{n+1}| = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{(u+n\pi+\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{(u+n\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}u = |u_n|\,.$$

La série $\sum u_n$ et donc convergente, d'après le théorème des séries alternées.

9.4 1. L'hypothèse $\alpha > 1$ assure la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; si l'on pose $\ell = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

La série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

2. En utilisant l'exercice 9 de la page 467 (*attention* ce résultat hors programme devrait être redémontré), on obtient :

$$u_n = a^{\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)} \sim C\,a^{\ln n} = C\,n^{\ln a} \quad \text{avec} \quad C = a^\gamma > 0.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$, c'est-à-dire $a < \frac{1}{e}\cdot$

3. - Pour $a \geqslant 1$, on a : $\forall n \geqslant 1 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant 1$ donc $u_n \geqslant a$.

   La série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

- On déduit de l'exercice 8 de la page 467 (*attention* ce résultat hors programme serait à redémontrer) $\ln n = \mathrm{o}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)\cdot$

  Pour $a < 1$, on a donc :

$$\ln\left(n^2 u_n\right) = 2\ln n + \ln a\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \sim \ln a\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$$

  Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(n^2 u_n\right) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 u_n\right) = 0$.

  Comme $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum u_n$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

9.5 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{\cos\big(\ln(2n-1)\big)}{2n-1} + \frac{\cos\big(\ln(2n)\big)}{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos\big(\ln(2n)\big) + \frac{\cos\big(\ln(2n-1)\big) - \cos\big(\ln(2n)\big)}{2n-1}\cdot \end{aligned}$$

La fonction cos est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est dérivable et que sa dérivée (égale à $-\sin$) est majorée en valeur absolue par 1. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |v_n| &\leqslant \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right| + \frac{\big|\ln(2n-1) - \ln(2n)\big|}{2n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)}{2n-1}\cdot \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2n(2n-1)} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)}{2n-1} \sim \frac{1}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$, on a $|v_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum v_n$, par comparaison aux séries de Riemann, donc sa convergence.

2. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

   On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} = \sum_{p=1}^{n} v_p$. Si l'on pose $S = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p$, on a, d'après la première question, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$; de $|u_{2n+1}| \leqslant \frac{1}{2n+1}$ on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S.$$

   Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant toutes deux la même limite finie S, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$ (vers S) et que, par suite, la série $\sum u_n$ converge.

9.6 1. Pour $n \geqslant 3$, on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+1)} + v_n$, avec $v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-2} (-1)^k\, k!}{(n+1)!}$, d'où :

$$|v_n| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2} k!}{(n+1)!} \leqslant \frac{(n-2)\,(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{n-2}{n\,(n-1)\,(n+1)}\cdot$$

2. On déduit de la première question que :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + w_n \qquad \text{avec} \qquad w_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 ; elle est donc convergente.

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

En conclusion, la série $\sum u_n$, somme de deux séries convergentes, est convergente.

9.7 1. La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$ sur le segment $[0,1]$, ce qui donne :

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^t \,\mathrm{d}t.$$

2. On en déduit :

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^t \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{e}{(n+2)!}\cdot$$

Posons $N_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$; N_n est un entier et l'on peut écrire :

$$\left| e\, n! - N_n - \frac{1}{n+1} \right| \leqslant \frac{e}{(n+2)\,(n+1)}\cdot$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, il vient :

$$e\, n! = N_n + \frac{1}{n+1} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big) = N_n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot$$

3. Posons $u_n = \frac{\sin(2\pi e n!)}{n^\alpha}$; le développement précédent permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(2\pi N_n + \frac{2\pi}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{2\pi}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) && \text{par } 2\pi\text{-périodicité de la fonction sin} \\ &= \frac{2\pi}{n^{\alpha+1}} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big) && \text{c'est-à-dire } u_n \sim \frac{2\pi}{n^{\alpha+1}}\cdot \end{aligned}$$

Comme l'équivalent obtenu est positif, on en déduit, par comparaison aux séries de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

9.8 Réécrivons le terme général, de façon à obtenir un télescopage :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n &= \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n\,(n+3)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{n\,(n+3)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right).\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \ln 3 - \ln\left(\frac{N+3}{N+1}\right).$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{N+3}{N+1} = 1$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \ln 3$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum u_n$, ainsi que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 3$.

9.9 1. Un développement de u_n donne :

$$\begin{aligned}u_n &= \sqrt{n}\left(1 + \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + \beta\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(1 + \alpha + \frac{\alpha}{2n} + \beta + \frac{\beta}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (\alpha+\beta+1)\sqrt{n} + \frac{\alpha+2\beta}{2\sqrt{n}} + v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

- Pour $\alpha+\beta+1 \neq 0$, on a $u_n \sim (\alpha+\beta+1)\sqrt{n}$. Le terme général de la série $\sum u_n$ ne tendant pas vers 0, la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha+\beta+1 = 0$ et $\alpha+2\beta \neq 0$, on a $u_n \sim \frac{\alpha+2\beta}{2\sqrt{n}}$.
  Comme l'équivalent obtenu est de signe constant, on en déduit, par comparaison aux séries de Riemann, que la série $\sum u_n$ diverge.
- Pour $\alpha+\beta+1 = 0$ et $\alpha+2\beta = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -2$ et $\beta = 1$, on a $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$; la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente, par comparaison aux séries de Riemann.

2. Dans ce dernier cas, on a $u_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)$. On reconnaît dans les sommes partielles une somme télescopique et l'on peut écrire, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = -1 - \left(\sqrt{N+1} - \sqrt{N+2}\right) = -1 + \frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2}}.$$

On en déduit, en faisant tendre N vers l'infini, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

Remarque Il est possible de conclure, sans utiliser le télescopage précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} u_p &= \sum_{p=0}^{n} \sqrt{p} - 2\sum_{p=1}^{n+1} \sqrt{p} + \sum_{p=2}^{n+2} \sqrt{p}\\ &= 1 - 2 - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\\ &= -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\\ &= -1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu.

9.10 Posons $v_n = \dfrac{x_n}{n^\alpha}\cdot$

Il s'agit de prouver que la suite (v_n) a une limite finie strictement positive, ou encore que la suite $(\ln v_n)$ a une limite finie. Cela équivaut, d'après le lien suites-séries, à la convergence de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.

Un développement de u_n donne :

$$\begin{aligned}u_n &= \ln\left(\frac{x_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{x_n}{n^\alpha}\right)\\ &= \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right)\\ &= \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) - \alpha\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot\end{aligned}$$

On en déduit, par comparaison aux séries de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge ; d'où la conclusion.

9.11 1. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut former $\ln(P_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum \ln(1+u_n)$. Comme la série $\sum u_n$ converge absolument, son terme général tend vers 0 et l'on peut écrire $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

On en déduit, par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum \ln(1+u_n)$, donc sa convergence.

La suite $\big(\ln(P_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une limite $\ell \in \mathbb{R}$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^\ell.$$

2. D'après le lien suites-séries, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite si, et seulement si, la série $\sum (P_{n+1} - P_n)$ converge.

On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|P_{n+1} - P_n\right| = \left|P_n\right| \left|(1+u_{n+1}) - 1\right| = \left|P_n\right| \left|u_{n+1}\right|.$$

On a, par ailleurs :

$$|P_n| = \left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\bigl(1+|u_k|\bigr) = Q_n.$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie, d'après la première question; notons Q cette limite. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |P_{n+1} - P_n| \leqslant Q\,|u_{n+1}|\,.$$

Par suite, la série $\sum (P_{n+1} - P_n)$ converge absolument, par comparaison, donc converge, d'où la conclusion.

9.12 1. Il s'agit de montrer la convergence de la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, ce qui est une conséquence du théorème des séries alternées puisque la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ décroît et tend vers zéro.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{p=0}^{n}\left(\int_0^1 (-t)^p\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n}(-t)^p\right)\mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le calcul précédent est justifié, car, pour $t \in [0,1]$, la suite géométrique $\bigl((-t)^n\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour raison $-t \neq 1$.

3. On déduit de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n - \ln 2| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ln 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, par changement d'indice, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$; on a donc établi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{p=1}^{2N+2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}.$$

On déduit donc de la question précédente que la série $\sum\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right)$ converge et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \ln 2$.

9.13 1. Comme $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t$, pour $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k \right) \mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \\ &= \Big[\operatorname{Arctan} t \Big]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3} \cdot$$

On en déduit, en particulier, $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$

3. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, d'après la formule de Taylor-Young. Comme la dérivée de la fonction tan évaluée en $\frac{\pi}{4}$ vaut $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$, on en déduit :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \tan\frac{\pi}{4} + 2t + \mathrm{O}\left(t^2\right) = 1 + 2t + \mathrm{O}\left(t^2\right) \qquad \text{lorsque } t \to 0.$$

4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on peut écrire, en utilisant la question précédente et le développement limité de la fonction ln au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} u_n = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^n a_n\right) &= \ln\Big(1 + 2(-1)^n a_n + \mathrm{O}\left(a_n^2\right)\Big) \\ &= 2(-1)^n a_n + \mathrm{O}\left(a_n^2\right) = 2(-1)^n a_n + v_n, \end{aligned}$$

avec $v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, car $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Par suite, la série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum (-1)^n a_n$. Cette dernière série est alternée, puisqu'on a $a_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\left(t^2 - 1\right) \mathrm{d}t \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (a_n) est décroissante.
- On a déjà établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, puisque $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$

La série $\sum (-1)^n a_n$, vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées, est donc convergente.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge.

9.14 1. Un développement de u_n donne :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right) + \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2\alpha-1}{2n} + v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 ; elle est donc convergente.

- Pour $\alpha = 1/2$, la série $\sum u_n$, somme de deux séries convergentes, converge.
- Pour $\alpha \neq 1/2$, la série $\sum \frac{2\alpha-1}{2n}$ diverge car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La série $\sum u_n$ diverge, car c'est la somme de deux séries convergentes et d'une série divergente.

2. Posons $x_n = \ln(n^\alpha P_n)$. La suite $(n^\alpha P_n)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, la suite (x_n) a une limite dans $\mathbb{R}$. Cela équivaut à la convergence de la série $\sum (x_{n+1}-x_n)$ c'est-à-dire de la série $\sum \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$.

On peut conclure, d'après la première question, que la suite $(n^\alpha P_n)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, $\alpha = 1/2$.

Remarque On a ainsi obtenu la forme d'un équivalent simple de P_n. En effet, en notant C la limite obtenue à la deuxième question, on a établi :

$$\prod_{k=2}^{n-1}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

9.15 1. Fixons $h>0$. Comme f est décroissante, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$hf(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant pour $n \in [\![1,N]\!]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} hf(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} hf(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La série à termes positifs $\sum hf(nh)$ est donc convergente, puisque ses sommes partielles sont majorées

2. Fixons $h > 0$. Comme f est décroissante, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hf(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant pour $n \in [\![1, N]\!]$, on obtient :

$$\int_{h}^{(N+1)h} f(t)\,\mathrm{d} \leqslant \sum_{n=1}^{N} hf(nh) \leqslant \int_{0}^{Nh} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\forall h > 0 \quad \int_{h}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh) \leqslant \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $h \mapsto \displaystyle\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme primitive de la fonction continue f.

On a donc, en particulier, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Comme $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut donc conclure que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

9.16 1. Notons $f : t \mapsto \frac{1}{1+A\sin^2 t}$ et $\varphi : u \mapsto \operatorname{Arctan} u$. La fonction φ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On sait qu'alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\circ\varphi(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et qu'on a l'égalité :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f\circ\varphi(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+A\sin^2 t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(1+A\,\frac{u^2}{1+u^2}\right)}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(A+1)\,u^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{A+1}}\left[\operatorname{Arctan}\left(u\sqrt{A+1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{A+1}}.\end{aligned}$$

2. • Supposons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ convergente. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \sum_{p=0}^{n} v_p=\sum_{p=0}^{n}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Par définition de la convergence d'une intégrale et par composition de limites, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n} v_p=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve la convergence de la série $\sum v_n$.

• Supposons la série $\sum v_n$ convergente et notons $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$. Pour tout $x\geqslant 0$, en notant n un entier naturel tel que $(n+1)\pi\geqslant x$, on a, la fonction à intégrer étant positive :

$$\int_0^{x}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{n} v_p\leqslant S.$$

Par suite, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^{x}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ est majorée ; la fonction intégrée étant positive, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. • La majoration demandée se déduit directement des inégalités :

$$\forall t\in[n\pi,(n+1)\pi]\quad t\leqslant(n+1)\pi\quad\text{et}\quad t^6\geqslant n^6\pi^6.$$

• La fonction $t\mapsto\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\pi^6\sin^2 t}$ étant de période π, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\pi^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\pi^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

On déduit de la première question :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\pi^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{n^6\pi^6+1}}\cdot$$

Comme $\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{n^6\pi^6+1}}\sim\frac{1}{\pi n^2}$, on déduit du point précédent que $v_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; par suite, la série $\sum v_n$ converge absolument, par comparaison aux séries de Riemann, donc converge.

D'après la deuxième question, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ converge.

9.17 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$s_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\,\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right)$$
$$= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\,\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}\right)$$
$$= \operatorname{Re}\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\,\frac{2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |s_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|},$$

ce qui prouve que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; comme $s_0 = 0$, on peut écrire :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos(px)}{p} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\left(s_p - s_{p-1}\right) = \sum_{p=1}^{n}\frac{s_p}{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{s_{p-1}}{p}$$
$$= \sum_{p=1}^{n}\frac{s_p}{p} - \sum_{p=0}^{n-1}\frac{s_p}{p+1}$$
$$= \frac{s_n}{n} + \sum_{p=1}^{n-1} s_p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$

3. Comme la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n} = 0$. D'après la question précédente, la convergence de la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ équivaut à celle de la série $\sum s_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

Si l'on note $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$, qui existe, car $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|s_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

La série $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge, puisque, par télescopage :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1},$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Par suite, la série $\sum s_n \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ converge absolument, par comparaison, donc converge. En conclusion, la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ converge.

9.18 1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons $u_n = \ln n - \int_{n-1}^{n} \ln t \,\mathrm{d}t$. On a :

$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n = \ln n - \big[t \ln t - t\big]_{n-1}^{n} = (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1.$$

Effectuons un développement :

$$\begin{aligned} u_n &= (n-1)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

L'équivalent obtenu étant positif, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t &= \big[t \ln t - t\big]_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= \ln n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - 1. \end{aligned}$$

Effectuons un développement :

$$\begin{aligned} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t &= \ln n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\quad - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \ln n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \\ &= \ln n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

C'est le résultat annoncé.

(b) Par sommation, on obtient, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\ln(n!) = \sum_{p=1}^{n} \ln p = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{n} u_p \qquad \text{avec} \qquad u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. En notant $S = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} u_p$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \big[t\ln t - t\big]_{\frac12}^{n+\frac12} + S + \mathrm{o}(1) \\
&= \left(n+\frac12\right)\ln\left(n+\frac12\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + S + \mathrm{o}(1) \\
&= \left(n+\frac12\right)\ln n - n + \left(n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{\ln 2}{2} + S + \mathrm{o}(1) \\
&= \left(n+\frac12\right)\ln n - n + \frac12 + \frac{\ln 2}{2} + S + \mathrm{o}(1).
\end{aligned}$$

En notant $C = e^{\frac12 + \frac{\ln 2}{2} + S}$, on en déduit :

$$n! = Ce^{\left(n+\frac12\right)\ln n - n + \mathrm{o}(1)} = C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\mathrm{o}(1)},$$

c'est-à-dire $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, d'où la conclusion.

Remarque De la même manière que pour la proposition 4 de la page 465, on peut établir, à l'aide des intégrales de Wallis, que $C = \sqrt{2\pi}$.

9.19 1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$; notons $N = \max\Big\{\sigma(n)\ ;\ n \in [\![0,p]\!]\Big\}$. Comme la série $\sum u_n$ est à termes positifs, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{p} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant S,$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

(b) La série à termes positifs $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, puisque ses sommes partielles sont majorées. Dans l'inégalité $\sum\limits_{n=0}^{p} u_{\sigma(n)} \leqslant S$, valable pour tout $p \in \mathbb{N}$, faisons tendre p vers $+\infty$; il vient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(c) Le résultat établi à la question précédente est valable pour toute série convergente à termes positifs et toute bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En l'appliquant à la série $\sum u_{\sigma(n)}$ et à la bijection σ^{-1}, on obtient l'inégalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

On a donc établi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

2. (a) Ces encadrements se déduisent immédiatement des encadrements suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{et} \quad -|x| \leqslant -x \leqslant |x|$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|.$$

Les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent, par comparaison à la série convergente $\sum |u_n|$.

(c) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. D'après la première question (cas des séries à termes positifs), les séries $\sum u^+_{\sigma(n)}$ et $\sum u^-_{\sigma(n)}$ convergent et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^+_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^+_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_n. \qquad (*)$$

De la convergence des séries $\sum u^+_{\sigma(n)}$ et $\sum u^-_{\sigma(n)}$, on déduit, par linéarité, la convergence de la série $\sum \left(u^+_{\sigma(n)} + u^-_{\sigma(n)}\right)$, c'est-à-dire la convergence absolue de $\sum u_{\sigma(n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u^+_{\sigma(n)} - u^-_{\sigma(n)} = u_{\sigma(n)} \quad \text{et} \quad u^+_n - u^-_n = u_n. \qquad (**)$$

Les égalités $(*)$ et $(**)$ donnent alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\operatorname{Re}(u_n)\right| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad \left|\operatorname{Im}(u_n)\right| \leqslant |u_n|$$

On en déduit, par comparaison, la convergence absolue des séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$. D'après la question précédente, les deux séries $\sum \operatorname{Re}\left(u_{\sigma(n)}\right)$ et $\sum \operatorname{Im}\left(u_{\sigma(n)}\right)$ convergent absolument et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(u_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(u_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n). \qquad (***)$$

- De la première question appliquée à la série $\sum |u_n|$, on déduit la convergence absolue de $\sum u_{\sigma(n)}$. En utilisant les égalités $(***)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(u_{\sigma(n)}\right) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(u_{\sigma(n)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \end{aligned}$$

Attention Si l'on suppose la série $\sum u_n$ convergente, mais non absolument convergente, il peut arriver, pour certaines bijections σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$:

- que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge,
- ou bien que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, mais que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions

Suites et séries de fonctions

10

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Ce chapitre est consacré aux suites et séries de fonctions, c'est-à-dire aux suites et séries à valeurs dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

I Modes de convergence des suites de fonctions

Au chapitre 5 nous avons défini la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé. En ce qui concerne les suites de fonctions, il existe plusieurs manières « naturelles » de définir la convergence. Ces modes de convergence ne sont pas en général définis directement en termes de normes et sont fondamentalement différents entre eux.
Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Convergence simple

Définition 1

- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers f** si, pour tout $x \in I$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** s'il existe une fonction f telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Remarques

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement si, et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur $J \subset I$** si la suite $\big(f_{n|_J}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
- Il est clair qu'il y a unicité de la limite simple.

p.533

Exercice 1 Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^n. \end{array}$$

p.533

Exercice 2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[\ ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Tracer le graphe de f_n et étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarques

- Certaines propriétés algébriques « passent à la limite simple ».
  Par exemple si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, alors la suite $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f+g$ et la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg.

- Beaucoup de propriétés analytiques ne passent pas « à la limite simple ». Par exemple, comme le montre les exercices précédents,

  * si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, celle-ci n'est pas nécessairement continue ;
  * si une suite de fonctions bornées converge simplement vers une fonction f, celle-ci n'est pas nécessairement bornée.

- Certaines propriétés liées à l'ordre passent « à la limite simple ». L'exercice suivant en donne un exemple.

p.533

Exercice 3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes définies sur I qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que la fonction f est croissante.

Attention La notion de convergence simple n'est pas stable par composition par une fonction continue. Par exemple, si f_n est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{n}$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1/x$, il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, alors que la suite $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement.

2 Convergence uniforme

Définitions, premiers exemples

Dire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f signifie :

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Il faut bien garder en mémoire que le « n_0 » dépend non seulement de ε, mais également de x. Lorsque l'on peut choisir n_0 indépendamment de x, on parle de convergence uniforme.

Définition 2

- Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers f** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in I \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

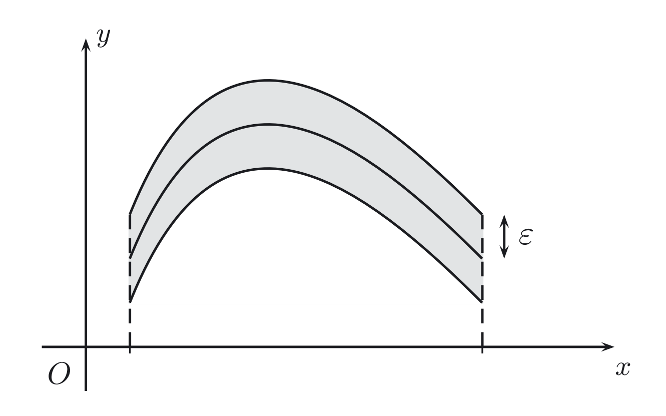
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** s'il existe une fonction f telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Remarques

- Comme on le voit, la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme tient à l'ordre des quantificateurs. Cette différence est capitale.
- Il est facile de vérifier que s'il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
  * pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $\forall x \in I \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \alpha_n$,
  * la suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0,

  alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
  Bien entendu, la conclusion subsiste si l'on se restreint au cas où la propriété « $\forall x \in I \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \alpha_n$ » n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur $J \subset I$** si la suite $\left(f_{n|_J}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

On peut associer à chaque fonction f_n son graphe dans le plan xOy. La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel, le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan xOy définie par :
$x \in I \quad$ et $\quad y \in \big[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big]$.



Proposition 1

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Principe de démonstration. Fixer $x_0 \in I$ et particulariser $x = x_0$ dans la définition de la convergence uniforme pour établir $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. Démonstration page 533

Remarque Il y a donc unicité de la limite uniforme.

Point méthode

Pour étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par étudier la convergence simple.
Si elle converge effectivement simplement vers une fonction f, on cherche alors à établir si elle converge uniformément ou pas vers f.

Point méthode

Pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on cherche à majorer à partir d'un certain rang $|f_n(x)-f(x)|$ indépendamment de $x \in I$ par un terme α_n tel que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemples

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : \begin{array}{ccc} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ pour tout entier naturel n, converge uniformément vers la fonction nulle. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
Puisque $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction nulle.

2. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}\cdot$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x}.$$
Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) - f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}}},$$
et donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction f.

p.534

Exercice 4 On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(x + \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Point méthode

Lorsque l'on ne trouve pas de majoration simple de $\left|f_n(x) - f(x)\right|$ indépendante de $x \in I$, on peut éventuellement faire une étude de fonction.

p.534

Exercice 5 Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où f_n est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

Attention Une suite qui converge simplement ne converge pas nécessairement uniformément.

Point méthode

Pour démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction f ne converge pas uniformément, on peut :

- démontrer que $f_n - f$ est une fonction non bornée pour une infinité d'entiers,
- ou plus généralement chercher à exhiber une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite $\Big(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Exemple

À l'exercice 1 de la page 509, nous avons vu que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array}$$

converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\,; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on a :

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1[\,; \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n}) = \frac{1}{2},$$

ce qui implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

p.534 **Exercice 6** Montrer que la suite étudiée à l'exercice 2 de la page 509 n'est pas uniformément convergente.

p.535 **Exercice 7** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}.$$

Étudier les convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

p.535 **Exercice 8** Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$;
2. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$.

Linéarité de la convergence uniforme

La notion de convergence uniforme est stable par combinaisons linéaires.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément respectivement vers f et g, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. La suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Démonstration page 536

La notion de convergence uniforme n'est pas en général stable par produit, ce qui est l'objet de l'exercice suivant.

p.536 **Exercice 9** Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément, telle que $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

Cas des fonctions bornées

Rappels

- L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ est l'espace des fonctions bornées définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on note :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

  L'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, dite de la **convergence uniforme**.

Proposition 3

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si, et seulement s'il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ la fonction $f_n - f$ est bornée, et $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration page 536

Proposition 4

Supposons que les fonctions f_n soient bornées.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \mathcal{N}_\infty)$.

Principe de démonstration. Démontrer que la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration page 537

p.537 **Exercice 10** On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^4} \end{array}$.

1. Calculer $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. On pose $f_n : x \mapsto f(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Que dire des convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous avons vu que le produit de suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément n'est pas en général uniformément convergente (*cf.* exercice 9 de la page précédente). En revanche, la notion de convergence uniforme est stable par produit lorsque l'on se restreint à des fonctions bornées ; c'est l'objet de l'exercice suivant.

p.538 **Exercice 11** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ convergeant uniformément respectivement vers f et g. Montrer que la suite $(f_n\, g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $f\, g$.

3 Convergence uniforme sur tout segment

Dans bien des cas, la convergence uniforme sur tout le domaine n'est pas vérifiée ou n'est pas simple à établir. En revanche, il arrive fréquemment que la convergence uniforme soit vérifiée localement. On le verra, la convergence uniforme locale permet d'établir d'autres propriétés locales : continuité, dérivabilité, etc.

Définition 3

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de I** si, pour tout $[a,b] \subset I$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Remarques

- S'il n'y a pas ambiguïté, on parle plus simplement de « convergence uniforme sur tout segment ».
- Il est immédiat que la convergence uniforme implique la convergence uniforme sur tout segment.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment, alors elle converge simplement. En effet, pour tout $x \in I$, le singleton $\{x\}$ est un segment.

Exemples

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array}$

   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers la fonction nulle. En effet, soit $[a,b]$ un segment inclus dans $[0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, puisque la fonction f_n est croissante, on a :

   $$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(b) \qquad \text{et} \qquad f_n(b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   La conclusion suit. Cependant, il est facile de vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'on a $\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1$, ce qui implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

2. La suite définie par $g_n : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ converge uniformément sur tout segment vers la fonction nulle. Soit en effet $[a,b] \subset]-1,1[$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

   $$\forall x \in [a,b] \quad \left|g_n(x)\right| = |x|^n \leqslant \max\bigl\{|a|,|b|\bigr\}^n.$$

   Puisque a et b sont des éléments de $]-1,1[$, on a $0 \leqslant \max\bigl\{|a|,|b|\bigr\} < 1$, ce qui implique $\max\bigl\{|a|,|b|\bigr\}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le segment $[a,b]$.

Remarque Pour établir la convergence uniforme sur tout segment, il est souvent pratique de se limiter à certains types d'intervalles.

Exemple Reprenons l'exemple précédent. Il est très facile de vérifier la convergence uniforme sur tout segment de la forme $[-\alpha,\alpha]$, avec $\alpha \in]0,1[$. En effet :

$$\forall x \in [-\alpha,\alpha] \quad 0 \leqslant \left|g_n(x)\right| = |x|^n \leqslant \alpha^n \qquad \text{et} \qquad \alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit maintenant un segment $[a,b] \subset]-1,1[$. Il est inclus dans un segment de la forme $[-\alpha,\alpha] \subset]-1,1[$ (il suffit pour cela de prendre $\alpha = \max\left\{|a|,|b|\right\}$). Par conséquent, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et la convergence uniforme sur tout segment s'ensuit.
L'intérêt de s'être restreint aux segments de la forme $[-\alpha,\alpha]$ est que sur ces intervalles on trouve de manière plus « naturelle » une majoration « plus simple ».

Point méthode

Pour établir la convergence uniforme sur tout segment de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut se limiter à démontrer la convergence uniforme sur certains intervalles $I_\alpha \subset I$, à condition que pour tout $[a,b] \subset I$, il existe un intervalle I_α tel que $[a,b] \subset I_\alpha$.

Exemples

- Si $I = \mathbb{R}_+^*$, on peut se restreindre aux intervalles $I_\alpha = [\alpha,+\infty[$, avec $\alpha > 0$.
- Si $I =]-1,1[$, on peut se restreindre aux intervalles $I_\alpha = [-\alpha,\alpha]$, avec $\alpha \in]0,1[$.
- Si $I =]0,1[$, on peut se restreindre aux intervalles $I_\alpha = [\alpha,1-\alpha]$, avec $\alpha \in]0,1/2[$.

p.538 **Exercice 12** On pose, pour tout entier $n > 0$, la fonction f_n définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx^2+1}{nx+1}. \end{array}$$

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme sur tout segment.

p.539 **Exercice 13** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (2x-1)^n. \end{array}$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,1[$.

p.539 **Exercice 14** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{1/n}. \end{array}$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment.

II Convergence uniforme et limites

Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Convergence uniforme et continuité

On sait que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas en général une fonction continue (*cf.* exercice 1 de la page 509). En revanche, si la convergence est uniforme ou uniforme sur tout segment, alors f « hérite » de la continuité des fonctions f_n.

Lemme 5

Soit $a \in I$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues en a converge uniformément sur I vers f, alors f est continue en a.

Principe de démonstration.
Pour tout $\varepsilon > 0$, fixer une fonction f_n telle que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, remarquer que :

$$f(x) - f(a) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(a)\big) + \big(f_n(a) - f(a)\big)$$

et conclure à l'aide de la continuité de f_n en a. Démonstration page 539

Théorème 6

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment vers f, alors la fonction f est continue.
A fortiori, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, alors f est continue.

Principe de démonstration. Pour démontrer la continuité de f en un $x \in I$, utiliser le lemme 5 et conclure à l'aide de l'exercice 34 de la page 237. Démonstration page 539

2 Théorème de la double limite

Le théorème de continuité des limites uniformes de suites de fonctions continues (*cf.* théorème 6) montre que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément sur tout segment vers f et si $a \in I$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x). \qquad (\star)$$

Cependant la relation $(\star)$ ne s'applique pas en général lorsque a est une extrémité de I. En effet, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $I = [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$. Nous avons déjà établi la convergence uniforme sur tout segment de la suite vers la fonction $f = 0$ (*cf.* exemple 1 de la page 515). Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $f_n(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ et donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) = 1.$$

Le théorème de la double limite, dont la démonstration est hors-programme, donne une condition suffisante pour que la relation $(\star)$ soit vérifiée lorsque a est une extrémité de I.

Théorème 7 (de la double limite)

Soit a une extrémité de I.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

Remarques

- Insistons sur le fait que l'hypothèse de convergence uniforme sur *tout le domaine* est cruciale ; comme nous l'avons vu, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.
- L'exercice suivant propose une démonstration du théorème 7 avec des hypothèses beaucoup plus fortes.

p.540 **Exercice 15** *Le but de cet exercice est de donner une démonstration du théorème de la double limite, dans un cas particulier. On n'utilisera donc pas ce théorème pour la résolution de l'exercice.*
Soit a une extrémité de I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I convergeant uniformément vers f.
On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a et la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Montrer, en séparant les cas a fini et a infini, que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

III Intégration, dérivation d'une limite

Dans cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Intégration d'une limite

Théorème 8

On suppose que $I = [a,b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f.$$

Principe de démonstration. Majorer $\left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right|$ à l'aide de $\int_{[a,b]} |f_n - f|$.

Démonstration page 540

Remarques

- L'inégalité $\left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right| \leqslant (b-a)\mathcal{N}_\infty(f_n - f)$ est d'un usage courant.
- L'hypothèse de convergence uniforme est capitale, comme le montre l'exercice suivant.

p.541

Exercice 16

1. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues définies sur $[0,1]$ convergeant simplement vers 0 et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n = +\infty$.

Remarque On ne peut pas remplacer dans le théorème 8 de la page précédente l'hypothèse que les f_n sont continues par l'hypothèse que les f_n sont continues par morceaux. Cela tient au fait qu'une limite uniforme de fonctions continues par morceaux n'est pas continue par morceaux en général (*cf.* exercice 10.11 de la page 552). En revanche, si la limite f est continue par morceaux, alors la conclusion du théorème 8 de la page précédente est vérifiée, comme le montre l'exercice suivant.

p.541

Exercice 17 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues par morceaux définies sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f.
Démontrer que si f est une fonction continue par morceaux, la conclusion du théorème 8 de la page ci-contre est vérifiée, *i.e.* $\int_{[a,b]} f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n$.

2 Dérivation d'une limite

Théorème 9

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x \in I \quad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x);$$
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Cette conclusion est *a fortiori* vraie si la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

Démonstration page 541

Principe de démonstration. Notons g la limite simple de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, fixer un $a \in I$ et montrer, à l'aide du théorème 8 de la page 518, que l'on a :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour montrer la convergence uniforme sur un segment $[a,b]$, établir et exploiter l'inégalité :

$$\forall x \in [a,b] \quad \bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| \leqslant \int_a^b \bigl|f'_n(t) - g(x)\bigr|\,\mathrm{d}t.$$

Attention Une limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas en général de classe $\mathcal{C}^1$.
À titre d'exemple, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$. Nous avons vu que cette suite converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ (*cf.* page 511). Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors que la fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On établit par récurrence le théorème suivant.

Théorème 10

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^p$. Si

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ la suite $\bigl(f_n^{(k)}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;
- la suite $\bigl(f_n^{(p)}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$:

$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Démonstration page 542

Point méthode

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $\bigl(f_n^{(p)}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x).$$

IV Séries de fonctions

1 Modes de convergence des séries de fonctions

Dans cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** si pour tout $x \in I$, la série $\sum u_n(x)$ converge. Dans ce cas, on note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{array}$$

Remarques

- Souvent on parle de la série de fonctions $\sum u_n(x)$, où $u_n(x)$ est une expression qui dépend d'une variable x. Par exemple, on parlera de la série de fonctions $\sum e^{-n^2 x}$ sur $\mathbb{R}$. Il s'agit bien évidemment d'un abus. Il faut entendre par « *série de fonctions* $\sum e^{-n^2 x}$ *sur* $\mathbb{R}$ » : la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n, la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = e^{-n^2 x}$. Cela étant, cet abus est à la fois très répandu et très pratique.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\sum\limits_{n\geqslant a} u_n$ la série où l'indexation commence à a.
- L'étude des suites de fonctions montre que certaines propriétés vérifiées par les u_n ne « passent pas à la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ » en général. Par exemple, si les u_n sont continues, la somme n'est pas toujours continue.

Convergence uniforme

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est-à-dire, pour $n \in \mathbb{N}$, que $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$. En appliquant à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les définitions vues pour les suites de fonctions, on définit :

- la **convergence uniforme** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur** $\boldsymbol{J}$ de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur tout segment** de la série $\sum u_n$.

La proposition suivante est une simple reformulation de la définition de la convergence uniforme.

Proposition 11

La série $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si :

- la série converge simplement et
- la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exemples

1. Montrons que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Pour cela, fixons $x \in [0,1]$. La suite numérique $\left(\frac{1}{n} x^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numériques $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est convergente. Toujours d'après ce théorème, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de cette série :

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} x^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$

   Cette inégalité étant valable pour tout $x \in [0,1]$, on en déduit la convergence uniforme vers la fonction nulle de la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

2. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\cdot$$

   La série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ étant à terme général positif et convergente, par comparaison la série numérique $\sum \frac{1}{x+n^2}$ est convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

   On en déduit que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions bornées et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_\infty\left(R_n\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   ce qui démontre l'assertion.

Convergence normale

La convergence normale, lorsqu'elle est vérifiée, fournit un moyen simple et efficace pour établir la convergence uniforme d'une série.

Définition 4

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** si :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée et
2. la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente.

Remarque On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur $J \subset I$** si la série de fonctions $\sum u_{n|_J}$ converge normalement.

Point méthode

Pour établir que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, il suffit d'exhiber une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in I \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \alpha_n,$$
- la série $\sum \alpha_n$ converge.

Exemples

1. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

   En effet, en notant f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, cela pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a immédiatement :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$
   Puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement.

2. La série de fonctions $\sum \bigl(x(1-x)\bigr)^n$ converge normalement sur $[0,1]$.
   En effet la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur le segment $[0,1]$ est continue, positive. Une brève étude de f définie sur $[0,1]$ montre que son maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$. Par conséquent, pour tout entier n et $x \in [0,1]$, on a :
$$0 \leqslant \bigl(x(1-x)\bigr)^n \leqslant \frac{1}{4^n}\cdot$$
   La convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ assure la convergence normale de la série $\sum f^n$.

p.543 **Exercice 18** Étudier la convergence (simple/normale/uniforme) des séries de fonctions :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+x^2}\cdot$$

p.543 **Exercice 19** Étudier la convergence (simple/uniforme) de $\sum x\,e^{-nx}$ (sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 5

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur tout segment** si la série de fonctions $\sum u_{n|_{[a,b]}}$ converge normalement pour tout $[a,b]$ inclus dans I.

Exemples

1. La série géométrique réelle $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$. La convergence est normale sur tout segment inclus dans $]-1,1[$. Il suffit en effet de vérifier qu'il y a convergence normale sur tout $[-r,r]$, où $r \in [0,1[$. Ce dernier point est assuré par le fait que $|x^n| \leqslant r^n$ pour tout $x \in [-r,r]$ et que la série numérique $\sum r^n$ est convergente.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{x+n^2}$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$.

   Il suffit pour montrer cela d'établir la convergence normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$, où $a>0$. Pour un réel $a>0$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,+\infty[\quad 0 \leqslant \frac{1}{x+n^2} \leqslant \frac{1}{a+n^2}.$$
   De la convergence de la série $\sum \frac{1}{a+n^2}$, qui est obtenue par comparaison aux séries de Riemann, on déduit la convergence normale de la série $\sum \frac{1}{x+n^2}$ sur $[a,+\infty[$.

Convergence normale et convergence uniforme

Lemme 12

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, alors, pour tout $a \in I$, la série numérique $\sum u_n(a)$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de comparaison. Démonstration page 543

Théorème 13

- Si la série $\sum u_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément.
- Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment, alors elle converge uniformément sur tout segment.

Démonstration page 544

p.544 **Exercice 20** Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

Attention Une série de fonctions peut converger uniformément sans pour autant converger normalement, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (*cf.* page 522), mais elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$. En effet, en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n$ définie sur $[0,1]$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) = \frac{1}{n}$ et la série harmonique est divergente.

Point méthode

Pour démontrer la convergence uniforme d'une série, on commence par examiner la convergence normale.

p.544 **Exercice 21** Étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.

Point méthode

Pour démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, il est peut être pratique de démontrer que la série télescopique $\sum(f_{n+1}-f_n)$ converge uniformément.

p.545 **Exercice 22** Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f vérifiant :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Limites et sommes de séries de fonctions

Continuité d'une somme de série de fonctions

Le théorème 6 de la page 517 s'adapte immédiatement aux séries de fonctions.

Théorème 14

Supposons que les fonctions u_n soient continues.
Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction continue.

A fortiori si la série $\sum u_n$ converge uniformément, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction continue.

Exemples

1. La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   En effet, en notant u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$
   Comme $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge. Par conséquent la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement. Puisque les fonctions u_n sont continues, le théorème 14 de la page précédente permet d'affirmer que f est continue.

2. Nous avons vu à l'exemple 2 de la page 524 que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{x+n^2}$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]0,+\infty[$. Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, on en déduit que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x+n^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

p.546

Exercice 23

Démontrer que la fonction $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue.

Théorème de la double limite

Le théorème 7 de la page 518 s'adapte immédiatement aux séries de fonctions.

Théorème 15 (de la double limite pour les séries)

Supposons que la série de fonction $\sum u_n$ converge uniformément sur I.
Si a est une extrémité de I et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n a une limite ℓ_n en a, alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ a pour limite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en a.

p.546

Exercice 24 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{x}{2^n}\right)$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$, *pour* $t \in]-1,+\infty[$.

p.546

Exercice 25 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{2^n}$.

3 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème 16

Supposons que les fonctions u_n soient continues.
Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} u_n.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 8 de la page 518. □

p.547

Exercice 26 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum a_n$ soit convergente.

1. Démonter que l'application f définie sur $[0,2\pi]$ par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(kx)$ est continue.
2. Calculer $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} f$.

p.547

Exercice 27 Soit $(z,r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $r \neq |z|$.

1. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, exprimer $\dfrac{1}{z - re^{it}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique.
   Indication. On distinguera les cas $|z| < r$ et $|z| > r$.
2. Calculer $I(r,z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - re^{it}}$.

4 Dérivation terme à terme

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 9 de la page 519.

Théorème 17 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^1$. Si

- la série $\sum u_n$ converge simplement,
- la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n.$$

Exemples

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n^2}$.

   Cette définition est licite, car pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{1}{x+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

   et donc par comparaison aux exemples de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^2+x}$ converge.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$. Les fonctions rationnelles u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n'(x) = -\frac{1}{(x+n^2)^2}.$$

   Ainsi, par décroissance de la fonction u_n :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^4}.$$

   Puisque la série $\sum 1/n^4$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n'$ convergence normalement, donc uniformément. On en déduit, puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement, que la somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n^2)^2}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

   Cette définition est licite, car pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

   et donc, par comparaison aux exemples de Riemann, la série $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$ converge.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $v_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v_n'(x) = (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

   Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. La suite $\left((-1)^{n+1} v_n'(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs positives. Il est immédiat que la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, la série $\sum v_n'$ converge simplement et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

   $$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n'(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}\right| \leqslant \frac{e^{-(N+1)x}}{N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

   On en déduit que la série de fonctions $\sum v_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Puisque de plus la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, sa somme est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

p.548 **Exercice 28** Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x > 1 \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Le théorème 10 de la page 520 se traduit ainsi pour les séries de fonctions.

Théorème 18 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geqslant 1$. Si :

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement,
- la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.$$

Point méthode

Pour démontrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher à démontrer que :

- toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment.

Dans ce cas, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}.$$

Exemple Reprenons l'exemple 1 de la page précédente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n^2}$.

Les fonctions $u_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{(x+n^2)^{p+1}} \leqslant \frac{p!}{n^{2(p+1)}}.$$

Puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n^{2+2p}}$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$. Cela étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{(x+n^2)^{p+1}}.$$

p.548

Exercice 29

Démontrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

5 Comportement asymptotique

Dans cette section, on note $]\alpha, \beta[$ l'intérieur de I et l'on suppose que la série $\sum u_n$ converge simplement, de somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Il est fréquent de chercher le comportement asymptotique de f au voisinage de α ou β (limites, équivalents, etc.) Il s'agit là de problèmes qui peuvent être extrêmement délicats. Il existe cependant quelques situations « typiques ».

Comparaison série/intégrale

Une méthode pour trouver un équivalent de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en β (ou α), ou encore pour démontrer que f a une limite nulle ou infinie en β (ou α), consiste à comparer avec une intégrale.

Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux décroissante, montrons que la série $\sum \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t\right)$ est convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\, \mathrm{d}t \leqslant \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

La fonction φ étant décroissante positive, elle admet une limite finie positive en $+\infty$. Par suite la série télescopique $\sum(\varphi(n) - \varphi(n+1))$ est convergente et, par comparaison, la série $\sum \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t\right)$ également et l'on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi(n) - \varphi(n+1)) \leqslant \varphi(0).$$

Supposons de plus que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ soit convergente.

Dans ces conditions, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la série $\sum \varphi(n)$ en découle et :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) - \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(0).}$$

Point méthode

Soit $u : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto u(x,t)$ soit décroissante et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour obtenir un équivalent en β de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u(x,n)$ on pourra :

1. établir la majoration $\left| f(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant u(x,0)$;
2. puis démontrer que $u(x,0) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t\right)$ au voisinage de β.

p.549 **Exercice 30** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x}\cdot$

Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0.

Équivalent à l'aide d'une autre série

Une autre méthode pour trouver un équivalent de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ en β (ou α) est de remplacer $u_n(x)$ par un équivalent simple lorsque x tend vers β.

Exemple : suite de l'exercice 30

Notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$, pour n entier naturel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\,n^2}$. Cela permet d'« intuiter » que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{S}{x}$, où $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$

Pour montrer cela, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x) = S$. Utilisons le théorème de la double limite. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $v_n(x) = xu_n(x)$. On a :

$$\left|v_n(x)\right| = \frac{x}{1+n^2x} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

Par comparaisons aux exemples de Riemann, on en déduit la convergence normale, et donc uniforme, de la série $\sum v_n$ sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème précité, pour $x \in]0,+\infty[$:

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Remarque

La comparaison avec une intégrale obtenue à l'exercice 30 de la page précédente donne :

$$0 \leqslant f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + xt^2} \leqslant 1.$$

Cet encadrement n'est pas suffisamment précis pour pouvoir en déduire un équivalent en $+\infty$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

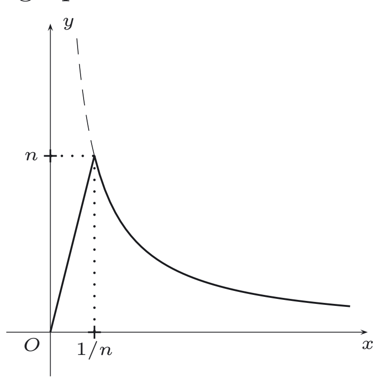
Exercice 1 Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\ ; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 en 1 et qui est nulle sur $[0,1[$.

Exercice 2

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient le graphe suivant.



- Il est clair que $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Soit $x \in \,]0,+\infty[$. On constate que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. En effet, lorsque $n \geqslant \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, on a $x \geqslant \frac{1}{n}$ et donc $f_n(x) = \frac{1}{x}$.
  Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\ ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Exercice 3 Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, du fait que la fonction f_n est croissante, on a :

$$f_n(x) \leqslant f_n(y). \tag{1}$$

Par convergence simple, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(y)$, ce qui implique par passage à la limite dans l'inégalité (1) que $f(x) \leqslant f(y)$.
En conclusion, la fonction f est croissante.

Proposition 1 Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in I \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel entier n_0. *A fortiori*, on a :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre que $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. La convergence simple en découle.

Exercice 4

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par continuité de la fonction sin en x, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin x.$$
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction sin.
- Puisque $\sin' = \cos$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ donne :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin y - \sin x| \leqslant |y - x|\,.$$
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f_n(x) - \sin(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin(x)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$
En conclusion : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction sin.

Exercice 5 Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) = nx^{n-1}\left(1 - \frac{n+1}{n}\,x\right).$$
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

On déduit du tableau de variations que pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
Puisque $0 \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$, on a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$ et donc, pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1} = \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 6 À l'exercice 2 de la page 509, nous avons montré que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[\;; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[, \end{cases}$$

converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - n^2x^2}{x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0^+} \big(f(x) - f_n(x)\big) = +\infty$ et donc la fonction $f - f_n$ n'est pas bornée.

La fonction $f_n - f$ n'étant bornée pour aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

Exercice 7

- Étudions la convergence simple.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$ et donc $f_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, d'après les théorèmes généraux :

  $$\frac{nx}{1 + n^2x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- Étudions la convergence uniforme.
  En posant g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $f_n(x) = g\,(nx)$. En particulier :

  $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = g(1) = \frac{1}{2}.$$

  La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas uniformément vers 0.

Exercice 8

1. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   - Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

     $$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|.$$

     En particulier :

     $$\left|f_n(n^2) - f(n^2)\right| = \left|2n + \frac{1}{n^2}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

     et donc la convergence n'est pas uniforme.
2. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.

- On a $\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|2\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}\right|$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
  L'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto x\,e^{-x}$ montre que :
  $$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-1}.$$
  Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
  $$\left|f_n(x) - f(x)\right| = 2\,\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \leqslant 2\,\frac{e^{-1}}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  donc la convergence est uniforme.

Proposition 2 Il est clair que la suite constante nulle converge uniformément vers la fonction nulle. On suppose désormais que $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que :
$$\forall n \geqslant n_1 \quad \forall x \in I \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$$
$$\forall n \geqslant n_2 \quad \forall x \in I \quad \left|g_n(x) - g(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}.$$
Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a, pour tout $x \in I$ et $n \geqslant n_0$:
$$\begin{aligned}\Big|\big(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)\big) - \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\Big| &= \Big|\lambda\big(f_n(x) - f(x)\big) + \mu\big(g_n(x) - g(x)\big)\Big| \\ &\leqslant |\lambda|\,\left|f_n(x) - f(x)\right| + |\mu|\,\left|g_n(x) - g(x)\right| \\ &\leqslant |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.\end{aligned}$$
Par conséquent, suivant la définition, la suite $\big(\lambda f_n + \mu g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Exercice 9 Posons, pour tout entier n non nul, la fonction $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Il est facile de justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'identité de $\mathbb{R}$. En revanche la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément d'après l'exercice 8.

Proposition 3

- Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
  * Par définition, il existe un rang N tel que :
    $$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in I \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant 1.$$
    Fixons un tel entier N. Pour $n \geqslant N$, les fonctions $f_n - f$ sont bornées. Il s'ensuit que la suite $\big(\mathcal{N}_\infty(f_n - f)\big)_{n\geqslant N}$ est définie.
  * Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe un entier $n_0 \geqslant N$ tel que :
    $$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in I \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$
    Fixons un tel entier n_0. Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon$.
    On a ainsi démontré que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Supposons qu'il existe un entier N tel que les fonction $f_n - f$ soient bornées pour $n \geqslant N$ et que l'on ait $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \geqslant n_0 \quad \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon.$$
  Fixons un tel entier n_0. On a alors pour tout $n \geqslant n_0$:
  $$\forall x \in I \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon,$$
  ce qui prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Proposition 4

- Supposons que les fonctions f_n soient bornées et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

  On sait alors qu'il existe un entier n_0 tel que $f - f_{n_0}$ est bornée et donc, du fait que f_{n_0} est bornée, $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0}$ est bornée. Il vient alors immédiatement de la définition de la convergence uniforme que f est la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \mathcal{N}_\infty\big)$.
- Supposons de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions bornées converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \mathcal{N}_\infty)$ vers la fonction f. On a en particulier $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, d'après la proposition 3 de la page 514, la suite converge uniformément vers f.

Exercice 10

1. La fonction f est impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	0		$3^{-1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$3^{3/4}/4$	$\searrow$	0

   Par conséquent la fonction f est bornée et $\mathcal{N}_\infty(f) = \frac{3^{3/4}}{4}$.

2. - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
     En effet, puisque $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
     $$f_n(x) = f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
     Par ailleurs, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

     Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
   - Il est immédiat que $\mathcal{N}_\infty(f_n) = \mathcal{N}_\infty(f) = \frac{3^{3/4}}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
     La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 11 Si $(f,g) \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})^2$, alors :

$$\forall x \in I \quad \big|f(x)g(x)\big| = \big|f(x)\big|\,\big|g(x)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g),$$

et donc fg est une fonction bornée et :

$$\mathcal{N}_\infty(f\,g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g).$$

Par ailleurs, du fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\big(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \mathcal{N}_\infty\big)$, la suite $\big(\mathcal{N}_\infty(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante M.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$ et donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(f_n g_n - fg) &\leqslant \mathcal{N}_\infty\big(f_n(g_n-g)\big) + \mathcal{N}_\infty\big(g(f_n-f)\big)\\ &\leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n-g) + \mathcal{N}_\infty(g)\,\mathcal{N}_\infty(f_n-f).\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{N}_\infty(g_n - g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n g_n - fg) \leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n-g) + \mathcal{N}_\infty(g)\,\mathcal{N}_\infty(f_n-f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Exercice 12

- Étudions la convergence simple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après les théorèmes généraux :

  $$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} x.$$

  Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.

- Étudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, étudions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto x - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g_n(x) = \frac{x-1}{nx+1}\cdot$
  La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = \frac{n+1}{(nx+1)^2}\cdot$
  On en déduit la tableau de variations de g_n.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$+$
g_n	-1 $\nearrow$ $1/n$

  Il s'ensuit, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée et que

  $$\mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \mathcal{N}_\infty(g_n) = 1.$$

  La convergence n'est donc pas uniforme.

- Montrons qu'il y a convergence uniforme sur tout segment. Pour cela, il suffit d'établir qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, car pour tout $[a,b] \subset \,]0,+\infty[$ on a $[a,b] \subset [a,+\infty[$.
  Soit donc $a > 0$. L'étude précédente montre, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée sur $I = [a, +\infty[$ et

  $$\sup_{x\in[a,+\infty[} \big|g_n(x)\big| = \max\left\{\big|g_n(a)\big|, \frac{1}{n}\right\} = \max\left\{\frac{|a-1|}{na+1}, \frac{1}{n}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13

- Pour $x \in]0,1[$, on a $2x-1 \in]-1,1[$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle.
- Pour établir la convergence uniforme sur tout segment, il suffit d'établir la convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a,1-a]$, avec $a \in]0,1/2[$.
  Soit $a \in]0,1/2[$. Alors :
  $$\forall x \in [a,1-a] \quad 2a-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1-2a.$$
  Par conséquent, $|2x-1| \leqslant |1-2a| < 1$, pour tout $x \in [a,1-a]$. On en déduit, par croissance des fonctions puissances positives :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,1-a] \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant |1-2a|^n.$$
  Comme $|1-2a| < 1$, cela implique $|1-2a|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la convergence uniforme vers la fonction nulle sur l'intervalle $[a,1-a]$ s'en trouve démontrée.
  Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0,1[$ vers la fonction nulle.

Exercice 14 Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $x^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction constante 1.
Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, avec $a \leqslant b$. Par croissance des fonctions puissances positives :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - a^{1/n}\big| = f_n(x) - a^{1/n} \leqslant b^{1/n} - a^{1/n}.$$
Comme $b^{1/n} - a^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-1 = 0$, on en déduit que la suite $\big(f_n - a^{1/n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,b]$. Puisque $a^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $[a,b]$. La conclusion suit.

Lemme 5 Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence uniforme donne l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un tel entier n.

Par continuité de f_n en a, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, on ait $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent, pour tout $x \in I$ vérifiant $|x-a| \leqslant \eta$, on a :
$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|\\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|\\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f - f_n) + |f_n(x) - f_n(a)| + \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

La continuité de f en a est donc démontrée.

Théorème 6 Soit $[a,b] \subset I$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, d'après le lemme 5 de la page 517, pour tout $x \in [a,b]$, la fonction f est continue en x. Par suite f est continue sur $[a,b]$.

Puisque la fonction f est continue sur tout segment de I, elle est continue sur I, en vertu de l'exercice 34 de la page 237.

Exercice 15 Notons ℓ la limite de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on ait :

$$|\ell - \ell_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons un tel entier n_1.

Par convergence uniforme, il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier $n \geqslant n_2$ on ait :

$$\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons un tel entier n_2 et posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Cas $a = +\infty$ Par définition de la limite, il existe réel M tel que pour tout $x \geqslant M$ on ait :

$$\left|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant M$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\ell - f(x)\right| &= \Big|\big(\ell - \ell_{n_0}\big) + \big(\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\big) + \big(f_{n_0}(x) - f(x)\big)\Big| \\ &\leqslant \left|\ell - \ell_{n_0}\right| + \left|\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{N}_\infty(f_{n_0} - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On en conclut que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Le cas $a = -\infty$ se traite de la même manière.

Cas a **fini** Par définition d'une limite finie en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$ on ait :

$$\left|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, on a comme précédemment :

$$\left|\ell - f(x)\right| \leqslant \left|\ell - \ell_{n_0}\right| + \left|\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On en conclut que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 8 Puisque les fonctions f_n sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction f est continue (*cf.* le théorème 6 de la page 517).

Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est définie.

Pour tout entier n on a :

$$\left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f_n - f| \leqslant \int_{[a,b]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = (b - a)\mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

Puisque la convergence est uniforme :

$$0 \leqslant \left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right| \leqslant (b - a)\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et par linéarité de l'intégrale sur un segment la conclusion en découle.

Exercice 16

1. La fonction $x \mapsto x^n(1-x)$ est continue sur le segment $[0,1]$. Un calcul simple donne :
$$I_n = \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$
et donc $I_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2. Posons $f_n : x \mapsto n^3 x^n (1-x)$.
Les fonctions f_n sont continues. Pour tout $x \in]0,1[$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ lorsque $n \geqslant 1$.Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Cependant par linéarité :
$$\int_{[0,1]} f_n = n^3 \, I_n = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 17 Si la fonction f soit continue par morceaux, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est définie. Pour tout entier n on a :
$$\left| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f_n - f| \leqslant \int_{[a,b]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$
Puisque la convergence est uniforme :
$$0 \leqslant \left| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right| \leqslant (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
par conséquent :
$$\left| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et la conclusion en découle.

Théorème 9

- Notons g la limite simple de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. D'après le théorème 6 de la page 517, la fonction g est continue sur I.
- Fixons $a \in I$. Pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t) \, \mathrm{d}t.$$
Fixons un $x \in I$. Si $x \geqslant a$, d'après le théorème 8 de la page 518, on a :
$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t) \, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t,$$
et si $x \leqslant a$:
$$f_n(x) - f_n(a) = -\int_x^a f_n'(t) \, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_x^a g(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient que :

$$f_n(x) - f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(a).$$

Par conséquent, pour tout $x \in I$:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Cette dernière expression montre que f est une primitive de g sur I, donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- Fixons $[a,b] \subset I$ et notons $\alpha_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f_n'(x) - g(x)\right|$. La continuité de $f_n' - g$ donne l'existence de α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. La convergence uniforme sur tout segment de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vers g assure que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\forall x \in [a,b] \quad \left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \int_a^b \left|f_n'(t) - g(x)\right| \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

La conclusion suit.

Théorème 10 Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_p$:

« Si les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ et

$*$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;

$*$ la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a : $\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$. »

- Initialisation. Le cas $p = 1$ correspond à l'une des conclusions du théorème 9 de la page 519.
- Hérédité. Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que la suite $\left(f_n^{(p+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I. Le théorème 9 de la page 519 appliqué à la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ donne que $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p+1)}(x) = g'(x)$$

  Puisque la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, l'hypothèse de récurrence donne que la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a :

$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

En particulier :

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = g(x).$$

Par conséquent, $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in I \quad f^{(p+1)}(x) = g'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p+1)}(x).$$

Cela termine la démonstration.

Exercice 18 Posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}\cdot$

- Lorsque $n \geqslant 1$ la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée et $\mathcal{N}_\infty(u) = \frac{1}{n^2}$. La série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, *a fortiori* simplement.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$, car u_0 n'est pas bornée. La convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ montre que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$, et donc simplement.

Exercice 19 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons v_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v_n(x) = x\,e^{-nx}$.

- Pour $x = 0$, la série $\sum v_n(0)$ est la série nulle et elle est convergente.
  Pour $x > 0$, puisque $0 \leqslant e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est convergente et donc la série $\sum v_n(x)$ est convergente.
  Ainsi, la série $\sum v_n$ converge simplement.
- Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$R_n(x) = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^k = \frac{x\,e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\cdot$$

  On sait que $\frac{e^t-1}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. On en déduit en particulier que :

$$R_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}\, e^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n\to\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

  Cela est incompatible avec la convergence uniforme de la série $\sum v_n$. On en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Lemme 12 Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ on a :

$$\left|u_n(x)\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(u_n)$$

et puisque la série numérique de terme général positif $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente, par le théorème de comparaison, la série $\sum |u_n(x)|$ est convergente.

Théorème 13

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.

  Soit $x \in I$. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|u_k(x)\right|$$

  Ainsi, par définition de la norme de la convergence uniforme :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty\left(u_k\right).$$

  Du fait que cette inégalité est valable pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n de la série est borné et

$$\mathcal{N}_\infty(R_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k).$$

  Il suffit pour conclure de remarquer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment. Soit $[a,b] \subset I$. En appliquant le premier point à la série $\sum u_n|_{[a,b]}$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

  La conclusion s'ensuit.

Exercice 20 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}\cdot$

Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]1,+\infty[$.

Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, du fait que la fonction u_n est décroissante, on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}\cdot$$

La convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ donne alors la convergence normale de la série $\sum u_n$ sur $[a,b]$.

Cela étant vrai pour tout segment $[a,b] \subset]1,+\infty[$, la conclusion suit.

Exercice 21 Notons $u_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Montrons que la série $\sum u_n$ converge simplement.

  Pour $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(1) = 0$ et donc la série $\sum u_n(1)$ est convergente.

  Soit $x \in [0,1[$. La série $\sum u_n(x)$ est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrie de raison x.

- La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$. L'étude de la fonction u_n montre que :

$$\mathcal{N}_\infty(u_n) = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Puisque

$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right)=n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{n}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-1,$$

on a $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$ et $\mathcal{N}_\infty(u_n)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{-1}}{n}\cdot$

On en déduit que la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ diverge.

- La série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

  En effet, pour tout $x\in[0,1[$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k(1-x)=x^{n+1},$$

  et donc $\mathcal{N}_\infty(R_n)=1$, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$. On retrouve le fait que la série ne converge pas normalement.

  Remarque On peut également remarquer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ est la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f=\mathbb{1}_{[0,1[}$. Cette fonction étant discontinue et les fonctions u_n étant toutes continues, la convergence ne saurait être uniforme (voir plus loin le théorème 14 de la page 525).

- En revanche, la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$ de $[0,1[$, avec $a\in]0,1[$. En remarquant que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in[0,a]\quad \left|u_n(x)\right|\leqslant a^n,$$

  on obtient la convergence normale de $\sum u_n$ sur le segment $[0,a]$.

Exercice 22

- Puisque la fonction g est continue et qu'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle est continue, il est clair que l'application :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)\\ f & \longmapsto & \left(x\mapsto g(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{array}$$

  est bien à valeurs dans $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et toutes les fonctions f_n sont continues.

- Par récurrence, démontrons :

$$\mathcal{H}_n:\quad \forall x\in[0,1]\quad \left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right|\leqslant\frac{x^n}{n!}\mathcal{N}_\infty(g).$$

  * Initialisation. Le résultat est immédiat pour $n=0$, car $f_1=g$.
  * Hérédité. Supposons $\mathcal{H}_n$ pour $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| &= \left|\int_0^x f_{n+1}(t)-f_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^x \left|f_{n+1}(t)-f_n(t)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathcal{N}_\infty(g)\,\mathrm{d}t=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{N}_\infty(g),\end{aligned}$$

    ce qui démontre le résultat par récurrence.

- Il s'ensuit que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - f_n) \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(g)}{n!}$$
et, par comparaison, du fait que la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente, la série de fonctions $\sum (f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,1]$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f. D'après le théorème 8 de la page 518 on a :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$
ce qui implique que f vérifie :
$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 23

- Il a été démontré à l'exercice 20 de la page 524 que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.
- Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x \ln n)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0,+\infty[$. Le théorème 14 de la page 525 permet de conclure.

Exercice 24 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$u_n(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{2^n}\right)\cdot$$
Notons de plus $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Justifions la convergence uniforme de la série de fonction $\sum u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$, on a :
$$0 \leqslant u_n(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot$$
De la convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$, on déduit la convergence normale, et donc uniforme, de la série de fonctions $\sum u_n$ et f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$, on a :
$$u_n(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{2^n}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2^n}\cdot$$
Ainsi, d'après le théorème de la double limite, on obtient :
$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Exercice 25 Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(nx)}{2^n}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Il est immédiat par opérations sur les limites, que :
$$u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^n}\cdot$$

- Du fait que la fonction $|\text{Arctan}|$ est majorée par $\pi/2$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$
La convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions $\sum u_n$ en découle.
- Par conséquent, le théorème de la double limite permet d'affirmer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{2^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 26

1. Notons u_n l'application définie sur $[0, 2\pi]$ par $u_n : x \mapsto a_n \sin(nx)$. Il est clair que u_n est bornée. Du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) \leqslant a_n$, on déduit que la série $\sum u_n$ converge normalement. De la continuité de toutes les fonctions u_n et du théorème 14 de la page 525, on conclut que la fonction f est continue.
2. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, et puisque les fonctions u_n sont continues, on déduit du théorème d'intégration terme à terme :
$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,2\pi]} u_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 27 Soit $(z, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$. Notons $f(t) = \frac{1}{z - re^{it}}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Nous traitons les deux questions en même temps.

- Supposons $r < |z|$. Puisque $\left|\frac{r}{z}e^{it}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$, la série géométrique $\sum \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$ est convergente et :
$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{r}{z}e^{it}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$
où $u_n : t \mapsto \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$. Puisque la série $\sum \left|\frac{r}{z}\right|^n$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Puisque les fonctions u_n sont continues le théorème d'intégration terme à terme donne :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
De plus, un calcul immédiat donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 2\pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$
Par conséquent :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{z}.$$

- Supposons $|z| < r$. Alors :
$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = -\frac{1}{r}\frac{e^{-it}}{1 - \frac{z}{r}e^{-it}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t),$$
où $v_n(t) = \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-i(n+1)t}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$. Il est immédiat que $|v_n(t)| = \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$. La série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ étant convergente, la série de fonctions $\sum v_n$ converge donc normalement sur le segment $[0, 2\pi]$.
Puisque les fonctions v_n sont continues et que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, le théorème d'intégration terme à terme donne :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
De plus, un calcul immédiat donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Par conséquent :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\cdot$$

Exercice 28 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la fonction $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$, définie sur $]1, +\infty[$. Nous savons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. De plus, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. Pour tout réel $a > 1$, démontrons la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$0 \leqslant -u_n'(x) = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}\cdot$$
De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{\ln n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour tout $a > \alpha > 1$. En choisissant un tel réel α, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente. Cela nous permet d'affirmer la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et donc qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $]1, +\infty[$. La conclusion suit.

Exercice 29 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la fonction $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$, définie sur $]1, +\infty[$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x > 1$ on a :
$$u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}\cdot \qquad (*)$$
Soit $a > 1$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \geqslant a \quad 0 \leqslant \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \frac{\ln^p n}{n^a}\cdot$$
Par ailleurs, soit $1 < \alpha < a$. Par croissances comparées :
$$\frac{\ln^p n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ donne par comparaison, via l'inégalité $(*)$, que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. La série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment .
En conclusion, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]1,+\infty[\quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}\cdot$$

En particulier, la fonction ζ est décroissante, mais cette propriété peut être établie par des méthodes plus élémentaires (*cf.* exercice 3 de la page 509).

Exercice 30 Notons $u : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{1+xt^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ est décroissante, positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux exemples de Riemann, car $u(x,t) = \mathrm{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$.
En procédant de la manière décrite à la page 530, on obtient l'encadrement :

$$0 \leqslant f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} \leqslant 1, \qquad (*)$$

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$, posons le changement de variable linéaire $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On a ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Big[\mathrm{Arctan}\, u\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\pi}{2}\cdot$$

Par conséquent, d'après l'encadrement $(*)$:

$$0 \leqslant \sqrt{x} f(x) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{x}\left(f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}\right) \leqslant \sqrt{x}.$$

Par suite $\sqrt{x} f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cdot$$

S'entraîner et approfondir

10.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^2 e^{-nx}. \end{array}$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10.2 Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x(1-x)^n. \end{array}$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ **10.3** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n\left(\operatorname{Arctan}\left((x + \frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(x - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication. On pourra utiliser des formules de Taylor

10.4 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ définies par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1] \quad P_0(t) = 0 \\ \forall t \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(P_n(t)^2 + t\right) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   Indication. Démontrer que les fonctions P_n et $P_{n+1} - P_n$ sont croissantes.
3. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

10.5 Soit φ l'application de $[0,1]$ dans lui-même définie par $\varphi(t) = 2t(1-t)$.

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme et enfin la convergence uniforme sur tout segment de $]0,1[$ de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}.$$

10.6 On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

1. Démontrer que si les fonctions f_n sont k-lipschitziennes, alors la fonction f est k-lipschitzienne.
2. Démontrer que si les fonctions f_n sont lipschitziennes, alors la fonction f n'est pas nécessairement lipschitzienne.

10.7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n]\,; \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f et que pour tout entier n on a $f_n \leqslant f$.
   On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$, *valable pour tout* $t \in]-1, +\infty[$.
2. Démontrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.
3. Démontrer que la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

10.8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f et que pour tout entier n on a $f_n \geqslant f$.
   On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$, *valable pour tout* $t \in]-1, +\infty[$.
2. Démontrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.
3. Démontrer que la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

10.9 Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que la fonction f est polynomiale.

⋆ **10.10** Le but de cette exercice est de donner une démonstration du théorème de la double limite, avec une hypothèse supplémentaire sur la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On n'utilisera donc pas ce théorème pour la résolution de l'exercice.
Soit I un intervalle d'intérieur non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles bornées définies sur I convergeant uniformément vers f.
On suppose de plus que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a.

1. Montrer que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. Montrer, en séparant les cas a fini et a infini, que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \ell_n.$$

10.11 1. La fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } x = \frac{1}{k}\,; \\ g(x) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est-elle continue par morceaux ?

2. Donner une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ convergent uniformément vers g.
3. Est-il vrai en général que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues par morceaux définies sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers une fonction f, alors $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$?

10.12 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. La convergence est-elle uniforme ?

10.13 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u_n : x \mapsto x^n f(x)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la série $\sum u_n$ converge simplement.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la série $\sum u_n$ converge uniformément.

10.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big|f(x+y) - f(x) - f(y)\big| \leqslant M$$

où M est un réel.

1. Dans cette question, on suppose $M = 0$.
   Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x.$$

Indication. En considérant une primitive de f, on démontrera que f est dérivable.

2. On revient au cas général. On pose $u_n : x \mapsto \dfrac{f(2^n x)}{2^n}\cdot$
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
3. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction bornée g tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x + g(x).$$

⋆ **10.15** On munit $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ de la norme $\mathcal{N}_\infty$.
Soit $\mathcal{E} = \big\{f \in E \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\big\}$. On pose, pour $f \in \mathcal{E}$ et $t \in [0,1]$:

$$T(f)(t) = \begin{cases} \dfrac{f(3t)}{2} & \text{si } t \in [0, 1/3]\ ; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t \in [1/3, 2/3]\ ; \\ \dfrac{1 + f(3t-2)}{2} & \text{si } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

1. Montrer que $T(f)$ est bien définie et que c'est un élément de $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $T(f)$ est lipschitzienne.
3. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et $f_{n+1} = T(f_n)$.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{E}$.
   Indication. On ne cherchera pas à expliciter f et on se ramènera à une série.

10.16 On pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\eta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\cdot$

1. Donner les domaines de définition D_ζ et D_η de ζ et η.
2. Étudier la continuité de ζ et η.
3. Donner une relation entre $\zeta(s)$ et $\eta(s)$ pour $s \in D_\zeta \cap D_\eta$.
4. En déduire un équivalent simple de $\zeta(s)$ au voisinage de 1.
   On admettra que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

10.17 Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}\cdot$

1. Démontrer que $S(x)$ est bien définie et que l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
3. Équivalent de S en 0.
   On utilisera l'égalité $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
4. Équivalent de S en $+\infty$.

10.18 1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction :

$$f : x \mapsto= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\cdot$$

2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
3. Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers -1.
4. Calculer $f(1)$.
   Indication. On utilisera l'équivalent de Stirling.

★★ **10.19** Soit b et c deux réels strictement positifs et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = \mathrm{o}(c^n)$.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{b^n}$.

1. Donner une condition suffisante sur b (en fonction de c) pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier alors la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

10.20 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tendant vers 0.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose u_n la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par $u_n(x) = a_n \cos(nx)$.

1. À quelle condition portant sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

   Calculer $S_n(x)$ et montrer que :

$$\forall x \in]0, 2\pi[\quad \big|S_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$, démontrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{N-1} \big(S_n(x)\,(a_n - a_{n+1})\big) + a_N\, S_N(x).$$

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.
5. Démontrer que la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

   est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$.

10.21 Montrer que la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}_+$ est continue. Démontrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle dérivable en 0 ?

10.22 Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.23 On pose $u_n\,(x) = \dfrac{1}{n(1+nx^2)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$.

On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^6}{6}\cdot$

1. Déterminer le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}_+$ de $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   Étudier la continuité de f sur D.
2. Déterminer la limite et un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer la limite et un équivalent simple de f au voisinage de 0.

10.24 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}\cdot$

1. Donner le domaine de définition de $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. Étudier le continuité de f.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   Indication. On montrera que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ **10.25** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \sum\limits_{j=-n}^{n} \dfrac{1}{x+j}\cdot$

1. Montrer que f est bien définie, 1-périodique.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tel que $2x$ ne soit pas entier, on a :
   $$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot$$
2. La fonction cotan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot$
   Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $g(x) = f(x) - \pi \operatorname{cotan} \pi x$.
   Montrer que g est continue, prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Notant encore g ce prolongement, montrer que $g = 0$. Pour cela, on introduira $A \geqslant 1$, $M_A = \sup\limits_{t\in[0,A]} \big|g(t)\big|$ et $x_0 = \inf\big\{x \in \left]0, A\right] \;\big|\; |g(x)| = M_A\big\}$.

10.26 Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$.

1. Quelle est le domaine de définition.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

10.27 On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,b]$ par $f_0 \in \mathcal{C}^0\big([0,b],\mathbb{R}\big)$ et :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Étudier la série $\sum f_n$. Quelle est sa somme ?

10.28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ vérifiant $u_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant u_n(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue u non nulle.
3. Montrer que u vérifie $u'(x) = u(x-x^2)$ pour tout $x \in [0,1]$.

Solution des exercices

10.1 • Étudions la convergence simple. Il est clair que $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $x > 0$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de la fonction f_n.

Il est clair, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) = nx(2-nx)e^{-nx}.$$

Le tableau de variations ci-contre donne alors que :

x	0		$2/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$f_n(2/n)$	↘	0

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f_n(x)\right| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n}e^{-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers 0.

10.2 1. Pour $x \in]0,1]$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs, il est immédiat que $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite converge donc simplement vers la fonction nulle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Étudions les variations de la fonction f_n. Il est clair, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) = n^\alpha\,(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x).$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		$1/(n+1)$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0
f_n	0	↗	$f_n(1/(n+1))$	↘	0

Le tableau de variations donne alors que :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x)\right| = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Puisque $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$, on a :

$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) = (n+1)\,\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1,$$

et donc $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Il s'ensuit :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = n^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}\, e^{-1}.$$

On en conclut alors aisément que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, $\alpha < 1$.

10.3 • La fonction Arctan est classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{Arctan}' : x \to \frac{1}{1+x^2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, on a au voisinage de 0 :

$$\mathrm{Arctan}(x+h) = \mathrm{Arctan}(x) + \frac{h}{1+x^2} + \mathrm{o}(h).$$

On en déduit :

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{1+x^2}.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$.

• La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Arctan}''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Puisque Arctan'' est continue et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{Arctan}''(x) = 0$, la fonction Arctan'' est bornée. En effet, par définition de la limite, il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que :

$$\forall |x| \geqslant a \quad \left|\mathrm{Arctan}''(x)\right| \leqslant 1.$$

Par ailleurs, la fonction continue $|\,\mathrm{Arctan}''\,|$ est bornée sur le segment $[-\alpha,\alpha]$; posons M un majorant de $|\,\mathrm{Arctan}''\,|$ sur $[-\alpha,\alpha]$. Ainsi $|\,\mathrm{Arctan}''\,| \leqslant \max\{1, M\}$, ce qui prouve que la fonction Arctan'' est bornée. Notons $M_2 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{Arctan}''(t)\right|$.

Ainsi, pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction Arctan entre x et $x+h$ donne :

$$\left|\mathrm{Arctan}(x+h) - \mathrm{Arctan}(x) - \frac{h}{x^2+1}\right| \leqslant \int_x^{x+h} \left|(x+h-t)\,\mathrm{Arctan}''(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Arctan}(x+h) - \mathrm{Arctan}(x-h) - \frac{2h}{x^2+1}\right| &= \Big|\mathrm{Arctan}(x+h) - \mathrm{Arctan}(x) - \frac{h}{x^2+1} \\
&\quad + \mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(x-h) - \frac{h}{x^2+1}\Big| \\
&\leqslant \left|\mathrm{Arctan}(x+h) - \mathrm{Arctan}(x) - \frac{h}{x^2+1}\right| \\
&\quad + \left|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(x-h) - \frac{h}{x^2+1}\right| \\
&\leqslant h^2\, M_2.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n(x) - \frac{2}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{M_2}{n}.$$

Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

10.4 1. Soit $t \in [0,1]$. La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \frac{s^2+t}{2} \end{array}$ est croissante.

Ainsi la fonction φ est à valeurs dans $\left[\frac{t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \subset [0,1]$.

Par conséquent la suite $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$. De plus, du fait que φ est croissante et $P_0(t) = 0 \leqslant t/2 = P_1(t)$, il est facile de vérifier par récurrence que $P_n(t) \leqslant P_{n+1}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite réelle $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie :

$$L = \frac{t+L^2}{2}$$

c'est-à-dire $L^2 - 2L + t = 0$. Puisque par passage à la limite $L \in [0,1]$, on a $L = 1 - \sqrt{1-t}$.

En conclusion, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & 1-\sqrt{1-t}. \end{array}$$

2.
- Soit $(t,s) \in [0,1]^2$ tel que $s \leqslant t$. Il est facile de vérifier par récurrence, à l'aide de la croissance de φ, que $P_n(s) \leqslant P_n(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction P_n est croissante.
- Montrons par récurrence que la fonction $P_{n+1} - P_n$ est croissante. C'est immédiat pour $n = 0$, car $P_1 - P_0 : t \mapsto \frac{t}{2}$. Supposons le résultat établi pour un $n \in \mathbb{N}$. Remarquons, la suite $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour tout t, que :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P_{n+2} - P_{n+1} &= \frac{P_{n+1}^2 - P_n^2}{2} \\ &= \frac{(P_{n+1}-P_n)(P_{n+1}+P_n)}{2} \end{aligned}$$

La fonction $P_{n+1} - P_n$ est positive et d'après l'hypothèse de récurrence elle est croissante. D'après le premier point P_n et P_{n+1} sont croissantes et donc la fonction $P_{n+1} + P_n$ l'est également. Cette dernière est à valeurs positives d'après la première question. Par conséquent la fonction $P_{n+2} - P_{n+1}$ est croissante, ce qui achève la démonstration.
- Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant P_{n+k}(t) - P_n(t) \leqslant P_{n+k}(1) - P_n(1).$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ dans ces inégalités, on obtient :

$$0 \leqslant f(t) - P_n(t) \leqslant f(1) - P_n(1).$$

Par suite, comme $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$, on en déduit la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall t\in[-1,1]\quad Q_n(t)=1-P_n(1-t^2)$$
converge uniformément vers g, où
$$\forall x\in[-1,1]\quad g(t)=1-f(1-t^2)=1-\left(1-\sqrt{1-(1-t^2)}\right)=\sqrt{t^2}=|t|.$$
Il est clair que les fonctions P_n sont polynomiales et donc les Q_n également. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question.

10.5 La suite (φ_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :
$$f(0)=f(1)=0 \qquad \text{et} \qquad f(x)=1/2 \text{ si } x\in\,]0,1[.$$
En effet, soit $x_0\in[0,1]$; notons $x_n=\varphi_n(x_0)$.

- Si $x_0\in\,]0,1/2]$, on a $x_n\in\,]0,1/2]$, pour tout n. On vérifie facilement que la suite (x_n) est croissante et majorée par $1/2$; donc elle converge vers un point fixe de φ, car φ est continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$. Le seul candidat possible est dans ce cas $1/2$.
- Si $x_0\in\,]1/2,1[$, alors $x_1\in\,]0,1/2]$ et l'on est ramené au cas précédent.
- Si $x_0=0$ ou 1, on a $x_n=0$, pour $n\geqslant 1$.

La convergence n'est pas uniforme, car la fonction limite n'est pas continue. Montrons qu'en revanche, la convergence est uniforme sur $[a,1-a]$, pour tout $a\in\,]0,1/2[$. On a, pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,1]$, $\varphi_n(1-x)=\varphi_n(x)$ et φ_n est croissante sur $[0,1/2]$; on en déduit :
$$\sup_{x\in[a,1-a]}\bigl|\varphi_n(x)-1/2\bigr|=\sup_{x\in[a,1/2]}\bigl(1/2-\varphi_n(x)\bigr)=1/2-\varphi_n(a)$$
qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'après l'étude de la convergence simple.

Il y a *a fortiori* convergence uniforme sur tout segment $[a,b]\subset\,]0,1[$.

10.6 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $(x,y)\in I^2$, on a :
$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant k|x-y|.$$
En passant à la limite dans cette dernière inégalité, il vient que pour tout $(x,y)\in I^2$:
$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|.$$
Par suite f est k-lipschitzienne.

Remarque La convergence simple suffit.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\sqrt{x+\frac{1}{n}}$. Nous avons vu que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x\mapsto\sqrt{x}$, qui n'est pas lipschitzienne.
Cependant, pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc f_n' est bornée. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f_n est lipschitziennes.

10.7 1. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. L'inégalité $1-x/n>0$ est vérifiée à partir d'un certain rang N. Pour tout entier $n\geqslant N$, on a :

$$\ln\big(f_n(x)\big)=n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\times\frac{-x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-x.$$

Il s'ensuit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f:x\mapsto e^{-x}$.
Pour tout entier $n\leqslant x$, on a :

$$0=f_n(x)\leqslant e^{-x}.$$

D'après l'inégalité donnée dans l'énoncé, on a pour $n\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $x<n$:

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\leqslant n\times\frac{-x}{n}=-x$$

et donc par croissance de la fonction exp :

$$f_n(x)\leqslant e^{-x}.$$

La conclusion suit.

2. Soit $a>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons g_n la fonction définie sur $[0,a]$ par :

$$g_n(x)=1-e^x\,f_n(x).$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>a$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x\in[0,a]\quad g_n'(x)=e^x\,\frac{x}{n}\,\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\geqslant 0.$$

Il s'ensuit que la fonction g_n est croissante sur l'intervalle $[0,a]$. Ainsi, pour tout $x\in[0,a]$, on a :

$$0\leqslant e^{-x}-f_n(x)=e^{-x}g_n(x)\leqslant e^{-x}g_n(a)\leqslant g_n(a)$$

Puisque $e^{-a}g_n(a)=e^{-a}-f_n(a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on en déduit que $g_n(a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Cela permet d'affirmer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,a]$.

3. Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\exp(-x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il existe $a>0$ tel que $\exp(-a)\leqslant\varepsilon$. Fixons un tel réel a.
D'après la première question, du fait que la fonction exp est décroissante et que les fonctions f_n sont à valeurs positives, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\forall x\in[a,+\infty[\quad 0\leqslant e^{-x}-f_n(x)\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-a}\leqslant\varepsilon.$$

Par ailleurs, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ donne l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a :

$$\forall x \in [0,a] \quad 0 \leqslant \left|e^{-x} - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons donc la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

10.8 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $1 + x/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln\big(f_n(x)\big) = -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x.$$

Il s'ensuit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

D'après l'inégalité donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n}$$

et donc en multipliant par $-n < 0$:

$$\ln\big(f_n(x)\big) \geqslant -x.$$

On conclut alors à l'aide de la croissance de la fonction $\exp$.

2. Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons g_n la fonction définie sur $[0,a]$ par :

$$g_n(x) = e^x f_n(x) - 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in [0,a] \quad g_n'(x) = e^x\,\frac{x}{n}\,\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1} \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que la fonction g_n est croissante sur l'intervalle $[0,a]$. Ainsi, pour tout $x \in [0,a]$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) - e^{-x} = e^{-x}g_n(x) \leqslant e^{-x}g_n(a) \leqslant g_n(a)$$

Puisque $e^{-a}g_n(a) = f_n(a) - e^{-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $g_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela permet d'affirmer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,a]$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\exp(-x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $a > 0$ tel que $\exp(-a) \leqslant \varepsilon/2$. Fixons un tel réel a. Puisque $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-a)$, il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait $\left|e^{-a} - f_n(a)\right| \leqslant \varepsilon/2$. Fixons un tel entier n_1. On a, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$f_n(a) = f_n(a) - e^{-a} + e^{-a} \leqslant \varepsilon.$$

Du fait que les fonctions f_n sont décroissantes, les fonctions g_n sont à valeurs positives et que la fonction exp à valeurs positives, on a pour tout $n \geqslant n_1$:

$$\forall x \in [a,+\infty[\quad 0 \leqslant f_n(x) - e^{-x} \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a) \leqslant \varepsilon.$$

Par ailleurs, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,a]$ donne l'existence d'un rang n_0, que l'on peut supposer supérieur à n_1, tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a :

$$\forall x \in [0,a] \quad 0 \leqslant \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons donc la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

10.9 Nous identifions bien entendu polynômes et fonctions polynomiales.

- Montrons qu'à partir d'un certain rang, le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est constant. En effet, puisque $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, à partir d'un certain rang les fonctions $f - P_n$ sont bornées. Ainsi, à partir d'un certains rang, les fonctions polynomiales $P_{n+1} - P_n = (P_{n+1} - f) - (P_n - f)$ sont bornées. Il est clair que les seules fonctions polynomiales bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes. La conclusion suit.
- Il s'ensuit qu'il existe un polynôme P et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels qu'à partir d'un certain rang on a $P_n = P + a_n$.
  Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, elle converge simplement et donc la suite $(P(0) + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(0)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(P(x) + a_n\big) = P(x) + \big(f(0) - P(0)\big).$$

  Cela prouve que la fonction f est la fonction polynomiale $P + \big(f(0) - P(0)\big)$.

10.10 On peut supposer, quitte à multiplier par -1, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a :

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

   Par passage à la limite dans les inégalités, en faisant tendre x vers a, il vient que $\ell_{n+1} \geqslant \ell_n$.
   De plus, puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe un réel M tel que :

$$f_n(x) \leqslant M$$

   pour tout $(x,n) \in I \times \mathbb{N}$. Là encore par passage à la limite dans les inégalités, en faisant tendre x vers a, il vient que $\ell_n \leqslant M$. La suite réelle $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle est convergente.
2. Notons ℓ la limite de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par définition de la limite, il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on ait :

$$|\ell - \ell_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

   Fixons un tel entier n_1.

Par convergence uniforme, il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier $n \geqslant n_2$ on ait :

$$\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons un tel entier n_2 et posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Cas $a = +\infty$ Par définition de la limite, il existe réel M tel que pour tout $x \geqslant M$ on ait :

$$\left|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant M$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\ell - f(x)\right| &= \left|\left(\ell - \ell_{n_0}\right) + \left(\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\right) + \left(f_{n_0}(x) - f(x)\right)\right| \\ &\leqslant \left|\ell - \ell_{n_0}\right| + \left|\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{N}_\infty(f_{n_0} - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On en conclut que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Le cas $a = -\infty$ se traite de la même manière.

Cas a **fini** Par définition d'une limite finie en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$ on ait :

$$\left|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, on a comme précédemment :

$$\begin{aligned}\left|\ell - f(x)\right| &\leqslant \left|\ell - \ell_{n_0}\right| + \left|\ell_{n_0} - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On en conclut que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

10.11 1. Les $1/k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des points de discontinuité pour g. Par conséquent, g ayant une infinité de points de discontinuité, la fonction g n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$.

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \,]1/n, 1] \,; \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1/n]. \end{cases}$$

Il est facile d'établir que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1/n$, pour tout $x \in [0, 1/n]$. On en déduit, en distinguant les cas $x \leqslant 1/n$ et $x > 1/n$, que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est en escalier, donc continue par morceaux.

3. En conclusion, lorsqu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{CM}\big([a, b]\, \mathbb{K}\big)$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}\big([a, b]\, \mathbb{K}\big)$, l'égalité $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n$ n'a pas toujours de sens.

10.12 1. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Notons $\varphi : x \mapsto \sqrt{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
  Puisque $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, la suite $\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, car il s'agit de la suite récurrente vérifiant :
  $$f_0(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(t) = \varphi\big(f_n(t)\big).$$
- Puisque $\sqrt{t} = f_1(t) \geqslant 0 = f_0(t)$ et φ est une fonction croissante, on montre par récurrence que la suite $\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
  $$x = \varphi(x) \iff x^2 = x + t.$$
  Le polynôme $X^2 - X - t$ a comme unique racine positive $f(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$.
  Par conséquent, $f(t)$ est l'unique point fixe de φ.
- Montrons par récurrence que $f_n(t) \leqslant f(t)$. C'est immédiat si $n = 0$. Supposons l'inégalité vérifiée pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, par croissance de φ :
  $$f_{n+1}(t) = \varphi\big(f_n(t)\big) \leqslant \varphi\big(f(t)\big) = f(t),$$
  ce qui démontre le résultat annoncé.
- La suite $\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée, donc convergente. Puisque φ est continue, définie sur un intervalle fermé, la limite de la suite est un point fixe de φ. Par conséquent, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$.

De plus, il est facile de montrer que la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle. En conclusion, pour $t \in \mathbb{R}_+$:
$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0\,; \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

2.
- Montrons par récurrence que f_n est fonction continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est immédiat pour $n = 0$. Si f_n est continue pour un $n \in \mathbb{N}$, alors par composition et continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, la fonction $t \mapsto \sqrt{t + f_n(t)}$ est continue. Cela prouve le résultat annoncé.
- Si la convergence était uniforme, les fonctions f_n étant continues, la limite f serait continue, or, pour $t > 0$:
  $$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 1.$$

On en conclut que la convergence n'est pas uniforme.

10.13 1.
- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$. Dans ces conditions, la série numérique $\sum 1^n f(1)$ est convergente. Le terme général de cette dernière série étant constant et puisque qu'il tend vers 0, il est nulle.
- Si $f(1) = 0$, alors la série $\sum x^n f(x)$ converge lorsque $x = 1$. Pour $x \in [0,1[$, la série $\sum x^n f(x)$ est une série géométrique de raison x^n, donc convergente car $|x| < 1$.

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge simplement si, et seulement si, $f(1) = 0$. Notons g sa somme. Remarquons que l'on a :

$$\forall x \in [0,1[\quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{f(x)}{1-x} \qquad \text{et} \qquad g(1) = 0.$$

2. • Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément. Puisque les fonction u_n sont continues, la fonction g est continue. Cela implique :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} = -g(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -g(1) = 0.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

• Supposons que f soit dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. Dans ces conditions, g est continue en 1 et donc sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n f(x) = x^{N+1} g(x),$$

cette relation étant encore vérifiée lorsque $x = 1$.

Démontrons que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Soit donc $\varepsilon > 0$. Par continuité de g en 1, il existe un réel $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [1-\eta, 1] \quad \big|g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η. La fonction g étant continue sur $[0, 1-\eta]$, elle est bornée sur cet intervalle. Considérons un majorant M de g sur $[0, 1-\eta]$. On a alors :

$$\forall x \in [0, 1-\eta] \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant M(1-\eta)^{n+1}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0,1] \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant \max\big\{M(1-\eta)^{n+1}, \varepsilon\big\}. \tag{$*$}$$

Puisque $-1 < 1-\eta < 1$, il vient que $M(1-\eta)^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc il existe un entier n_0 tel que $M(1-\eta)^{n+1} \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Fixons un tel entier n_0. Alors la relation $(*)$ donne :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 et donc que la série $\sum u_n$ converge uniformément.

10.14 1. Si $M = 0$, alors on a :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad f(t+s) = f(t) + f(s). \tag{$\star$}$$

• La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie, dérivable.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x+t) - f(t),$$

on obtient en intégrant entre 0 et 1 :

$$f(x) = \int_0^1 \big(f(x+t) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t = F(x+1) - F(x) - F(1).$$

Puisque F est de dérivable, l'expression ci-dessus montre par opérations sur les fonctions dérivables, que f est dérivable.

- Puisque $f(0+0) = 2f(0)$, on a $f(0) = 0$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :

  $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(0).$$

  Ainsi $f'(x) = f'(0)$ et la fonction f' est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Par suite, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x + \beta.$$

  Puisque $f(0) = 0$, on a $\beta = 0$ et la conclusion suit.

2. Montrons que la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément, ce qui démontrera que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\left|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\right| = \left|f(2^n x + 2^n x) - 2f(2^n x)\right| \leqslant M,$$

et donc en divisant par 2^{n+1} , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_{n+1}(x) - u_n(x)\right| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}\cdot \tag{1}$$

Ainsi, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

3. Notons u la limite uniforme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g = f - u$.

- Montrons que g est une fonction bornée. Par définition :

  $$g = f - u = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$$

  ce qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, compte tenu de l'inégalité (1) :

  $$\left|g(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n(x) - u_{n+1}(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^{n+1}} = M.$$

  On a donc démontré que la fonction g est bornée.
- Montrons que la fonction u est continue. Puisque la fonction f est continue, il en est de même des fonctions f_n. Puisque la fonction u est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est continue.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$\left|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\right| \leqslant M.$$

  En divisant par 2^n, il vient que :

  $$\left|u_n(x+y) - u_n(x) - u_n(y)\right| \leqslant \frac{M}{2^n}\cdot$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette dernière inégalité, on obtient :

$$u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Cela étant vrai pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on est ramené à l'étude faite lors de la première question (ne pas oublier que u est continue). Il s'ensuit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En conclusion, il existe une fonction bornée g et un réel α tel que $f(x) = \alpha x + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10.15 1. • On a :

$$\frac{f\left(3\,\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1 + f\left(3\,\frac{2}{3} - 2\right)}{2} = \frac{1 + f(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Cela garantit la cohérence de la définition de $T(f)$.

• Par composition et opérations sur les fonctions continues, $T(f)$ est une fonction continue sur $[0,1/3[\cup]1/3,2/3[\cup]2/3,1]$. Montrons la continuité de $T(f)$ en $1/3$.

Puisque $f_{|[0,1/3]}$ est l'application $t \mapsto f(3t)/2$ et f est continue, la fonction $T(f)$ est continue à gauche en $1/3$. De même, $f_{|[1/3,2/3]}$ est l'application constante $1/2$, la fonction $T(f)$ est continue à droite en $1/3$. Par suite, $T(f)$ est continue en $1/3$.

On démontre la continuité de $T(f)$ en $2/3$ de la même manière.

• Clairement $T(f)(0) = f(0)/2 = 0$ et $T(f)(1) = (1 + f(1))/2 = 1$.

Nous avons bien démontré que $T(f) \in \mathcal{E}$.

2. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{E}$.
Pour tout $t \in [0,1/3]$:

$$\bigl|T(f)(t) - T(g)(t)\bigr| = \left|\frac{f(3t) - g(3t)}{2}\right| \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(f-g)}{2}.$$

Pour tout $t \in [2/3,1]$:

$$\bigl|T(f)(t) - T(g)(t)\bigr| = \left|\frac{f(3t-2) - g(3t-2)}{2}\right| \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(f-g)}{2}.$$

Puisque $f(t) = g(t) = 1/2$ si $t \in [1/3,2/3]$, il vient :

$$\forall t \in [0,1] \quad \bigl|T(f)(t) - T(g)(t)\bigr| \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(f-g)}{2}$$

et donc $\mathcal{N}_\infty\bigl(T(f) - T(g)\bigr) \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(f-g)}{2}$.
En conclusion, l'application T est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

3. • Puisque T est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathcal{E}$.

- Montrons que la série télescopique $\sum(f_{n+1}-f_n)$ est normalement convergente. Pour tout entier naturel n, on a du fait que T est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne :

$$\mathcal{N}_\infty(f_{n+2}-f_{n+1})=\mathcal{N}_\infty\big(T(f_{n+1})-T(f_n)\big)\leqslant\frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_{n+1}-f_n).$$

  Il s'ensuit immédiatement :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1}-f_n)\leqslant\frac{1}{2^n}\mathcal{N}_\infty(f_1-f_0).$$

  Par suite la série $\sum(f_{n+1}-f_n)$ est normalement, donc uniformément convergente. Cela signifie que la suite $(f_n-f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une limite $f-f_0$, et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
- Puisque les f_n sont continues (ce sont des éléments de $\mathcal{E}$), par convergence uniforme, la fonction f est continue sur $[0,1]$. Puisque $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a par passage à la limite $f(0)=0$. On démontre de même $f(1)=1$.

En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un élément $f\in\mathcal{E}$.

10.16 1. • D'après le cours sur les séries de Riemann, le domaine de définition de ζ est $D_\zeta=]1,+\infty[$.

• Si $s<0$, alors $\frac{1}{n^s}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et donc la série numérique $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ diverge grossièrement.

De même, la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^0}=\sum(-1)^{n-1}$ diverge grossièrement.

Fixons $s>0$. La suite $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ converge.

En conclusion $D_\eta=]0,+\infty[$.

2. • La continuité de la fonction ζ a été établie à l'exercice 20 de la page 524.

• Notons $u_n : s\mapsto\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ définie sur $]0,+\infty[$. Montrons la convergence uniforme sur tout segment de $\sum u_n$.

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ un segment.

Pour tout $s\in[a,b]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, d'après le théorème des séries alternées et la décroissance de la fonction $s\mapsto 1/n^s$, le reste $R_n(s)$ de la série numérique $\sum u_k(s)$ vérifie :

$$\big|R_n(s)\big|\leqslant\frac{1}{(n+1)^s}\leqslant\frac{1}{(n+1)^a}$$

Puisque $\frac{1}{(n+1)^a}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Puisque les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction η est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $s>1$. Les séries $\sum\frac{1}{(2n)^s}$ et $\sum\frac{1}{(2n-1)^s}$ sont convergentes (leurs termes généraux sont en $\mathrm{O}(1/n^s)$). On note respectivement $A_0(s)$ et $A_1(s)$ leurs sommes.

On a :

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^s}-\frac{1}{(2k)^s}\right)\\ &= A_1(s)-A_0(s). && \text{(linéarité)}\end{aligned}$$

De même $\zeta(s) = A_1(s) + A_0(s)$. En remarquant que $A_0(s) = \frac{1}{2^s}\zeta(s)$, on obtient $A_1(s) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$, puis :

$$\eta(s) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) - \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$$

4. Au voisinage de 1 :

$$\frac{1}{2^{s-1}} = e^{(1-s)\ln 2} = 1 + (1-s)\ln 2 + \mathrm{o}(1-s)$$

et donc, toujours au voisinage de 1 :

$$\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) \underset{s\to1}{\sim} \zeta(s)(s-1)\ln 2$$

Par ailleurs, la fonction η étant continue en 1 :

$$\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = \eta(s) \underset{s\to1}{\longrightarrow} \eta(1) = \ln 2.$$

On en déduit que $(s-1)\zeta(s) \underset{s\to1}{\longrightarrow} 1$, *i.e.* :

$$\zeta(s) \underset{s\to1}{\sim} \frac{1}{s-1}\cdot$$

Remarque Une comparaison série/intégrale permet également d'obtenir cet équivalent. En effet, fixons $s > 1$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est continue, décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable (c'est un exemple de Riemann). Par suite :

$$0 \leqslant \zeta(s) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant 1$$

c'est-à-dire :

$$0 \leqslant \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leqslant 1.$$

La conclusion est alors immédiate.

10.17 Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}\cdot$

1. • Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n+x}{n+1+x}\,\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. La fonction S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, démontrons que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment, les fonctions u_n étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, il suffit de démonter la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
  Soit $a>0$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$:
  $$|u_n'(x)| = \left|\frac{1}{n!\,(x+n)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n!\,(a+n)^2} \leqslant \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{n!}\cdot$$
  La convergence de la série $\sum \frac{1}{n!}$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur $[a,+\infty[$. La conclusion suit.

2. Soit $x>0$. On a :
$$\begin{aligned} S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(x+n)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(1-\frac{x}{x+n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} \qquad \text{(les deux séries convergent)} \\ &= (1-e^{-1}) + x\left(S(x)-\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$
En d'autres termes :
$$S(x+1) = xS(x) - e^{-1} \tag{$*$}$$

3. **Équivalent en 0.** On a :
$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1-e^{-1}.$$
Puisque S est continue (elle est de classe $\mathcal{C}^1$), la relation $(*)$ donne :
$$xS(x) - e^{-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} S(1) = 1-e^{-1}.$$
On en déduit :
$$S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\cdot$$

4. **Équivalent en $+\infty$.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il est clair que :
$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{n+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{x}\cdot$$
Cela nous permet d'« intuiter » que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

Introduisons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^n$:

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{n+x}\cdot$$

On a :

$$\left|v_n(x)\right| = \frac{1}{n!} \frac{x}{n+x} \leqslant \frac{1}{n!}\cdot$$

De la convergence de la série $\sum \frac{1}{n!}$ on déduit la convergence normale, donc uniforme, de la série $\sum v_n$ sur $]0, +\infty[$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$v_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot$$

Ainsi, d'après le théorème de la double limite :

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot$$

Ainsi :

$$S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{x}\cdot$$

10.18 Notons $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Le domaine de définition de u_n est $]-n, +\infty[$, donc $\mathcal{D} \subset\,]-1, +\infty[$.

   D'autre part, pour x fixé dans $]-1, +\infty[$, on a $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum (-1)^n \dfrac{x}{n}$ converge ; de plus la série $\sum \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc la série $\sum u_n(x)$ converge. Par suite $\mathcal{D} = \,]-1, +\infty[$.
2. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :

     $$\forall x \in\,]-1, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}\cdot$$
   - La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède.
   - La série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ car, d'après le théorème des séries alternées, en notant R_n son reste d'ordre n, on a :

     $$\left|R_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}'(x)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

     donc la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

D'après le théorème précité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}\cdot$$

Remarque Le caractère $\mathcal{C}^1$ de f est plus facile à démontrer que sa continuité.

3. **Équivalent en $x = -1$.**

Pour $x > -1$, on peut écrire $f(x) = -\ln(1+x) + g(x)$ avec $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

Par un raisonnement identique à celui fait pour f, on montre que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2, +\infty[$. La fonction g est en particulier continue donc bornée au voisinage de -1, ce qui entraîne que $f(x) \sim -\ln(1+x)$ quand x tend vers -1^+.

4. **Calcul de $f(1)$.** La série étant convergente, on a :

$$f(1) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\ln(2k+1)+\ln(2k-1)\right) - 2\sum_{k=1}^{p}\ln(2k)\\
&= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p-1)\cdots 1}{(2p)\cdots 2}\right)\\
&= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{2p+1}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right).
\end{aligned}$$

D'après l'équivalent de Stirling :

$$(2p)! \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\sqrt{\pi}p^{2p+1/2}e^{-2p} \quad \text{et} \quad 2^{2p}p!^2 \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\pi p^{2p+1}e^{-2p}.$$

Par suite :

$$\sqrt{2p+1}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2p+1}{p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot$$

On en déduit que :

$$f(1) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\cdot$$

10.19 1. Notons $u_n(x) = \frac{|x-a_n|}{b^n}$, pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Discutons suivant c.

- Si $c < 1$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{|x-a_n|}{b^n} \sim \frac{|x|}{b^n}.$$
Si $b > 1$, alors la série géométrique $\sum \frac{1}{b^n}$ est convergente et, par comparaison, la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. Si $b \leqslant 1$, la série diverge grossièrement sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $c = 1$, alors $u_n(x) = \mathrm{O}(1/b^n)$. Toujours par comparaison, la convergence est assurée si $b > 1$.
- Si $c > 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) = \mathrm{o}\left(\left(\frac{c}{b}\right)^n\right)$. La convergence simple de la série de fonction $\sum u_n$ est assurée sur $\mathbb{R}$ si $c < b$.

En conclusion, si $\max\{c,1\} < b$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. - Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, on a :
$$\left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{\alpha + |a_n|}{b^n} = \alpha\,\frac{1+\mathrm{o}(c^n)}{b^n} = \beta_n.$$
Ainsi,
  * si $c \leqslant 1$, on $\beta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{b^n}\right)$, et donc par comparaison, la série $\sum \beta_n$ converge,
  * si $c > 1$, on $\beta_n = \mathrm{O}\left(\frac{c^n}{b^n}\right)$, et donc par comparaison, la série $\sum \beta_n$ converge.

  La convergence normale sur tout segment, donc uniforme sur tout segment, de la série de fonctions $\sum u_n$ en découle. Les fonctions u_n étant toutes continues, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Fixons $x \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons v_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$v_n(h) = \frac{|x+h-a_n| - |x-a_n|}{hb^n}.$$
La fonction $t \mapsto |x - a_n + t|$ étant dérivable à droite en 0, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n(h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\delta_n}{b^n} = \begin{cases} 1/b^n & \text{si } x \geqslant a_n\ ; \\ -1/b^n & \text{si } x < a_n. \end{cases}$$
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|v_n(h)\right| \leqslant \frac{1}{b^n}.$$
La condition $(*)$ assure que $b > 1$, donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement et par suite uniformément.
Du théorème de la double limite on obtient, pour $h > 0$:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{b^n}.$$
Par suite, la fonction f est dérivable à droite en x et :
$$f'_d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{b^n}.$$

- De même, en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction w_n définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$v_n(h) = \frac{|x+h-a_n| - |x-a_n|}{hb^n},$$

on montre que la fonction f est dérivable à gauche en x et

$$f'_g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{b^n}, \qquad \text{où} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a_n \,; \\ -1 & \text{si } x \leqslant a_n. \end{cases}$$

- Étudions deux cas.
  * Si $x \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\beta_k = \gamma_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $f'_d(x) = f'_g(x)$ et f est dérivable en x.
  * S'il existe n_0 tel que $x = a_{n_0}$, alors, en remarquant que $\gamma_n \leqslant \beta_n$ pour tout n, il vient que :

$$f'_d(x) - f'_g(x) \geqslant \frac{2}{b^{n_0}} > 0.$$

  Par suite, f n'est pas dérivable en a_{n_0}.

En conclusion, le domaine de définie de f' est $\mathbb{R} \setminus \{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

10.20 1. Il est clair que $\sup\limits_{x \in]0,2\pi[} |\cos(nx)| = 1$. Par conséquent $\mathcal{N}_\infty(u_n) = a_n$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement si, et seulement si, la série $\sum a_n$ est convergente.

2. Posons, pour $x \in]0, 2\pi[$, la somme $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Puisque $\exp(ix) \neq 1$, le calcul donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|S_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot$$

3. Toujours pour $x \in]0, 2\pi[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\big(S_n(x) - S_{n-1}(x)\big) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n S_n(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n S_{n-1}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n S_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} S_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \big(S_n(x)\,(a_n - a_{n+1})\big) + a_N S_N(x)\cdot
\end{aligned}$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons v_n la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par :
$$v_n(x) = S_n(x)\,(a_n - a_{n+1})\,.$$
Montrons que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ est décroissante sur $]0, \pi]$, par symétrie :
$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl|S_n(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\cdot$$
Il s'ensuit que, du fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :
$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl|v_n(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\,(a_n - a_{n+1})\,.$$
Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série télescopique $\sum \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\,(a_n - a_{n+1})$ est convergente ; par théorème la série $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il est clair que la suite de fonctions $(a_n S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Par suite, d'après la question précédente, la série de fonctions $\sum a_n \cos(nx)$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ et donc elle converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

Remarques

- On établirait de la même manière la convergence uniforme sur tout segment de $]0, 2\pi[$ de la série de fonctions $\sum a_n \sin(nx)$.
- On peut bien entendu simplement supposer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante à partir d'un certain rang.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$, posons $u_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0, 2\pi[\quad |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2},$$
ce qui démontre, du fait de la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, la convergence normale (et donc simple) de la série de fonctions $\sum u_n$.
Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $x \in]0, 2\pi[$, on a $u_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$. Nous avons vu que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$ d'après la question précédente appliquée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = \frac{1}{n}\cdot$
Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$.

10.21 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\cdot$

- Il est clair que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}\cdot$$
Puisque $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ est convergente par comparaison aux exemples de Riemann. La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ montre que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Les fonctions u_n sont continues. La convergence normale implique donc que f est continue.
- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{n^p}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Pour $x > 0$, par croissances comparées, on a $n^p e^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Il s'ensuit que :

$$\frac{n^p}{n^2+1} e^{-nx} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit la convergence simple de la série $\sum u_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a donc par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$:

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{n^p}{n^2+1} e^{-na}.$$

Puisque la série $\sum \frac{n^p}{n^2+1} e^{-na}$ est convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, donc elle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La fonction f n'est pas dérivable en 0.

Pour le démontrer, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, le théorème de la limite de la dérivée assurant alors, du fait que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Pour $x > 0$ on a :

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} e^{-nx} > 0.$$

Par conséquent, f' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la limite ℓ de f' en 0 est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \ell \leqslant f'(x) &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} e^{-kx} && (f' \text{ décroissante}) \\ &\leqslant -\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1} e^{-kx}. && (\text{terme général négatif}) \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers 0 dans cette inégalité, on obtient :

$$\ell \leqslant -\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1}. \qquad (*)$$

D'autre part, la série $\sum \frac{k}{k^2+1}$ est divergente car son terme général est positif et équivalent à $\frac{1}{k}$. Toujours du fait que le terme général est positif, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par passage à la limite dans les inégalités, il vient de $(*)$ que $\ell = -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

10.22 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}\cdot$

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $\big(|u_n(x)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \frac{p!}{(x+n)^{p+1}}\cdot$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Pour $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{(x+n)^{p+1}} \leqslant \frac{p!}{(a+n)^{p+1}}\cdot$$

  Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ est convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
- Comme la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et la série $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$, il vient que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$.
  Puisque toutes les séries dérivées de la série de fonctions $\sum u_n'$ convergent normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, *i.e.* f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10.23 1. La série diverge pour $x = 0$, puisque $u_n(0) = \frac{1}{n}\cdot$
Pour tout $x > 0$, on a $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2x^2}$; d'où la convergence de la série $\sum u_n(x)$, par comparaison aux séries de Riemann.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup\limits_{x\geqslant a} |u_n(x)| = u_n(a)$, car u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$; comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}\cdot$

   Cela conduit à penser que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, où $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2n^2}\cdot$

   Pour démontrer cela, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n : x \mapsto \frac{x^2}{n(1+nx^2)}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

   • La série de fonction $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$, donc uniformément, car :

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^* \quad \left|v_n(x)\right| = \frac{x^2}{n(1+nx^2)} \leqslant \frac{x^2}{n(nx^2)} = \frac{1}{n^2}$$

   et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (exemple de Riemann).

   • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons déjà remarqué que $v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}\cdot$

   Ainsi, d'après le théorème de la double limite :

$$x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

   Par conséquent :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{x^2}\cdot$$

3. Pour l'étude en 0, nous utiliserons un encadrement par l'intégrale.
   Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx^2)}$ est continue, positive et décroissante. Comme la série $\sum u_n(x)$ converge, cette fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(x) \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}$$
$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}\cdot$$

   On en déduit, par sommation :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}\cdot$$

   Comme :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t}{1+tx^2}\right),$$

   il vient $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, avec :

$$u(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right)$$
$$v(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

   Comme $u(x) \sim -2\ln x$ et $v(x) \sim -2\ln x$, au voisinage de 0^+, on peut conclure de l'encadrement :

$$\frac{u(x)}{-2\ln x} \leqslant \frac{f(x)}{-2\ln x} \leqslant \frac{v(x)}{-2\ln x}$$

   que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{-2\ln x} = 1$ et $f(x) \underset{0^+}{\sim} -2\ln x$; en particulier $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

10.24 1. La fonction Arctan étant à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison aux exemples de Riemann, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, les fonctions u_n étant continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue.

3. • Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{1}{n(1+n^2+a^2)}.$$

Par comparaison aux exemples de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n(1+n^2+a^2)}$ est convergente. Cela établit la convergence uniforme de la série $\sum u_n'$ sur le segment $[a,b]$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

• Fixons $x > 0$ et opérons une comparaison séries-intégrale. Il est clair que l'application $t \mapsto \frac{1}{t(1+x^2t^2)}$ est continue, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par comparaison aux exemples de Riemann, cette dernière est intégrable sur $[1, +\infty[$. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}'(x) \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} \leqslant u_n'(x)$$

et en sommant, à l'aide de la relation de Chasles :

$$f'(x) - u_1'(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} \leqslant f'(x),$$

c'est-à-dire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} \leqslant f'(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} + \frac{1}{1+x^2}. \qquad (*)$$

• Toujours à $x > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)} &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2x^2}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= -\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad (**)\end{aligned}$$

- Il vient de l'inégalité $(*)$ et de l'égalité $(**)$, lorsque $x > 0$:
$$-\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \leqslant f'(x) \leqslant -\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}.$$
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f' sur $\mathbb{R}^*$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ la convergence de l'intégrale $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et, du fait que $f(0) = 0$:
$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par suite, il vient de $(*)$ et de l'intégrabilité de la fonction ln sur $]0,1]$, qu'au voisinage de 0 :
$$\int_0^x -\ln t\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(x) \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x -\ln t\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(x)$$
et donc :
$$-x\ln x + \mathrm{o}(x) \leqslant f(x) \leqslant -x\ln x + \mathrm{o}(x),$$
soit encore, pour $x \in\,]0,1[$:
$$1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right) \leqslant \frac{f(x)}{-x\ln x} \leqslant 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

En conclusion, par encadrement $\dfrac{f(x)}{-x\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, *i.e.* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$.

La fonction Arctan étant impaire, il en est de même de f et donc :
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln|x|.$$

10.25 1.
- Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ on a, $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{2x}{x^2-p^2}$.

  Puisque $\frac{2x}{x^2-p^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$, la série $\sum \dfrac{2x}{x^2-p^2}$ converge absolument, donc converge et $f(x)$ est bien défini.
- Remarquons que l'égalité $f_n(x+1) = f_n(x) + \dfrac{1}{x+1+n} - \dfrac{1}{x-n}$ entraîne, par passage à la limite, la 1-périodicité de f.
- Si $2x$ n'est pas entier, alors x et $x + \dfrac{1}{2}$ ne le sont pas et l'on peut écrire :
$$\begin{aligned} f_n(x) + f_n\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x+j} + \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x+1/2+j} \\ &= \sum_{j=-n}^{n} \frac{2}{2x+2j} + \sum_{j=-n}^{n} \frac{2}{2x+2j+1} \\ &= \sum_{j=-2n}^{2n+1} \frac{2}{2x+j} = 2f_{2n}(2x) + \frac{2}{2x+2n+1}. \end{aligned}$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

2. • On vérifie facilement que la fonction $x \mapsto h(x) = \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est également 1-périodique, donc $g = f - h$ l'est aussi.
   • Montrons que la fonction $\gamma : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$ est continue sur $]-1,1[$ en utilisant le théorème de continuité des séries de fonctions. Notons que les fonctions $x \mapsto \frac{2x}{x^2-k^2}$ sont continues sur $]-1,1[$.
   Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\sup_{x\in[-a,a]} \left| \frac{2x}{x^2-k^2} \right| \leqslant \frac{2a}{k^2-a^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$
   ce qui prouve la convergence normale sur $[-a,a]$ de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2-k^2}$, donc la continuité de sa somme sur $[-a,a]$, puis sur $]-1,1[$.
   • La fonction $g = f - h$ est donc continue sur $]-1,1[\setminus \{0\}$ et pour $x \in]-1,1[$:
$$h(x) = \pi \frac{1 + \mathrm{o}(x)}{\pi x + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{x}(1 + \mathrm{o}(x)) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1),$$
   donc $x \mapsto g(x) = \gamma(x) + \mathrm{o}(1)$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,1[$ en posant $g(0) = 0$. Par 1-périodicité, g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. La fonction h vérifie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ la même relation fonctionnelle que f car si $2x$ n'est pas entier, on a :
$$h(x) + h\left(x + \frac{1}{2}\right) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - \pi \tan \pi x$$
$$= \pi \frac{\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)}{\cos(\pi x)\sin(\pi x)} = 2h(2x).$$
   La fonction $g = f - h$ vérifie la même relation fonctionnelle que f et h sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par continuité, elle vérifie également cette relation sur $\mathbb{R}$.
   Soit un réel $A \geqslant 1$. Comme la fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0,A]$, elle atteint sa borne supérieure sur ce segment, donc l'ensemble :
$$T = \left\{ x \in [0,A] \ \middle| \ |g(x)| = M_A \right\}$$
   est non vide et c'est un fermé de $\mathbb{R}$ car égal à $[0,A] \cap |g|^{-1}\left(\{M_A\}\right)$, donc il contient sa borne inférieure, d'où l'existence de x_0.
   Comme $A \geqslant 1$, on a $x_0 \leqslant 2A - 1$, donc $\dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{2} \leqslant A$, d'où :
$$\left| g\left(\frac{x_0}{2} + \frac{1}{2}\right) \right| \leqslant M_A, \quad \text{et} \quad M_A = |g(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| + M_A \right),$$
   par suite $\left| g\left(\dfrac{x_0}{2}\right) \right| \geqslant M_A$. Ce n'est possible que si $x_0 = 0$, autrement dit :
$$M_A = |g(0)| = 0.$$
   Donc $g = 0$ sur $[0,A]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

10.26 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n : x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)$. Il est clair que u_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue. Par parité de u_n, on peut restreindre l'étude de à $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{1}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :
$$u_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}.$$
Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est convergente. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

2. Démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela il suffit d'établir la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a>0$. Soit donc $a>0$. Par croissance de la fonction $\ln$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$:
$$0 \leqslant u_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n^2a^2}\right).$$
La convergence de la série numérique $\sum u_n(a)$ assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[a,+\infty[$. Par conséquent, les fonctions u_n étant continues, la fonction f est continue.

3. **Équivalent en $+\infty$.** On constate que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$.

   Il est alors naturel de chercher à établir $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

   Posons pour tout $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n(x) = x^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)$$
   L'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ étant valable pour tout $t>-1$, on a :
$$0 \leqslant x^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
   On en conclut que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, du fait que $\ln(1+t) \underset{t\to0}{\sim} t$, on a :
$$v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2},$$
   et donc $v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1/n^2$. Ainsi, d'après le théorème de la double limite, pour $x>0$, on a :
$$x^2f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$
   c'est-à-dire :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Équivalent en 0.

La technique utilisée plus haut est inopérante, car $u_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\ln x$ et, pour $x \neq 1$ fixé, la série $\sum(-2\ln x)$ est grossièrement divergente.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right)$ est continue, décroissante. Puisque la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente, par comparaison série/intégrale, cette dernière fonction est intégrable. On en déduit l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right) \mathrm{d}t + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (*)$$

Calculons $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right) \mathrm{d}t$. Pour cela, posons le changement de variable linéaire $t = \frac{u}{x}$, ce qui donne :

$$I(x) = \frac{1}{x} \underbrace{\int_x^{+\infty} \big(\ln(1+u^2) - 2\ln u\big) \,\mathrm{d}u}_{J(x)}.$$

Les fonctions $U : u \mapsto \ln(1+u^2) - 2\ln u$ et $V : u \mapsto u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$U(u)V(u) = u\ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \underset{u\to+\infty}{\sim} u\,\frac{1}{u^2} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J(x) &= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right). \end{aligned}$$

Comme $2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pi$ et, par croissances comparées :

$$x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\ln(1+x^2) - 2x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

on a $J(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pi$.

L'encadrement $(*)$, qui peut s'écrire :

$$J(x) \leqslant xf(x) \leqslant J(x) + x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

donne alors :

$$xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi, \qquad \text{et donc} \qquad f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{x}.$$

10.27 On établit facilement, par récurrence sur n, que la fonction f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et qu'elle vérifie :

$$f_{n+1}^{(n+1)} = f_0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(0) = f'_{n+1}(0) = \cdots = f_{n+1}^{(n)}(0) = 0.$$

En appliquant la formule de Taylor reste intégral, on en déduit pour $x \in [0,b]$:

$$\begin{aligned} \left|f_{n+1}(x)\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_0)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{N}_\infty(f_{n+1}) \leqslant \dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{N}_\infty(f_0)$, ce qui prouve la convergence normale sur $[0,b]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Posons $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$. Il s'agit d'une série simplement convergente sur $[0,b]$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont la série dérivée converge normalement sur $[0,b]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f_0 + f.$$

Comme $f(0) = 0$, la fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est l'unique solution sur $[0,b]$ de l'équation différentielle $y' - y = f_0$, avec $y(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,b] \quad f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.28 1.
- Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Si $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, notons $T(f)$ l'application définie par :

  $$\forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

  Cette définition est cohérente, car f est continue sur $[0,1]$ et, pour $x \in [0,1]$ et $0 \leqslant t \leqslant x$, on vérifie facilement que $t - t^2 \in [0,1/4]$.
  Il s'ensuit que, la fonction $T(f)$ étant évidemment continue, T est une application de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ dans lui-même. Par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et les fonctions u_n sont continues.
- Montons par récurrence que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

  $$0 \leqslant u_n(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (*)$$

* Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$u_0(x) - u_1(x) = x - \underbrace{\int_0^x \underbrace{(t-t^2)}_{\in[0,1]} \, \mathrm{d}t}_{\in[0,x]}.$$

On en déduit que $u_0(x) - u_1(x)$ est un élément de $[0,x]$.

* Supposons $(*)$ établie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour $x \in [0,1]$, d'après l'hypothèse de récurrence et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^x u_n(t-t^2) - u_{n+1}(t-t^2) \, \mathrm{d}t}_{=u_{n+1}(x)-u_{n+2}(x)} \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \, \mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Cela démontre le résultat par récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant u_n(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

De la convergence de la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!}$, on déduit la convergence normale, donc uniforme, de la série $\sum (u_n - u_{n+1})$. Ainsi, les suites $(u_0 - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément.
Les fonctions u_n étant continues et la convergence uniforme, la limite u est continue. Puisque $u_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = u(1),$$

ce qui montre que la fonction u est non nulle.

3. • Soit $x \in [0,1]$. De la convergence uniforme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,x]$, on obtient la convergence uniforme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $t \mapsto u(t-t^2)$, où $v_n : t \mapsto u_n(t-t^2)$. Par suite :

$$1 + \int_0^x u_n(t-t^2) \, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \int_0^x u(t-t^2) \, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, $u_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x)$ et donc, par unicité de la limite :

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2) \, \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

• L'expression $(*)$, valable pour tout $x \in [0,1]$, montre que la fonction u est dérivable et, en dérivant, on obtient :

$$\forall x \in [0,1] \quad u'(x) = u(x-x^2).$$

Chapitre 11 : Séries entières



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

I Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de la variables complexe. Il se trouve que beaucoup de fonctions usuelles sont, du moins au voisinage de 0, sommes de séries entières. Par ailleurs, les séries entières permettent de construire facilement des solutions de certains problèmes, comme par exemple la résolution d'équations différentielles.

1 Rayon de convergence

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}_+$

- La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}_+$ est étendue à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < +\infty.$$
- On rappelle que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide majorée, alors A admet une borne supérieure. Par convention, si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.

Remarques

- Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, l'inégalité $x \leqslant \sup A$, pour $x \in A$, est toujours vérifiée.
- Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in A$ vérifiant $x < \sup A$, il existe $y \in A$ tel que $x < y < \sup A$.
En effet, dans le cas où $\sup A$ est réel, il s'agit d'une conséquence immédiate de la définition de la borne supérieure. Dans le cas où $\sup A = +\infty$, la partie A n'est pas majorée et la conclusion suit.

Notation Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ et $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

- On pose $D_O(z_0, r)$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < r\}$.
  Si r est réel, cela correspond dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, au **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon r. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_O(z_0, r) =]z_0 - r, z_0 + r[$. Dans les deux cas, on a $D_O(z_0, +\infty) = \mathbb{K}$.
- On pose $D_F(z_0, r)$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$.
  Si r est réel, dans le cas où $K = \mathbb{C}$, cela correspond au **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r, et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela correspond à $[z_0 - r, z_0 + r]$. On a encore $D_F(z_0, +\infty) = \mathbb{K}$.

Séries entières

Définition 1

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
La **série entière** associée à a est la série de fonctions $\sum u_n$, où :

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n. \end{array}$$

La **somme de la série entière** est la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, définie sur le domaine $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série numérique $\sum a_n z^n$ soit convergente.

Remarques

1. On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite a.
2. Si l'indexation commence à partir de n_0, on notera $\sum_{n \geqslant n_0} a_n z^n$.
3. De manière analogue, on définit les **séries entières de la variable réelle**, comme étant les séries de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto a_n t^n$ est une fonction de la variable réelle.
4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
   Il arrive que l'on note $\sum a_n z^{2n}$ la série entière $\sum b_n z^n$, où la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n} = a_n.$$
   De la même façon, on peut noter $\sum a_n z^{n^2}$ la série entière $\sum c_n z^n$, où la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \begin{cases} a_k & \text{si } n = k^2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Plus généralement, si $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, $\sum a_n z^{\nu_n}$ désigne une série entière, les « coefficients manquants » étant pris à 0.

Lemme d'Abel

Théorème 1 (Lemme d'Abel)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Démontrer, dans le cas où la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $z_0 \neq 0$, que l'on a $a_n z^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Démonstration page 619

Rayon de convergence

Lemme 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration page 619

Définition 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

1. La borne supérieure $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est $D_O(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
3. L'**intervalle ouvert de convergence** de la série entière (de la variable réelle) $\sum a_n t^n$ est $D_O(0,R) =]-R, R[$.

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum \alpha^n z^n$ est $r = \dfrac{1}{|\alpha|}\cdot$

En effet, la suite $(\alpha^n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $|\alpha z| \leqslant 1$.

Remarques

- Le rayon de convergence d'une série entière est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
- Le disque ouvert de convergence est un ouvert éventuellement vide de $\mathbb{C}$. L'intervalle ouvert de convergence est un ouvert de $\mathbb{R}$.
- Le disque ouvert de convergence est vide si $R = 0$. Le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.
- Il vient de la définition que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$. De même, si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $|z| \geqslant R$.
- On ne peut rien dire *a priori* sur le comportement de la suite $(|a_n|\, R^n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque le rayon de convergence R est un réel strictement positif.

- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ coïncident.
- **Invariance par décalage.**

  Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

  Le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n+p}$ est alors R. En effet, si $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite :

  $$(a_n r^{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = r^p \, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

  est bornée.

  De même le rayon de convergence de $\sum a_{n+p} z^n$ est R. En effet, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant p}$ est bornée si, et seulement si, la suite :

  $$(a_n r^{n-p})_{n\geqslant p} = r^{-p} \, (a_n r^n)_{n\geqslant p}$$

  est bornée.

Proposition 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Principe de démonstration. Pour 1. Utiliser le lemme d'Abel.
Pour 2. Utiliser la définition du rayon de convergence.

Démonstration page 619

Corollaire 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie :

$$D_O(0,R) \subset \mathcal{D} \subset D_F(0,R)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 3. □

Exemples

1. Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1. Puisqu'une série géométrique est convergente si, et seulement si, la raison est de module strictement inférieur à 1, le domaine de définition de la somme est $D_O(0,1)$.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1. En effet, si $|z| \leqslant 1$, alors la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et si $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par ailleurs, pour tout z vérifiant $|z| \leqslant 1$, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente.

   Par suite, le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$.

3. Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. En effet, pour tout $z \neq 0$, on a :
$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente et donc $\frac{|z|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *a fortiori* la suite $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque cela est vérifié pour tout complexe $z \neq 0$, on a $R = +\infty$ et la fonction $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est définie sur $\mathbb{C}$.
4. Le rayon de convergence de $\sum n!\, z^n$ est 0. En effet, d'après l'étude précédente, pour tout complexe $z \neq 0$, on a $\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{|z|}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $n!|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la suite $(n!\,|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est bornée pour aucun $z \neq 0$, ce qui implique que le rayon de convergence de $\sum n! z^n$ est nul. Par conséquent, le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ est $\{0\}$.

p.619 **Exercice 1** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{i\ln n}\, z^n$.

p.619 **Exercice 2** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n}\, 2^n\, z^n$.

2 Pratique de la détermination du rayon de convergence

Inégalités

Point méthode

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on procède souvent par double inégalité.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Nous avons déjà fait la remarque que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie l'inégalité $|z| \leqslant R$ (*cf.* page 590). Le point suivant en découle.

Point méthode (Minoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$. Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
2. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ;
3. la série $\sum a_n z^n$ est convergente ;
4. la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;

alors $R \geqslant |z|$.

La contraposée du lemme d'Abel donne une méthode pour majorer le rayon de convergence.

Point méthode (Majoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$. Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente ;
2. la série $\sum a_n z^n$ est divergente ;
3. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ;
4. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;

alors $R \leqslant |z|$.

Exemple Le rayon de convergence R de la série $\sum n\, z^n$ vaut 1.
En effet, par croissances comparées, pour $r \in [0,1[$, on a $nr^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $R \geqslant r$.
Cela étant vrai pour tout $r < 1$, on en déduit $R \geqslant 1$.
Puisque la série $\sum n$ diverge grossièrement, on a $R \leqslant 1$. Par suite $R = 1$.

p.619

Exercice 3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{p}\right) z^n$.

p.620

Exercice 4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$ (avec la convention $\sqrt{+\infty} = +\infty$).

Comparaison

Proposition 5 (Comparaison)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Si l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ est vérifiée à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Puisque $|a_n r^n| \leqslant |b_n r^n|$ à partir d'un certain rang, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. On a donc $R_b \leqslant R_a$. □

p.620

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Donner le rayon de convergence de $\sum d(n)\, z^n$.

Corollaire 6

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement.

1. Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration page 620

Exemple Le rayon de convergence de la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$ est 2. En effet :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}\cdot$$

D'autre part, la série géométrique $\sum \left(\frac{z}{2}\right)^n$ converge si, et seulement si, $|z| < 2$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{2^n} z^n$ est 2 et donc, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2^n}\right) z^n$ est également 2.

Utilisation de la règle de d'Alembert

On peut parfois utiliser la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes tous non nuls. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Supposons que $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et examinons plusieurs cas.

Cas $L \in]0,+\infty[$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L|z|.$$

- Si $|z| < \frac{1}{L}$, alors d'après la règle de d'Alembert la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite $|z| \leqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z| < \frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L} \leqslant R$.
- Si $|z| > \frac{1}{L}$, alors, toujours d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Par suite $|z| \geqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z| > \frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L} \geqslant R$.

En conclusion $R = \frac{1}{L}\cdot$

Cas $L = 0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par conséquent $R = +\infty$.

Cas $L = +\infty$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Par conséquent $R \leqslant |z|$ pour tout z non nul et donc $R = 0$.

Exemples

1. Calculons le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{3^n} z^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a :
$$\frac{\left|\frac{n+1}{3^{n+1}} z^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{3^n} z^n\right|} = \frac{(n+1)|z|}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|}{3}.$$
Le raisonnement mené plus haut donne que le rayon de convergence est $R = 3$.

2. Déterminons le rayon de convergence R de $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$, où α est un réel strictement positif fixé. Rappelons que cette série correspond à la série entière $\sum b_n z^n$, où
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \begin{cases} \alpha^{1+\cdots+k} & \text{si } n = k^2, \text{ avec } k \in \mathbb{N}\ ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Notons, du fait qu'il y a une infinité d'indices pour lesquels b_n est nul, qu'il est illusoire de s'intéresser aux $\frac{|b_{n+1} z^{n+1}|}{|b_n z^n|}$.
En revanche, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$\frac{|\alpha^{1+\cdots+(n+1)} z^{(n+1)^2}|}{|\alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}|} = \alpha|z|\big(\alpha|z|^2\big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha|z|^2 < 1\ ; \\ \alpha\,|z| & \text{si } \alpha|z|^2 = 1\ ; \\ +\infty & \text{si } \alpha|z|^2 > 1. \end{cases}$$
Par suite, si $\alpha|z|^2 < 1$, alors la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ est absolument convergente et donc la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Par conséquent, $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.
De même si $\alpha|z|^2 > 1$ la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ n'est pas absolument convergente et donc *a fortiori* la série $\sum b_n z^n$ n'est pas absolument convergente. Par conséquent, $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$. On en conclut que $R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Point méthode

Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls.
Pour déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^{\nu_n}$, on peut s'intéresser, pour $z \in \mathbb{C}^*$, à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{\nu_{n+1}}|}{|a_n z^{\nu_n}|}$.
Si cette limite existe et qu'elle est différente de 1, la règle de d'Alembert donne la nature de la série numérique $\sum |a_n|\,|z|^n$, ce qui permet de majorer ou minorer R.

p.620 **Exercice 6** Quel est le rayon de convergence de $\sum n!\, z^{n^2}$?

Convergence en un point de la frontière

Le comportement de la série entière sur la frontière de son disque ouvert de convergence peut être très variable, comme le montrent les exemples suivants.

Exemples

1. Nous avons vu que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1 et le domaine de définition de sa somme est $D_O(0,1)$ (*cf.* page 591). La série diverge donc en tout point de la frontière du disque ouvert de convergence.
2. Nous avons également vu, que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1 et le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$ (voir page 591). La série converge donc en tout point de la frontière du disque de convergence.
3. Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ vaut 1. Pour le démontrer, on peut par exemple utiliser les deux exemples précédents, en remarquant que $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La proposition 5 de la page 593 permet alors de conclure. Il est connu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On peut démonter que les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nt)}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nt)}{n}$ converge pour $t \in \,]0,2\pi[$ (*cf.* l'exercice 10.20 de la page 554). Par suite, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour tout $z \neq 1$ de module 1. Cela nous donne donc un exemple de série entière pour laquelle la convergence de la série a lieu en tout point de la frontière de son disque ouvert de convergence sauf un.

3 Opérations algébriques sur les séries entières

Somme

Proposition 7 (Somme)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n)\, z^n$ vérifie alors l'inégalité :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min\{R_a, R_b\}$.

Principe de démonstration. Démonstration page 620

Pour montrer l'inégalité, utiliser le fait que si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors la suite $\big((a_n+b_n)z^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Dans le cas où $R_a < R_b$, justifier que si $R_a < |z| < R_b$, alors la suite $\big((a_n+b_n)z^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Remarque Avec les notations de la proposition 7 de la page ci-contre, pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes et l'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

p.620

Exercice 7

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \operatorname{ch}(n)\, z^n$.

Produit

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série entière $\sum c_n z^n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

est le **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Remarque On écrit souvent le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sous la forme $\sum \Big(\sum\limits_{i+j=n} a_i b_j\Big) z^n$.

Proposition 8 (Produit)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\, z^i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

En particulier, le rayon de convergence R du produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie l'inégalité :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 621

Utiliser le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

Attention

- On ne peut rien dire de plus sur R, même dans le cas où $R_a \neq R_b$.
- L'égalité $\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i\, z^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i\, z^i\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ n'a pas de sens si $|z| > \min\{R_a, R_b\}$!

Exemples

1. En considérant le produit de Cauchy de la série entière $\sum z^n$ avec elle même, il vient que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n.$$

2. Nous savons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1 :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1.$$

La série entière $\sum z^n$ a un rayon de convergence R_1 égal à 1. On a par ailleurs, en posant $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$:

$$1 - z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Le rayon de convergence R_2 de cette dernière série entière est $+\infty$. De plus, la série produit $\sum c_n z^n$ est donnée par :

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = 1 - 1 = 0.$$

Le rayon de convergence R de la série produit de ces deux dernières séries entières est donc $+\infty$. On a donc $R > \min\{R_1, R_2\}$ et $R_1 \neq R_2$.

p.621

Exercice 8 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Donner une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum S_n z^n$ et donner sa somme en fonction de f au voisinage de 0.

Remarque Soit $\sum a_n^{(1)} z^n$, …, $\sum a_n^{(p)} z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1, …, R_p, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Posons $R = \min\{R_1, \ldots, R_p\}$. On démontre aisément par récurrence sur l'entier p que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a :

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i_1+\cdots+i_p=n} a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_p}^{(p)}\right) z^n.$$

4 Continuité

Théorème 9

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle et de rayon de convergence R.
La série $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle $]-R, R[$.

Principe de démonstration. Utiliser le lemme d'Abel. Démonstration page 621

Attention La série $\sum a_n t^n$ ne converge pas normalement sur $]-R, R[$ en général ! La série géométrique $\sum t^n$ peut servir d'exemple.

Proposition 10

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la restriction de la somme à l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{array}{rcl}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array}$$

est continue.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons u_n l'application définie sur $]-R, R[$ par $u_n(t) = a_n t^n$. La fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]-R, R[$. La conclusion est alors immédiate. □

p.621 **Exercice 9** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme f. On pose $g : \begin{array}{rcl}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| t^n. \end{array}$

1. Justifier que g est bien définie.
2. Montrer, pour tout $z \in D_O(0, R)$ et $h \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| + |h| < R$, que l'on a :

$$\big|f(z+h) - f(z)\big| \leqslant g\big(|z| + |h|\big) - g\big(|z|\big)$$

Théorème 11

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la restriction de la somme au disque ouvert de convergence, c'est-à-dire l'application $\begin{array}{rcl} D_O(0, R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$ est continue.

Démonstration (non exigible) page 622

Attention Cela ne signifie pas que la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur son domaine de définition.

p.622

Exercice 10 (Formule de Cauchy)

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. On pose, pour tout $r \in]0, R[$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Démontrer que pour tout $0 < r < R$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int}\, \mathrm{d}t$$

En déduire que $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.

p.623

Exercice 11

Soit une $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et de somme f.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'au voisinage de 0 on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + \mathrm{o}(z^p).$$

II Séries entières de la variable réelle

1 Séries dérivées

Proposition 12 (Série dérivée)

La **série dérivée** de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} n a_n\, z^{n-1}$.

Une série entière et sa série dérivé ont même rayon de convergence.

Démonstration page 623

Corollaire 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 12 à la série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. □

p.624

Exercice 12

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Soit $f : [\alpha, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction rationnelle non nulle. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum f(n)\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2 Primitive de la somme d'une série entière

Théorème 14 (Primitivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soit enfin F une primitive de f sur $]-R, R[$. On a alors :

$$\forall t \in]-R, R[\quad F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Principe de démonstration. Utiliser le théorème d'intégration terme à termes des séries de fonctions continues uniformément convergentes. Démonstration page 624

Corollaire 15

- $\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$
- $\forall x \in]-1, 1[\quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Démonstration page 624

Remarque On a, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

3 Dérivation de la somme d'une série entière

Théorème 16 (Dérivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et :

$$\forall t \in]-R, R[\quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 625

Utiliser le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions.

Remarque

Ainsi, la dérivée sur $]-R, R[$ de la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R est la somme de la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} t^n$.

Exemple Le théorème 16 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne :

$$\forall t \in]-1, 1[\quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n.$$

p.625 **Exercice 13** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme f et de rayon de convergence $R > 0$, ainsi que $\varphi : I \to D_O(0,R)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle d'intérieur non vide.
Démontrer que la fonction $f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in I \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \varphi^{n-1}(t).$$

Corollaire 17

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors la restriction de f à $]-R, R[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Principe de démonstration. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ par récurrence à l'aide du théorème 16 de la page précédente.
Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, évaluer $f^{(n)}$ en 0. Démonstration page 625

Exemple Le théorème 17 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in]-1,1[\quad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)t^n.$$

Définition 4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de 0. Sa **série de Taylor** est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

III Développements en série entière

1 Fonctions développables en série entière

Définition 5

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, ainsi qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $]-r, r[$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

Remarques

- Bien noter que « développable en série entière » ne signifie pas que f soit globalement égale à la somme d'une série entière, mais simplement que f coïncide avec la somme d'une série entière sur un intervalle ouvert centré en 0.
- Il est tout à fait possible que la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et la fonction f coïncident sur un intervalle $]-r,r[$, mais qu'elles ne coïncident pas sur $]-R,R[$, même lorsque f est définie sur $]-R,R[$.

  En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto \min\{x^2, 1\}$ définie sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est développable en série entière, car $f(x) = x^2$ sur $]-1,1[$, mais la relation $f(x) = x^2$ n'est pas vérifiée sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Toute fonction polynomiale est développable en série entière.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-a}$ est développable en série entière. En effet, pour tout $x \in]-|a|,|a|[$, on a :
$$f(x) = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}\cdot$$
3. Nous avons vu au corollaire 15 de la page 601 que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière.

   Il est clair que la relation $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ n'est pas valable sur tout le domaine de définition de f, car la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ diverge grossièrement pour $x > 1$. L'égalité :
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$
   est vérifiée *a priori* simplement sur $]-1,1[$.
4. De même, nous avons vu que la fonction Arctan est développable en série entière. L'égalité :
$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
   est valable *a priori* sur $]-1,1[$.

Théorème 18 (Unicité du développement en série entière)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

S'il existe un intervalle $J =]-r,r[$, avec $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in J \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n,$$
alors les suites a et b ont égales.

Principe de démonstration. Utiliser le corollaire 17. Démonstration page 625

Remarque

En particulier, si le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif et s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle.

Corollaire 19

Soit I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
Il existe alors au plus une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in \left]-r, r\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Démonstration page 625

Remarques

- Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ est développable en série entière si, et seulement si, elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur un intervalle $\left]-r, r\right[$, avec $r > 0$.
- Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 qui ne sont pas développables en série entière. Parmi les situations qui peuvent se présenter, il se peut que le rayon de convergence de la série de Taylor soit nul (voir l'exercice 11.28 de la page 641), ou encore que f et la somme de sa série de Taylor ne coïncident qu'en 0 (voir l'exercice 11.29 de la page 641).

Les théorèmes sur les opérations sur les séries entières donnent le point suivant.

Point méthode

Soit I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$, ainsi que $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$.

- Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $\left]-r, r\right[$, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière sur $\left]-r, r\right[$.
- Si f et g sont des fonctions développables en série entière, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière.
- Si f est développable en série entière sur $\left]-r, r\right[$, alors toutes les dérivées et les primitives de f sont développables en série entière sur $\left]-r, r\right[$

p.626 **Exercice 14** Que dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction développable en série entière paire ? impaire ?

2 L'exponentielle et les fonctions trigonométriques

Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \exp(ax)$

Lemme 20

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est infini.

Démonstration. Cela a été démontré en exemple à la page 591. □

Théorème 21

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $x \mapsto \exp(ax)$ définie sur $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(ax) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n.$$

Principe de démonstration. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Démonstration page 626

En particulier, on a le développement suivant.

Proposition 22

La fonction $x \mapsto e^x$ définie que $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Proposition 23

Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration.
Il s'agit d'une conséquence des égalités $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, ainsi que de la proposition précédente. □

Développement en série entière des fonctions trigonométriques

Proposition 24

Les fonctions cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a d'après le théorème 21, $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!}$.
On conclut alors avec les formules d'Euler. □

p.627 **Exercice 15** Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

3 Séries du binôme

Coefficients binomiaux généralisés

On pose pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Cette notation n'est pas explicitement au programme, mais elle est assez fréquemment utilisée.

Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; cherchons à donner un développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Cette dernière est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Ici les dérivées successives sont faciles à calculer et la série de Taylor associée à f est la série :

$$\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$

Pour démonter que f est développable en série entière, il faut démontrer :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pour les x dans un voisinage de 0. Pour cela, il est naturel de penser à la formule de Taylor avec reste intégral. Malheureusement, il n'a y pas de majoration « simple et naturelle » qui permette de conclure. C'est pourquoi nous utiliserons une autre méthode pour donner le développement en série entière de f.

Proposition 25

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Principe de démonstration. Le résultat correspond à la formule du binôme si α est un entier naturel. Dans les autres cas, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ est caractérisée par

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Chercher une série entière dont la somme vérifie ces deux propriétés. Démonstration page 627

Remarque On retrouve ainsi, pour $t \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$, la formule établie à la page 602 :

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n.$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\binom{-p-1}{n} = (-1)^n \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!} = (-1)^n \binom{n+p}{n}.$$

Exemple Donnons le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!}\\ &= (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!} \times \frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = 1 + x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n.$$

p.628 **Exercice 16** Donner le développement en série entière de la fonction Arcsin.

p.628 **Exercice 17** Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

4 Fonctions de la variable complexe

Définition 6

Soit $U \subset \mathbb{C}$ une partie telle que $0 \in \overset{\circ}{D}$, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que :

$$\forall z \in D_O(0,r) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, z^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $D_O(0,r)$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D_O(0,r)$.

Exemples

1. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ est développable en série entière et :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

2. Plus généralement, si $a \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

On déduit du théorème 21 de la page 605, en prenant $a = z$ et $x = 1$, le développement suivant.

Proposition 26

La fonction $z \mapsto \exp(z)$ définie que $\mathbb{C}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Un exemple : développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}. \end{array}$

Soit $z \in D_O(0,1)$ non nul et posons :

$$g: \begin{array}{ccc}]-1/|z|, 1/|z|[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1-tz}. \end{array}$$

Lorsque $|tz| < 1$, la série géométrique $\sum (tz)^n$ est convergente. Il s'ensuit que :

$$\forall t \in]-1/|z|, 1/|z|[\quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n t^n.$$

Puisque g est la somme d'une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $1/|z|$, on peut dériver p fois sur l'intervalle $]-1/|z|, 1/|z|[$ et :

$$\forall t \in]-1/|z|, 1/|z|[\quad g^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+p}(n+p)\cdots(n+1)t^n. \tag{1}$$

Par ailleurs, on a facilement par récurrence :

$$\forall t \in]-1/|z|, 1/|z|[\quad g^{(p)}(t) = \frac{z^p\, p!}{(1-zt)^{p+1}}. \tag{2}$$

Puisque $|z| < 1$, on a $1 \in]-1/|z|, 1/|z|[$. Les deux expression (1) et (2) de $g^{(p)}(t)$ en 1 donnent :

$$\frac{z^p\, p!}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+p}(n+p)\cdots(n+1),$$

et, du fait que $z \neq 0$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)\cdots(n+1)}{p!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

On constate que cette dernière expression est valable lorsque $z = 0$. Ainsi, f est développable en série entière sur $D_O(0,1)$.

Remarque On pourrait établir ce résultat à l'aide de produits de Cauchy.

IV Pratique du développement en série entière

Cette section, à vocation pratique, traite de méthodes usuelles.

1 Opérations algébriques et analytiques

Point méthode

Pour établir l'existence d'un développement en série entière d'une fonction f, et le cas échéant pour l'expliciter, on cherche d'abord à voir si l'on peut se ramener par des opérations algébriques ou analytiques (intégration, dérivation) à des fonctions ou des développements connus.

Opérations algébriques

Exemples

1. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ est développable en série entière sur $D_O(0,1)$. En effet :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \quad f(z) = 1 - \frac{2}{z+1}$$

et donc :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad f(z) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^n$$

2. La fonction $F : z \mapsto \dfrac{1-z^2}{1-2z\cos(\alpha)+z^2} = -1 + \dfrac{1}{1-ze^{-i\alpha}} + \dfrac{1}{1-ze^{i\alpha}}$ est la somme de la série entière :

$$-1 + \sum e^{in\alpha} z^n + \sum e^{-in\alpha} z^n = 2\sum \cos(n\alpha) z^n - 1$$

sur $]-1,1[$. le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, lorsque $\alpha \in]0,\pi[$.

p.628 **Exercice 18** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$. Donner le développement en série entière de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)},$$

et préciser le domaine de validité.

Indication. On distinguera les cas $a \neq b$ *et* $a = b$.

p.629 **Exercice 19** Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Dérivation/intégration

p.630 **Exercice 20** Développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Indication. On pourra donner le développement en série entière de f'.

p.630 **Exercice 21** Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$.

Remarque On pourrait être tenté d'utiliser le développement en série entière de la fonction Arctan. Cela conduit à une impasse, puisque le développement en série entière est valable uniquement sur $]-1,1[$ et il permet simplement d'écrire :

$$\forall x \in \,]-2,0[\quad \operatorname{Arctan}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1},$$

ce qui en aucun cas ne peut donner un développement en série entière au voisinage de 0.

2 Utilisation d'équations différentielles

Équations différentielles

Une méthode de détermination de développement en série entière est celle de l'équation différentielle. Elle consiste à trouver une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par la fonction, et à la résoudre formellement avec une série entière.

Deux situations peuvent se présenter.

- On veut montrer que f est développable en série entière : on cherche une série entière de rayon de convergence strictement positif satisfaisant à la même équation différentielle et l'on utilise un résultat d'unicité des solutions d'une telle équation différentielle.

- On sait que f est développable en série entière : on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (unicité du développement en série entière) pour déterminer ces derniers.

Un premier exemple

Illustrons cette méthode avec la fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons qu'il n'est pas évident *a priori* que φ soit développable en série entière.

- L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et l'on vérifie facilement qu'elle est solution l'équation différentielle du second ordre :
$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0. \tag{E}$$
L'application φ est donc l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy défini par l'équation (E) ainsi que les conditions $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

- Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R>0$.
D'après le théorème de dérivation, f' (respectivement f'') est la somme de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}t^n$ (respectivement $\sum(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$) sur $]-R,R[$. Ainsi, toujours pour $t \in]-R,R[$, on a :
$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n\big)t^n\\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n\\ \alpha^2 f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^2 a_n t^n.\end{aligned}$$
On en déduit que la fonction $t \mapsto (1-t^2)f''(t) - tf'(t) + \alpha^2 f(t)$ est la somme de la série entière :
$$\sum\big((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n\big)t^n$$
sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si, et seulement si, :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2-\alpha^2)a_n.$$
Comme on veut $f(0)=1$ et $f'(0)=0$, on doit prendre $a_0=1$ et $a_1=0$. La relation de récurrence ci-dessus définit alors une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1}=0$ et :
$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p!)}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-1)^2\right)\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-2)^2\right)\cdots\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

- * Dans le cas où α est un nombre entier pair, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et la fonction f est polynomiale.
  * Dans le cas contraire, la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum a_{2n}t^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1.

  Dans les deux cas, la fonction somme définie par cette série sur $]-1,1[$ est solution du problème de Cauchy cité ci-dessus et est donc égale à la fonction φ.

  Remarque Dans le cas où α est un entier pair, la fonction φ est polynomiale, ce qui s'explique par le fait que $\cos(\alpha\theta)$ est un polynôme pair en $\cos\theta$, donc un polynôme en $\sin\theta$.

Un second exemple

Illustrons la méthode avec la fonction $f : t \mapsto \operatorname{Arcsin}^2 t$.

- Puisque la fonction Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$, par produit, il en est de même de f. Par ailleurs, la fonction f est paire. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait :

$$\forall t \in \,]-1,1[\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}.$$

- Le calcul usuel de dérivées donne, pour tout $t \in \,]-1,1[$, les relations :

$$\sqrt{1-t^2}\,f'(t) = 2\operatorname{Arcsin}(t) \quad \text{et} \quad (1-t^2)f''(t) - tf'(t) = 2 \qquad (*)$$

- Pour tout $t \in \,]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n\big)t^n\\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^{2n}.\end{aligned}$$

  Par conséquent, pour tout $t \in \,]-1,1[$:

$$(1-t^2)f''(t) - tf'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 4\,n^2\,a_n\big)t^{2n}.$$

  Par unicité du développement en série entière, il vient de la relation $(*)$:

$$2a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)(2n+2)a_{n+1} = 4\,n^2\,a_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors $a_n = \frac{2^{2n-1}\,(n-1)!^2}{(2n)!}\cdot$
Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$ et par conséquent :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[\quad \operatorname{Arcsin}^2 t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}\,(n-1)!^2}{(2n)!}\, t^{2n}.$$

3 Séries de Taylor

On n'utilise que très rarement les séries de Taylor pour obtenir un développement en série entière. Cependant :

- lorsque les dérivées successives sont très faciles à calculer, ce qui n'est pas courant, on peut chercher à démontrer que la somme de la série de Taylor de f coïncide avec f sur un voisinage de 0 ;

- en outre, les séries de Taylor peuvent donner des informations pertinentes concernant des questions de nature théorique.

p.631

Exercice 22

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $I = \left]-a, a\right[$.

Démontrer que s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{M n!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $\left]-R, R\right[$, où $R = \min\{a, \rho\}$.

p.631

Exercice 23 (Théorème de Bernstein)

Soit I un intervalle tel que $0 \in \mathring{I}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur I. Montrer que f est développable en série entière.

Indication. On pourra utiliser l'exercice précédent.

4 Étude au bord du disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme f. On peut supposer $R = 1$, le cas général s'y ramenant, en posant le changement de variable $z = \frac{u}{R}$.
On s'intéresse ici au comportement de f en un point z tel que $|z| = 1$ et tel que $f(z)$ soit défini.

Point méthode

Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ de fonctions continues $u_n : x \mapsto a_n x^n$ définies sur $[-1,1]$, converge normalement et sa somme f est continue sur $[-1,1]$.

Qu'en est-il si la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente ?
Nous savons que la somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément est une fonction continue. Cela conduit au point suivant.

Point méthode

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f.
Si la série converge uniformément sur $[0,1]$, alors $f(1)$ est définie et :

$$f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t)$$

Remarque On adaptera lorsque l'on s'intéresse à la valeur en un point de convergence sur la frontière du disque ouvert de convergence.

Attention Il est possible que $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t)$ existe et que la série $\sum a_n$ diverge. Par exemple, la série $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente, alors que, pour $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

p.632 **Exercice 24** Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Nous l'avons déjà signalé : si la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et sa somme est continue sur $[-1,1]$. L'exercice suivant donne un résultat plus fin.

p.633 **Exercice 25** Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, et f est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Justifier que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
   Démontrer que pour tout $z \in D_O(0,1)$:
   $$f(1) - f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$
   Indication. On remarquera que $a_n = R_{n-1} - R_n$, *pour* $n \geqslant 1$.
2. Démontrer que la restriction $f_{|[0,1]}$ est continue en 1.

V Approfondissement : exponentielle complexe

Au fil du temps, de vos cours du secondaire à ce livre, de nombreuses propriétés des fonctions trigonométriques, de l'exponentielle réelle ou complexe ont été introduites, admises, manipulées. . .

Il s'agit dans ce complément de mettre un peu d'ordre dans tout cela.

Rappelons que la fonction réelle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ a déjà été introduite comme bijection réciproque de la fonction $\ln$, elle même introduite comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 0 de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Cette définition donne que l'application $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ et donc que $\exp^{(n)} = \exp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que le développement en série entière donné page 605 est totalement justifié.

D'autre part, vous avez rencontré à plusieurs reprises les fonctions trigonométriques et la notation $e^{i\theta}$. À chaque fois certaines propriétés des fonctions trigonométriques ont dû être admises. Cependant, toutes les propriétés usuelles peuvent être déduites d'un petit nombre d'entre elles, à savoir :

- il existe un réel $\pi > 0$ et deux fonctions $\cos$ et $\sin$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$;
- la fonction $\sin$ est impaire, la fonction $\cos$ est paire ;
- on a les relations $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$;
- le tableau de variations de la fonction $\sin$ est

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
$\sin$	0	$\nearrow$	1

Nous allons donner une nouvelle définition de l'exponentielle complexe et des fonctions trigonométriques, et démontrer qu'elles vérifient les propriétés données ci-dessus.

Exponentielle

Le théorème 21 de la page 605 conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Remarques

- Cette définition est légitime, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente d'après le lemme 20 de la page 605.
- Ainsi par définition, pour tout x réel, on a $e^x = \exp x$.
- La fonction exp est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
- On peut noter e^z le nombre complexe $\exp(z)$. Afin d'éviter des confusions, on se limite dans la suite de ce livre aux notations e^x et $e^{ix} = \exp(ix)$, lorsque x est réel.

Proposition 27

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\,\exp(z_2).$$

Démonstration page 633

Proposition 28

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout nombre complexe z :

$$\exp(z) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Démonstration page 634

Corollaire 29

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration page 634

Fonctions trigonométriques

Définition 8

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cos et sin par :

$$\cos x = \mathrm{Re}(\exp(ix)) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Remarque D'après le corollaire 29, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

Proposition 30

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(z) = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Démonstration page 634

Théorème 31

Les fonctions sin et cos sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$$

En particulier la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Démonstration page 634

Corollaire 32

Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Démonstration page 634

p.634 **Exercice 26** Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors $t \mapsto \exp\big(\varphi(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $t \mapsto \varphi'(t)\, \exp\big(\varphi(t)\big)$.

Définition du nombre π

Lemme 33

On a $\cos 2 < 0$.

Démonstration page 635

Proposition 34

Le réel $\alpha = \min\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \cos x = 0\}$ est bien défini, strictement positif. On définit alors $\pi = 2\alpha$.

Démonstration page 635

Variations des fonctions trigonométriques

Étudions les variations de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est dérivable et $\sin' = \cos$. Par définition de π, la fonction cos ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et puisque $\cos 0 = 1$, la fonction continue cos est à valeurs strictement positives sur cet intervalle. Il s'ensuit que la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\sin(0) = 0$, la fonction sin est à valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et de $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, on en déduit alors que $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. En résumé :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
sin	0	$\nearrow$	1

Proposition 35

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i \qquad \text{et} \qquad \exp(2i\pi) = 1.$$

Démonstration. En effet, d'après l'étude précédente, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Par ailleurs, $\exp(2i\pi) = \exp\left(4\,\frac{i\pi}{4}\right) = i^4 = 1$. □

Corollaire 36

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp\left(i(x+\frac{\pi}{2})\right) = i\,\exp(x);$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Remarque Il s'ensuit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Autour de la relation fonctionnelle

Théorème 37

L'application $\varphi : t \mapsto \exp(it)$ est une application continue, surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, qui vérifie :

- pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\exp(i(t_1 + t_2)) = \exp(it_1)\,\exp(it_2), \qquad (*)$$

- pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(it) = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration page 635

Corollaire 38

Les fonctions sin et cos sont périodiques, de plus petite période 2π.

Théorème 39

L'application exp est une application continue et surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ telle que :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1) = \exp(z_2) \iff z_2 - z_1 \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Démonstration page 636

Attention L'application exp de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ n'est pas injective.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Théorème 1 Notons $r = |z_0|$. Si $r = 0$, le résultat est immédiat, car l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$ est vide. Dans la suite, on suppose $r > 0$.

Supposons que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et posons M un majorant de cette suite. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|a_n z^n\right| = \left|a_n r^n \frac{z^n}{r^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z}{r}\right|^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{r}\right|^n\right).$$

Par suite, si $|z| < r$, alors la série géométrique $\sum \left|\frac{z}{r}\right|^n$ est convergente. Le théorème de comparaison sur les séries numériques donne alors que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Lemme 2 Notons $I = \left\{r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$. Cet ensemble est non vide, car il contient évidemment 0.

Par définition, pour tout $r \in I$, la suite $(|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par ailleurs, pour tout réel r' vérifiant $0 \leqslant r' \leqslant r$, on a $|a_n|\, r'^n \leqslant |a_n|\, r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $r' \in I$. Il s'ensuit que I est un intervalle.

Proposition 3 Notons $I = \left\{r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$.

1. Puisque $R = \sup I$, si $|z| < R$, alors il existe un réel $\rho \in I$ tel que $|z| < \rho$. La suite $(a_n\, \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$, car R est alors réel et un majorant de I. Par suite, si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $\left|e^{i \ln n}\, z^n\right| = |z|^n$. Il s'ensuit que la suite $\left(e^{i\ln n}\, z^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée si, et seulement si, $|z| \leqslant 1$. Par suite le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{i\ln n}\, z^n$ vaut 1.

Exercice 2 Par croissances comparées, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la suite $(\sqrt{n}\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Par suite, le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n}\, 2^n\, z^n$ vaut $1/2$.

Exercice 3 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\!\left(n\frac{\pi}{p}\right) z^n$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \cos\!\left(n\frac{\pi}{p}\right)$. La suite $(u_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2kp} 1^{2kp} = 1$, ce qui implique que la suite extraite $(u_{2kp} 1^{2kp})_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. On en déduit que $R \leqslant 1$.
- La suite $(u_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car $|u_n| \leqslant 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par suite, $R \geqslant 1$.

En conclusion, $R = 1$.

Exercice 4 Notons R' le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{2n}$.

- Supposons le rayon de convergence R fini.
  Pour tout réel $r < R'$, la suite $\left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc $r^2 \leqslant R$. Il s'ensuit que R' est fini et $R' \leqslant \sqrt{R}$.
  Pour tout $r < \sqrt{R}$, la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car $r^2 < R$.
  Ainsi $R' \geqslant r$, cela pour tout $r < \sqrt{R}$, et donc $R' \geqslant \sqrt{R}$.
  Il s'ensuit que $R' = \sqrt{R}$.
- Dans le cas où $R = +\infty$, alors la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $r > 0$ et donc $R' = +\infty$.

Exercice 5 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum d(n) z^n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $1 \leqslant d(n) \leqslant n$. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1, donc $R \leqslant 1$. De plus, nous avons vu en exemple page 593 que le rayon de convergence de la série $\sum n z^n$ est 1. Ainsi $R \geqslant 1$. En conclusion, $R = 1$.

Corollaire 6

1. Il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et un rang N à partir duquel $|a_n| \leqslant M|b_n|$. La série $\sum M b_n z^n$ ayant pour rayon de convergence R_b, la proposition précédente conduit à $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$, donc d'après la proposition précédente, on a $R_a \geqslant R_b$ et $R_a \leqslant R_b$.

Exercice 6 Soit $r > 0$. Il est clair que

$$\frac{(n+1)!\, r^{(n+1)^2}}{n!\, r^{n^2}} = (n+1) r^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Ainsi, $R = 1$.

Proposition 7

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux suites $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, donc la suite $\left((a_n + b_n) z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également, ce qui implique $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.
- Dans le cas où $R_a \neq R_b$, on peut supposer, par exemple, $R_a < R_b$. Pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, la suite $\left((a_n + b_n) z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, comme somme de la suite bornée $(b_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| < R_b$) et de la suite non bornée $(a_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| > R_a$).
  Cela implique $R \leqslant R_a$ et donc $R = R_a$, car $R \geqslant \min\{R_a, R_b\} = R_a$.

Exercice 7

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum e^n z^n$ est $R_1 = 1/e$, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum (ez)^n$ converge si, et seulement si, $|ez| < 1$. De plus :

$$\forall z \in D_O\big(0, 1/e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n = \frac{1}{1 - ze}\cdot$$

- De même, le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{-n} z^n$ est $R_2 = e$ et :

$$\forall z \in D_O\big(0, e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{1 - z/e}.$$

- On a :

$$\sum \operatorname{ch}(n)\, z^n = \sum \left(\frac{e^n}{2} + \frac{e^{-n}}{2}\right) z^n.$$

Puisque $R_1 < R_2$, d'après la proposition 7 de la page 596, le rayon de convergence de cette dernière série entière est $R = 1/e$ et, pour tout $z \in D_O(0, 1/e)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n)\, z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - z/e} + \frac{1}{1 - ez}\right) = \frac{1 - \operatorname{ch}(1)\, z}{1 - 2\operatorname{ch}(1)\, z + z^2}.$$

Proposition 8 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergeant absolument, la série numérique produit $\sum c_n z^n$ converge absolument, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Cela assure de plus que $R \geqslant \min\left(R_a, R_b\right)$.

Exercice 8 La série entière définie par $\sum \left(a_0 + \cdots + a_n\right) z^n$ a un rayon de convergence $R' \geqslant \min\{1, R\}$. En effet cette série entière est le produit de Cauchy des séries $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{1, R\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_0 + \cdots + a_n\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) = \frac{f(z)}{1 - z}.$$

Théorème 9 Soit ρ un réel vérifiant $0 \leqslant \rho < R$. Pour tout entier n et $t \in [-\rho, \rho]$, on a $|a_n t^n| \leqslant |a_n| \rho^n$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n| \rho^n$ converge. La convergence normale sur $[-\rho, \rho]$ de la série $\sum a_n t^n$ s'en trouve établie et donc la convergence uniforme sur sur tout segment.

Exercice 9

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n|\, z^n$ ont même rayon de convergence. La définition de g en découle.
2. - Montrons que pour tout $(z, h) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\big|(z+h)^n - z^n\big| \leqslant \big(|z| + |h|\big)^n - |z|^n.$$

En effet, d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\big|(z+h)^n - z^n\big| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k = \big(|z| + |h|\big)^n - |z|^n.\end{aligned}$$

- Soit $z \in D_O(0,R)$ et $h \in \mathbb{C}$ tels que $|z_0| + |h| < R$.
Puisque $|z| + |h| < R$, la série numérique $\sum |a_n|\big(|z| + |h|\big)^n$ est convergente. *A fortiori*, puisque $0 \leqslant \big(|z| + |h|\big)^n - |z|^n \leqslant \big(|z| + |h|\big)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par comparaison, la série :
$$\sum |a_n|\Big(\big(|z| + |h|\big)^n - |z|^n\Big)$$
est convergente. Il s'ensuit que :
$$\begin{aligned}\big|f(z+h) - f(z)\big| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\big((z+h)^n - z^n\big)\right|\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\Big(\big(|z| + |h|\big)^n - |z|^n\Big) = g\big(|z| + |h|\big) - g\big(|z|\big).\end{aligned}$$

Théorème 11

- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. Posons :
$$\begin{aligned} g:\ ]-R,R[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| t^n.\end{aligned}$$
D'après la proposition 10 de la page 599, la fonction g est continue.
- L'exercice 9 de la page 599 donne, pour $z \in D_O(0,R)$ et $h \in \mathbb{C}$ tels que $|z|+|h| < R$, l'inégalité $\big|f(z+h) - f(z)\big| \leqslant g\big(|z| + |h|\big) - g\big(|z|\big)$. Enfin, puisque g est continue en $|z|$, on a :
$$0 \leqslant \big|f(z+h) - f(z)\big| \leqslant g\big(|z| + |h|\big) - g\big(|z|\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui prouve la continuité de f en z.

Remarque La démonstration proposée peut paraître une peu artificielle. En fait on peut définir sans difficulté les notions de convergence uniforme et normale par les séries de fonctions de la variable complexe. On démontre, de la même manière que dans le cas de la variable réelle, que la convergence uniforme d'une série de fonctions continues de la variable complexe implique la continuité de la somme. On peut alors reprendre *mutatis mutandis* le raisonnement de la proposition 10 de la page 599. Ces résultats sont néanmoins hors-programme.

Exercice 10 Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et de somme f.

Soit $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme la série $\sum a_k r^k$ converge absolument, la série de fonctions $\sum u_k$, où $u_k : \theta \mapsto \big(a_k (re^{i\theta})^k\big)e^{-in\theta}$ converge normalement, et donc uniformément, sur le segment $[0, 2\pi]$ vers la fonction $\theta \mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$. D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment, les fonctions u_k étant continues, on a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_k (re^{i\theta})^k e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Ce qui donne, en remarquant, pour $q \in \mathbb{Z}^*$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iq\theta}\, d\theta = 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_n r^n.$$

Puisque f est continue sur le disque ouvert $D_O(0,1)$, elle est continue sur le cercle de centre 0 et de rayon r, qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{C}$. Ainsi $M(r)$ est définie et :

$$\begin{aligned} |a_n|\, r^n &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\, e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r\, e^{i\theta}\right)\right| \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(r)\,\mathrm{d}\theta = M(r). \end{aligned}$$

La conclusion est alors immédiate.

Exercice 11 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

La fonction f est définie sur le disque $D = D_O(0,R)$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $g_p : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+p+1} z^n$ est également définie sur D (*cf.* page 591). Par ailleurs, en tant que somme d'une série entière, la fonction g_p est continue sur D. Donc au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1} g_p(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1}\mathrm{O}(1) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + \mathrm{o}(z^p).$$

Remarque Parfois, on fait référence à ce résultat en disant que la fonction f admet en 0 un développement limité à l'ordre p.

Proposition 12 Notons R et R' respectivement les rayons de convergence de la série et de sa série dérivée.

- Nous avons remarqué que les rayons de convergence des séries entières $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ coïncident (*cf.* page 591).
- Puisque $n|a_n| \geqslant |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rayon de convergence R' de la série entière $\sum n a_n z^n$ vérifie $R' \leqslant R$.
- Si $R = 0$, l'inégalité précédente donne $R' = 0$.

  Supposons $R > 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$. Choisissons un réel $r < \rho < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

  $$|n\, a_n r^n| = |a_n \rho^n| \left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right|.$$

  Par croissances comparées, on a : $\left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui implique, lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on a : $|n a_n r^n| = \mathrm{o}\left(a_n \rho^n\right)$.

  Puisque $\rho < R$, la suite $\left(a_n \rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $\left(n a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également. Il s'ensuit que $R' \geqslant r$. Puisque cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $r \in [0, R[$, on en déduit $R' \geqslant R$. On a bien l'égalité des deux rayons.

Exercice 12

1. - D'après la proposition 12 de la page 600, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence R et d'après une remarque de la page 591, R est égal au rayon de convergence de la série $\sum n a_n z^n$.
   - Il vient par récurrence, que, pour $p \in \mathbb{N}$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
   - Pour $p \in \mathbb{N}^*$, en appliquant ce dernier résultat à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^p} z^n$, il vient que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^p} z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^p \frac{a_n}{n^p} z^n = \sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

   En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2. Puisqu'il existe deux fonctions polynomiales P et Q sur $[\alpha, +\infty[$ telles que $f = \frac{P}{Q}$, il vient qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(n) \underset{+\infty}{\sim} \beta n^p$. La conclusion découle donc de la question précédente et du corollaire 6 de la page 594.

Théorème 14 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n : t \mapsto a_n t^n$, qui est une fonction de la variable réelle. D'après le théorème 9 de la page 599, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

Soit $x \in [0, R[$. La convergence uniforme sur $[0, x]$ de la série de fonctions continues $\sum u_n$, nous autorise à intégrer terme à terme (*cf.* le théorème 16 de la page 527), et donc :

$$F(t) - F(0) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^t s^n\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

On raisonne de la même manière lorsque $x \in]-R, 0]$.

Corollaire 15

- Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k.$$

  D'après le théorème 14 de la page 601, on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

- Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

  D'après le théorème 14 de la page 601, on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Théorème 16 Les fonctions $u_n : t \mapsto a_n t^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ et la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$, car il s'agit de la somme d'une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R, on peut dériver terme à terme. Il vient alors que la fonction $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $u_n : t \mapsto a_n \varphi^n(t)$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I. Pour conclure, montrons que la série $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment.

Soit un segment $[a, b] \subset I$. Par continuité sur un segment, la fonction $t \mapsto |\varphi(t)|$ atteint son maximum sur $[a, b]$, dont la valeur est notée r. Puisque φ est à valeurs dans $D_O(0, R)$, il vient que $r < R$. Toujours par continuité sur un segment, la fonction $|\varphi'|$ est majorée par une constante M sur $[a, b]$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall t \in [a, b] \quad |u_n'(t)| \leqslant M\, n\, |a_n| r^{n-1}.$$

Puisque $r < R$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} M\, n\, |a_n| r^{n-1}$ converge et donc la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions permet alors de conclure.

Corollaire 17

- En appliquant le théorème 16 de la page 601, on démontre facilement par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-R, R[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\forall t \in]-R, R[\quad f^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k\, t^{k-n}.$$

- En particulier, puisque $0 \in]-R, R[$:

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Théorème 18 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$.
Puisque par hypothèse la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x \in]-r, r[$, on a $R \geqslant r > 0$. De même $R' \geqslant r > 0$.
Posons

$$f : \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc}]-R', R'[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \end{array}$$

Puisque f et g coïncident sur $J =]-r, r[$ et qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, les dérivées successives de f et g coïncident sur J. En particulier $f^{(n)}(0) = n! a_n$ et $g^{(n)}(0) = n! b_n$ sont égaux, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La conclusion suit.

Corollaire 19 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_1 > 0 \quad \forall x \in]-r_1, r_1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Fixons r_1. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_2 > 0 \quad \forall x \in \left]-r_2, r_2\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Fixons r_2 et posons $r = \min\{r_1, r_2\}$. Il est immédiat que $r > 0$ et l'on a :

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Le théorème précédent permet de conclure.

Remarque L'exercice 10 de la page 600 fournit une autre démonstration de l'unicité du développement en série entière pour les fonctions de la variable complexe.

Exercice 14 Supposons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ pour tout $x \in \left]-r, r\right[$, avec $r > 0$.

- Si f est impaire, alors, pour tout $x \in \left]-r, r\right[$:

$$0 = f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigl(1 + (-1)^n\bigr) a_n x^n.$$

  Ainsi, par unicité du développement en série entière, $\bigl(1+(-1)^n\bigr)a_n = 0$ pour tout entier n, et donc $a_n = 0$ pour tout entier n pair.
- De même, si f est paire, alors $a_n = 0$ pour tout entier n impair.

Théorème 21 Notons $f : x \mapsto \exp(ax)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sachant que $f^{(n)} = a^n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!}\, x^n \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\, a^{N+1} \exp\left(at\right) \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\, |a|^{N+1} e^{\operatorname{Re}(a)\, t}\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{|xa|^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{|\operatorname{Re}(a)|\, x}.\end{aligned}$$

Lorsque $x \in \mathbb{R}_-$, en appliquant ce qui précède à $-a$, on obtient :

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!}\, x^n \right| = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-a)^n}{n!}\, (-x)^n \right| \leqslant \frac{|xa|^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{|\operatorname{Re}(a)|\,|x|}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le lemme précédent, la série $\sum \frac{|ax|^n}{n!}$ est convergente et donc son terme général tend vers 0. Par suite :

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!}\, x^n \right| \leqslant \frac{|ax|^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{|\operatorname{Re}(a)||x|} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La conclusion suit.

Exercice 15

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{(-(-x))^n}{(2n)!} = (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right).$$

Remarque Il s'ensuit que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 25 Seul le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$ est non trivial.

La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ vérifie :

$$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \tag{$*$}$$

Par unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire résolue du premier ordre à coefficients continus, la fonction f est caractérisée par $(*)$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_x^n$ soit strictement positif et notons g la somme de cette série. Pour tout $x \in\,]-R,R[$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$x g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$(1+x)g'(x) - \alpha g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)\, a_{n+1} + (n-\alpha) a_n\big) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, la fonction g vérifie les relations $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ et $g(0) = 1$ sur $]-R, R[$ si, et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\, a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

La relation de récurrence définit une unique suite. Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, cette suite est à valeurs non nulles. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{|\alpha - n|}{n+1}\,|x| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

On en déduit, via la règle de d'Alembert, que $R = 1$.

La fonction g vérifie donc $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ sur $]-1, 1[$ et $g(0) = 1$. Par conséquent $f = g$. Par récurrence, on obtient facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

La conclusion s'ensuit.

Exercice 16 L'exemple précédent donne que Arcsin' est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\, x^{2n}.$$

Il s'ensuit, d'après le théorème 14 de la page 601 que la fonction Arcsin est développable en série entière et, du fait que $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$:

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}\, x^{2n+1}.$$

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{\left(\frac12\right)\left(\frac12 - 1\right)\cdots\left(\frac12 - n + 1\right)}{n!} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n\, n!} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n (2n-1)\, n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\, x^n.$$

Exercice 18

- Supposons $a \neq b$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b\} \quad f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\cdot$$

En posant $R = \min\{|a|,|b|\}$ qui est non nul car a et b sont non nuls, pour tout $x \in]-R,R[$, on a donc :

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right)x^n,$$

ce qui donne le développement en série entière de f. Ce développement n'est valable que sur $]-R,R[$, car si $x = \pm R$, le terme général ne tend pas vers 0.

- Supposons que $a = b$. Alors, pour tout $x \in \big]-|a|,|a|\big[$, d'après la proposition 8 de la page 597, on a :

$$f(x) = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{(1-\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{a^{n+2}}x^n,$$

ce qui donne le développement en série entière de f. Là encore, le domaine de validité est $]-R,R[$.

Exercice 19 Proposons deux méthodes. Remarquons que f est définie sur $[-1,1[$.

Première méthode. Notons que $f(x) = (1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

On sait que :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^{2n}.$$

Il s'ensuit par produit que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, avec :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\cdot$$

Deuxième méthode. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$. Il s'ensuit par produit que f l'est également. Par ailleurs, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^n. \end{aligned}$$

Les deux calculs sont bien évidemment justes, bien que les deux expressions soient très différentes.

Exercice 20

- Développons f' en série entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}.$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} + \frac{1}{(j^2)^{n+1}} \right) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\operatorname{Re}(j^{n+1}) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right) x^n. \end{aligned}$$
- Puisque f' est développable en série entière sur $]-1,1[$, la fonction f l'est également et, du fait que $f(0)=0$, on a :
$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) \frac{x^n}{n}.$$

Remarque On peut proposer une autre méthode.
En remarquant que $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, il vient pour $x \in]-1,1[$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) \\ &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$
où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 21 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} &= \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x+1-i} - \frac{1}{x+1+i}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+1-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\frac{xe^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}-1}\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, on a :

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-i(n+1)\frac{3\pi}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}x^n,$$

et donc :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,x^n.$$

Ainsi, la fonction f' est développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$. Par primitivation des développements en série entière, sachant que $f(0)=\frac{\pi}{4}$, on en déduit :

$$\forall x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\quad f(x) = \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n}{2}}}\,\frac{x^n}{n}\cdot$$

La fonction f est bien développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$.

Remarque La suite $\left(\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 8-périodique non constante. Il est clair qu'une suite périodique converge si, et seulement si, elle est constante. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,x^n$ vérifie $R \leqslant \sqrt{2}$, car :

$$\frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,\sqrt{2}^{\,n} = \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que f' (et *a fortiori* f) n'est développable en série entière sur aucun intervalle ouvert I contenant strictement $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Exercice 22 Il suffit d'écrire la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}\left|R_n(x)\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[-|x|,|x|]}\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M\left|\frac{x}{\rho}\right|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Exercice 23 Soit I un intervalle tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur I. Montrons que f est développable en série entière.

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha,2\alpha]\subset I$ et soit $x\in[-\alpha,\alpha]$. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x+\alpha) = f(x)+\alpha f'(x)+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}f^{(n)}(x)+\alpha^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x+\alpha u)\,\mathrm{d}u.$$

Tous les termes du second membre étant positifs, on a :

$$0 \leqslant \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \leqslant f(x+\alpha) \leqslant f(2\alpha),$$

la dernière inégalité provenant de la croissance de f. L'exercice précédent s'applique alors et montre le résultat annoncé.

Exercice 24

- Notons $u_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{array}$

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\big((-1)^n u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative. De plus, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$

  La convergence uniforme de la série $\sum u_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

- Notons $v_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{array}.$

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\big((-1)^v u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. De plus, la suite $(|v_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$$

  La convergence uniforme de la série $\sum v_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions v_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Exercice 25

1. • Puisque la série $\sum a_n$ est convergente, la rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est supérieur à 1.

   • Soit $z \in D_O(0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-z^k) &= \sum_{k=1}^{n}(R_{k-1}-R_k)(1-z^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k(1-z^{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} R_k(1-z^k) \\ &= (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1-z^n)R_n. \end{aligned}$$

Puisque $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z|<1$, on a $(1-z^n)R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :

$$S_n = (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1-z^n)R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-z)\sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k.$$

Par ailleurs, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)-f(z)$. La conclusion suit.

2. En posant $g(x) = f(1) - f(x)$ pour $x \in [0,1]$, la fonction g est la somme de la série de fonctions u_n, où $u_n : x \mapsto R_n x^n(1-x)$. Pour démontrer que f est continue en 1, il suffit de démontrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément, car les fonctions u_n sont continues.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe n_0 tel que $|R_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et $x \in [0,1[$, du fait que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = x^{n+1}$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k(1-x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k| x^k(1-x) \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = \varepsilon\, x^{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque $x=1$. La série $\sum u_n$ converge bien uniformément et la conclusion est alors immédiate.

Proposition 27 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Les deux séries $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ convergent absolument respectivement vers $\exp(z_1)$ et $\exp(z_2)$, donc leur produit de Cauchy $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right)$ converge absolument vers $\exp(z_1)\exp(z_2)$. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2). \end{aligned}$$

Ainsi $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$.

Proposition 28

- $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1\,.$
- $\overline{\exp(z)} = \overline{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})\,.$
- $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\,\overline{\exp(z)} = \exp(z)\,\exp(\overline{z}) = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)}$. Donc :
$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Corollaire 29

$$|\exp(z)| = 1 \iff e^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \iff \mathrm{Re}(z) = 0.$$

Proposition 30 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. D'après la proposition 27 de la page 616 :

$$\exp(z) = \exp(a+ib) = \exp(a) \times \exp(ib) = e^a \times \exp(ib) = e^a\,(\cos b + i\sin b)\,.$$

Théorème 31 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par définition :

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{\exp(ix) + \overline{\exp(ix)}}{2}\\ &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n x^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n(1+(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

L'expression de $\sin x$ s'obtient de la même manière.

Corollaire 32 La fonction $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Par dérivation terme à terme, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x).$$

La démonstration est analogue pour la fonction $\sin$.

Exercice 26

- Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice 13 de la page 602.
- Cela étant, on peut démontrer le résultat sans faire appel à l'exercice précité. En notant $\varphi = x + iy$, et $f = \exp\circ\varphi$, on a :
$$f = e^x(\cos y + i\sin y).$$
Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et utilisant les règles de dérivations :
$$\begin{aligned}f' &= x'\,e^x(\cos y + i\sin y) + e^x(-y'\,\sin y + iy'\,\cos y)\\ &= x'\,e^x(\cos y + i\sin y) + e^x iy'\,(\cos y + i\sin y) = \varphi'\,f.\end{aligned}$$
Cela démontre le résultat demandé.

Lemme 33 Vérifions que la suite $\left(\frac{2^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{2^{2n}}{(2n)!}} = \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} < 1.$$

D'après le théorème des séries alternées :

$$\cos 2 = -1 + R_1 \qquad \text{où} \qquad R_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

Toujours d'après le théorème des séries alternées :

$$|R_1| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}.$$

Il s'ensuit que $\cos 2 \leqslant -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$.

Proposition 34 Notons $E = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \cos x = 0\right\}$.

- Montrons que E est non vide. La fonction $\cos$ est continue. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos 2 < 0$. D'après le théorème de valeurs intermédiaires, la fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 2]$ s'annule et donc E est non vide.
- L'ensemble E est une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$: ainsi E admet une borne inférieure α.
  Par ailleurs, puisque la fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
  $$E = \cos^{-1}\big(\{0\}\big) \cap \mathbb{R}_+$$
  est un fermé de $\mathbb{R}$, en tant qu'intersection de deux fermés. Par conséquent, α est un minimum de E et, puisque $\cos 0 = 1$, on a $\alpha > 0$.

Théorème 37

- D'après le corollaire 29 de la page 616, φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$.
- D'après la proposition 27 de la page 616, φ vérifie $(*)$ et φ est continue par continuité de la fonction $\exp$.
- La fonction φ est 2π-périodique, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)\exp(2i\pi) = \varphi(t).$$
- Montrons que la restriction φ_1 de φ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur :
  $$\mathcal{U}_1 = \{z \in \mathcal{U} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}.$$
  En effet, l'étude des variations de $\sin$ montre que la restriction de $\sin$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur $[0, 1]$. Cela garantit l'injectivité de φ_1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
  Soit $z = a + ib \in \mathcal{U}_1$. Puisque $\sin$ définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, il existe $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin c = b$. On a : $a = \sqrt{1 - b^2}$ et puisque la fonction $\cos$ est à valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne :
  $$\cos c = \sqrt{1 - \sin^2 c} = \sqrt{1 - b^2} = a.$$
  La surjectivité de φ_1 est ainsi assurée.

- À l'aide de la relation $\varphi\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = i\varphi(t)$, on démontre que φ_k, restriction de φ à $\left[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}\right]$, définit une bijection de cet intervalle sur $\mathcal{U}_k = (i)^{k-1}\mathcal{U}_1$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4$. Il s'ensuit que φ est surjective. À l'aide du fait que $1 \notin \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$, si $t \in [0, 2\pi[$, alors la relation $\varphi(t) = 1$ est équivalente à $t = 0$.
- Notons $K = \varphi^{-1}\big(\{1\}\big)$. Puisque la fonction φ est 2π-périodique et $\varphi(0) = 1$, il vient que $2\pi\mathbb{Z} \subset K$.

  Le point précédent montre que $K \cap [0, 2\pi[\; = \{0\}$. Ainsi, pour tout $t \in K$, en notant $n = \lfloor t/2\pi \rfloor$, on a :

$$1 = \varphi(t) = \varphi(t - 2\pi n) = \varphi\left(t - 2\pi\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor\right),$$

  et puisque l'on a :

$$0 \leqslant t - 2\pi\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor < 2\pi,$$

  il vient que :

$$t = 2\pi\left\lfloor\frac{t}{2\pi}\right\rfloor.$$

  On en conclut que $K = 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 39

- D'après la proposition 28 de la page 616, la fonction $\exp$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
- Montrons que la fonction $\exp$ est surjective sur $\mathbb{C}^*$. D'après le théorème 37 de la page 618, pour tout nombre complexe z' de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z|\, z'$, où $z' = \frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$, et donc :

$$z = |z| \exp(i\theta) = \exp\big(\ln|z| + i\theta\big).$$

  On a ainsi démontré la surjectivité.
- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\exp z_1 = \exp z_2$, c'est-à-dire tel que $z = a + ib = z_2 - z_1$ vérifie $\exp(z) = e^a \exp(ib) = 1$.

  Puisque $\left|e^a \exp(ib)\right| = e^a$, cela impose $a = 0$ et $\exp(i\theta) = 1$. D'après le théorème 37 de la page 618, on a donc $b \in 2\pi\mathbb{Z}$. Par suite, $z_2 - z_1 \subset i2\pi\mathbb{Z}$. Il est clair, toujours d'après le théorème 37, que si $z_2 - z_1 \in i2\pi\mathbb{Z}$, alors $\exp z_1 = \exp z_2$.

  Cela achève la démonstration.

S'entraîner et approfondir

11.1 Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour :

1. $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{n}$;
2. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;
3. a_n est la somme des carrés des diviseurs de n ;
4. $a_n = 1$ si n est premier, $a_n = 0$ sinon.

11.2 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer à R les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum n^\alpha a_n z^n$ (α réel quelconque) ;
2. $\sum a_n^2 z^n$;
3. $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$;
4. $\sum a_n z^{n^2}$.

11.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que le rayon de convergence R' de $\sum a_{2n} z^n$ vérifie $R' \geqslant R^2$ (avec une convention à donner pour $R = +\infty$). Peut-on espérer mieux ?

11.4 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

11.5 Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ sur le disque ouvert de convergence.

11.6 Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$?

11.7 Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$, où p_n est le n-ème nombre premier.

11.8 Rayon de convergence et somme de la série entière de la variable réelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

11.9 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{3^n}$ converge et calculer sa somme.

11.10 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n z^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k\, k!\,.$$

11.11 Développement en série entière de $f(x) = (\operatorname{Arctan} x)^2$. On donnera les coefficients en fonction de $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}\cdot$

11.12 Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. On suppose que α n'est pas un nombre décimal.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la n-ème décimale de α ; on convient que $d_0 = 0$.

1. Donner le rayon de convergence de la $\sum d_n x^n$. On note f la somme de cette série entière.
2. Montrer que si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors f est une fonction rationnelle.

11.13 1. Déterminer sur $\left]-1,1\right[$ une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}\cdot$

Indication. Déterminer $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}\cdot$

2. Calculer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\cdot$

⋆⋆ **11.14** Soit $f : D_F(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

On suppose f développable en série entière sur $D_O(0,1)$ et l'on note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D_O(0,1)$.

1. Démontrer que pour tout $r \in [0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$$

On utilisera l'exercice 10 de la page 600.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$.

On pourra montrer la continuité sur $[0,1]$ *de la fonction* $r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$ *en utilisant le théorème 3 de la page 680.*

11.15 Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, \mathrm{d}t$.

11.16 Développer en série entière $f(x) = \ln\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

11.17 Développer en série entière $f(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

11.18 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de sommes f est g.
Montrer que si fg est nulle sur un intervalle $]-r, r[$, avec $r > 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

11.19 Soit $P = a_p X^p + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $p > 0$ tel que $a_0 \neq 0$.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines de P, comptées avec ordre de multiplicité.
On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_p^n$$

ainsi que la série entière $\sum S_{n+1} z^n$ de somme f.

1. On pose $Q = a_0 X^p + \cdots + a_p$. Démontrer :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad Q(z) = a_p \prod_{k=1}^{p} (1 - \lambda_k z)$$

2. On pose $r = \max\big\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_p|\big\}$. Démontrer :

$$\forall z \in D_O(0, 1/r) \quad f(z) = -\frac{Q'(z)}{Q(z)}\cdot$$

3. En déduire une relation de récurrence qui permet de calculer les S_n de proche en proche.

11.20 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n}\, x^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{e^{in\alpha}}{n}\, x^n$.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

⋆ **11.21** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Rappelons qu'une partition $\mathcal{A}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont l'union est égale à E. Par convention $\pi_0 = 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\pi_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k$.
2. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{\pi_n}{n!}\, x^n$ est strictement positif. On note f la somme de cette série sur $]-R, R[$.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. En déduire f.

⋆ **11.22** On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est non nul et donner une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0,4[$.
3. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

11.23 On pose la fonction de la variable réelle $f : x \mapsto \prod\limits_{k=0}^{+\infty} \left(1 - x^{2^k}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$ et exprimer $f(x)$ à l'aide de $f(x^2)$.
3. Démontrer que f est développable en série entière.

11.24 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

et la série entière $\sum c_n x^n$.

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et l'on note $f(x)$ sa somme. Montrer, qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$ et est égale à la fonction :
$$g : x \mapsto \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right).$$
2. Montrer que la fonction g se développe en série entière au voisinage de 0. En déduire $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ pour tout n.

11.25 Soit $\lambda \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de f, λ et n.
2. Déterminer f, en vérifiant que f est nécessairement développable en série entière.

11.26 Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on note $A_{n,p}$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement p points fixes. On convient que $A_{0,0} = 1$ et $A_{0,p} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n,0}}{n!} x^n$.

1. Exprimer $A_{n,p}$ à l'aide de $A_{n-p,0}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} A_{n,p}$.
3. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum \frac{A_{n,0}}{n!} x^n$ est strictement supérieur à 0 et calculer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
4. Expliciter les $A_{n,p}$.

11.27 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \operatorname{card}\Big(\big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p + 3q = n\big\}\Big)$.

1. Montrer que $\mu_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$.
2. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \mu_n x^n$.
   On note f la somme de cette série.
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $\dfrac{1}{1-x^2}$ et $\dfrac{1}{1-x^3}\cdot$

★★ **11.28** Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(n^2 x\right)}{2^n}\cdot$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas développable en série entière.

11.29 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2).$$
2. Démontrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $g^{(n)}(0) = 0$.
3. Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

11.30 Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec x réel.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}\left(1/(1-x)\right)$ au voisinage de 1.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f(z) \underset{1}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}\cdot$

11.31 Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On note f et g respectivement les sommes des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. On suppose enfin que le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$ vaut 1, que $a_n \sim b_n$ et que la série numérique $\sum b_n$ diverge.

1. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$?
2. Démontrer que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} g(x)$.

11.32 Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n)\, x^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
3. Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 1.

11.33 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0.

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!}\, x^n$?
   On note f la somme de cette série entière.
2. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}\big(e^x\big)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution des exercices

11.1 1. Notons R le rayon de convergence.

- Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est celui de $\sum \mathrm{ch}(n)\, z^n$ (*cf.* l'exercice 12 de la page 600).
- Puisque $\mathrm{ch}(n) \sim \frac{e^n}{2}$, le rayon de convergence de la série $\sum e^n z^n$, qui vaut $1/e$ (série géométrique), est égal à R (*cf.* le corollaire 6 de la page 594).

  Donc $R = 1/e$.

2. Notons R le rayon de convergence.

Première méthode

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives. À l'aide du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a :

$$\ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$

  Il s'ensuit que :

$$a_n \sim e^{-1/2}\, e^{\sqrt{n}}$$

  et R est le rayon de convergence celui de la série $\sum e^{\sqrt{n}} x^n$ (*cf.* le corollaire 6 de la page 594).
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\frac{|e^{\sqrt{n+1}} z^{n+1}|}{|e^{\sqrt{n}} z^n|} = |z|\, e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = |z|\, e^{1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

  En utilisant la règle de d'Alembert, il vient que $R = 1$.

Deuxième méthode Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n z^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) z\right)^n$.

- Si $|z| \geqslant 1$, alors $\left|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z\right|^n \geqslant |z|^n$, et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Il s'ensuit que $R \leqslant 1$.
- Soit $|z| < 1$ et $|z| < \rho < 1$.

  Puisque $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$, on a $a_n z^n = \mathrm{O}(\rho^n)$. On en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et $R \geqslant 1$.

En conclusion, $R = 1$.

3. Notons R le rayon de convergence.

- Puisque 1 divise tous les entiers, pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n \geqslant 1$. Par comparaison, on a $R \leqslant 1$.
- L'entier $n \geqslant 1$ a au plus n diviseurs, le carré d'un diviseur est inférieur à n^2, donc la somme des carrés des diviseurs de n est $\mathrm{O}(n^3)$. Puisque le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1, le rayon de convergence de la série $\sum n^3 x^n$ vaut également 1 (*cf.* l'exercice 12 de la page 600). Par comparaison, on obtient $R \geqslant 1$ et donc $R = 1$.

4. Notons R le rayon de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Par suite, $R \geqslant 1$.
- Puisque l'ensemble des nombres premiers est infini, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, on a $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

11.2 Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Notons aussi I l'ensemble des réels positifs tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

1. D'après l'exercice 12 de la page 600, pour tout *entier* relatif, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Par encadrement de n^α entre n^β et $n^{\beta+1}$, β partie entière de α, c'est aussi le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$.
2. Dans ce cas, si r est un réel positif :
$$(|a_n|^2 r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \iff (|a_n| r^{n/2})_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \iff r^{1/2} \in I.$$
Donc $R' = R^2$, où R' est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 z^n$.
3. Comme $|a_n e^{\sqrt{n}}| \geqslant |a_n|$, le rayon de convergence R' de $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ est inférieur ou égal à R. D'autre part, soit $r > 0$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $r' \in [0, r[$, on a :
$$a_n e^{\sqrt{n}} r'^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{r'^n}{r^n},$$
et comme :
$$e^{\sqrt{n}} \frac{r'^n}{r^n} = e^{\sqrt{n} + n \ln\left(\frac{r'}{r}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
la suite $\left(a_n e^{\sqrt{n}} r'^n\right)$ tend vers 0. Donc $R' = R$.
4. Pour la dernière série, notons R' le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{n^2}$. Montrons d'abord que si R est fini non nul, alors $R' = 1$. En effet, dans ce cas, soit $r > R$. Pour tout $\rho > 1$, $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \cdot \dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ qui n'est pas borné, car $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers l'infini si n tend vers l'infini, et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc $\rho \geqslant R'$.
De même, si $r < R$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et, pour tout $\rho < 1$, $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0, donc $(a_n \rho^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\rho \leqslant R'$. Finalement, $R' = 1$.
Le raisonnement précédent montre que si $R = +\infty$, R' est élément de $[1, +\infty[$, mais tout peut arriver :
   - si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, $\lambda > 1$, alors $R' = \lambda$;
   - si $a_n = 1/n!$, alors $R' = 1$;
   - si $a_n = 1/(n^2)!$, alors $R' = +\infty$.

   De même, si $R = 0$, R' peut être tout réel de $\big[0, 1\big]$ (on prendra les inverses des valeurs de a_n ci-dessus).

11.3 Soit $r \geqslant 0$ tel que $r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite extraite $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque la suite $\big(a_{2n}(r^2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $r^2 \leqslant R'$.

- Si R est fini, puisque $r^2 \leqslant R'$ pour tout $r \leqslant R$, on obtient $R^2 \leqslant R'$. Si $R = +\infty$, alors $R' \geqslant r^2$ pour tout $r \geqslant 0$ et donc $R' = +\infty$. En convenant $(+\infty)^2 = +\infty$, on a toujours :
$$R^2 \leqslant R'.$$

- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 2^{2^n}.$$

Pour tout $r > 0$, on a :

$$\ln\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right) = (2n+1)\ln r + 2^n \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent, la suite $\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui implique que R est nul. Cependant $R' = +\infty$. Ainsi l'inégalité $R^2 \leqslant R'$ peut être stricte.

11.4 1. Le rayon de convergence est 1, car $\sum z^{2n+1}$ admet 1 pour rayon de convergence, et la multiplication par $(-1)^n n$ du coefficient ne change pas ce rayon. Pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n\, x^{2n+1} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n\, x^{2(n-1)} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n\, t^{n-1}$$

avec $t = x^2$. Mais :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n\, t^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} t^n\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n\, x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\cdot$$

Lorsque $x = \pm 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, et il n'y a pas lieu de calculer la somme.

2. Le rayon de convergence est 1 car le coefficient de x^n est équivalent à $1/n^2$ lorsque n tend vers l'infini. Pour $|x| < 1$, et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^n \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\cdot\end{aligned}$$

3. Notons $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ le n-ième nombre harmonique. On a clairement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $1 \leqslant h_n \leqslant n$.

Les rayons de convergence des séries $\sum x^n$ et $\sum n x^n$ valant tous les deux 1, le rayon de convergence de la série $\sum h_n x^n$ vaut 1.

On remarque alors que le produit de Cauchy des séries entières classiques $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$. On en déduit :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} h_n\, x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$$

11.5 La série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est la somme des séries $\sum 2^{2n} z^{2n}$ et $\sum \frac{1}{2^{2n+1}} z^{2n+1}$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, la série géométrique $\sum (4z^2)^n$ converge si, et seulement si, $|4z^2| < 1$, *i.e.* $|z| < 1/2$. Par suite, le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{2n} z^{2n}$ est $1/2$. De même, la série géométrique $\sum \frac{z^{2n}}{2^{2n}}$ converge si, et seulement si, $|z| < 2$ et le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ est 2.

Puisque les deux rayons sont distincts, le rayon de convergence de la série $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est $\frac{1}{2}$.

Pour tout $z \in D_O\left(0, \frac{1}{2}\right)$ on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} z^{2n} + \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n} \qquad \text{(les deux séries convergent)} \\ &= \frac{1}{1-4z^2} + \frac{z}{2} \frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} = \frac{4+2z-z^2-8z^3}{(1-4z^2)(4-z^2)}. \end{aligned}$$

11.6 Notons $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Pour tout $r > 0$, on a :

$$\ln(a_n r^n) = n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + n \ln r = ((-1)^n + \ln r)\, n + \mathrm{O}(1).$$

Distinguons deux cas.

- Si $\ln r > -1$, on a $\ln\left(a_{2n} r^{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (1 + \ln r)\, 2n$. Par conséquent :

  $$\ln(a_{2n} r^{2n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  On en conclut que la suite $(a_{2n} r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $R \leqslant r$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $r > \frac{1}{e}$, on en déduit que $R \leqslant 1/e$
- De même, si $\ln r < -1$, alors $(-1)^n + \ln r \leqslant 1 + \ln r < 0$. Par suite :

  $$\ln(a_n r^n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

  En d'autres termes, $a_n r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par conséquent, $R \geqslant r$. On en déduit que $R \geqslant r$, cela pour tout $r < 1/e$. Ainsi $R \geqslant 1/e$.

Par suite $R = \dfrac{1}{e}\cdot$

11.7 Cette série entière est aussi $\sum a_m z^m$, où $\begin{cases} a_m = \dfrac{1}{p_n} & \text{si } m = p_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, $a_m r^m = r^{p_n}/p_n$ si $m = p_n$, 0 sinon. Donc la suite $(a_m r^m)$ est bornée si, et seulement si, la suite (r^{p_n}/p_n) l'est. Il est clair que cette dernière suite est bornée si $r < 1$ et tend vers l'infini si $r > 1$. Par suite, le rayon cherché vaut 1.

11.8 • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{|x|^n}{n(n+1)}} = |x| \, \frac{n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ est 1. Notons f sa somme.

• Soit $x \in \left]-1,1\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Puisque le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1, on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

soit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{dans le cas où } x \neq 0.$$

D'après le développement en série entière des fonctions usuelles, on a, toujours pour $x \neq 0$:

$$f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \left(\ln(1-x) + x \right),$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x).$$

Par ailleurs, $f(0) = 0$.

• La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ étant convergente, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ converge normalement sur $[-1,1]$. Il s'ensuit que la fonction f est définie et continue sur $[-1,1]$.

∗ On a :

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 - 2\ln 2.$$

∗ Puisque $t \ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Remarque On peut aussi obtenir la valeur de $f(1)$ par télescopage :

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

11.9 Puisque $\dfrac{n^3}{(n+1)^3}$ tend vers 1, d'après la règle de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum n^3 x^n$ est égal à 1. Sa somme f est donc définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. La série proposée, évaluée de la série entière précédente en $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, converge donc et sa somme égale à $f\Big(\dfrac{1}{3}\Big)$.

Puisque la série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et de somme $\dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$, on a sur $]-1,1[$, par dérivation et multiplication par x, les expressions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$\text{puis} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}\cdot$$

La somme de la série proposée est alors $f\Big(\dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{33}{8}\cdot$

11.10 On remarque que :

$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\cdot k! = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)!-k!\big) = n+1-\frac{1}{n!}\cdot$$

Le rayon de convergence est donc 1 et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n - e^z = \frac{1}{(1-z)^2} - e^z.$$

11.11 On sait que $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,1[$. Donc, sur $]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = 2\,\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{1+x^2} = 2\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\Big).$$

Ces deux séries entières ont même rayon de convergence égal à 1, et le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique, entraînant que, pour $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, où :

$$c_n = \sum_{p+q=n}\frac{(-1)^p}{2p+1}(-1)^q = (-1)^n S_n, \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\cdot$$

Par suite, par intégration de développement en série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n+1}\,x^{2n+2}.$$

Comme $1 \leqslant S_n \leqslant n+1$, le rayon de convergence de cette série est 1.

11.12 1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n x^n$.

- D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|d_n| \leqslant 9$. Le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ valant 1, par comparaison, on obtient $R \geqslant 1$.
- D'autre part, α n'étant pas un nombre décimal, il existe une infinité d'entiers n tels que $d_n \neq 0$, donc tels que $d_n \geqslant 1$. Il s'ensuit que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. On en conclut que $R \leqslant 1$.

On a donc $R = 1$

2. Puisque la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, les séries $\sum d_n$ et $\sum(-1)^n d_n$ divergent grossièrement. On en déduit que le domaine de définition de f est $]-1,1[$.
Supposons que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique à partir d'un certain rang.
Soit $x \in]-1,1[$. Choisissons $(n_0,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad a_{n+p} = a_n.$$

On a, à partir de la définition de la convergence d'une série :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{n_0+kp-1} d_i x^i \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n_0-1} d_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} d_{n_0+ip+j} x^{n_0+ip+j} \right) \right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n_0-1} d_i x^i}_{A(x)} + \sum_{i=0}^{k-1} x^{ip} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{p-1} d_{n_0+j} x^{n_0+j} \right)}_{B(x)} \right). \end{aligned}$$

Puisque $x \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum x^{ip}$ est convergente et donc :

$$f(x) = A(x) + \frac{B(x)}{1-x^p}\cdot$$

Les fonctions A et B étant polynomiales, la fonction f est rationnelle.

11.13 1. • On vérifie facilement que -1 est une racine du polynôme X^3+1 et :

$$X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$$

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ et un réel $x \neq -1$.
Puisque $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle, on a :

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - x + 1} = \frac{(\alpha+\beta)x^2 + (-\alpha+\beta+\gamma)x + (\alpha+\gamma)}{x^3+1}\cdot$$

Ainsi, si :

$$\alpha + \beta = 0; \qquad \alpha - \beta - \gamma = 0; \qquad \alpha + \gamma = 1,$$

c'est-à-dire $\alpha = 1/3$, $\beta = -1/3$ et $\gamma = 2/3$, on a :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{x-2}{x^2 - x + 1}\cdot$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut remarquer :
$$\frac{t-2}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}.$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
donc, pour $x \in \,]-1,1[$, sachant que $\operatorname{Arctan}(1/\sqrt{3})$ vaut $\pi/6$ et la fonction Arctan impaire, on obtient l'expression :
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right).$$

2. - Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum(-1)^n x^{3n}$ est une série géométrique, qui converge si, et seulement si, $|x| < 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum(-1)^n x^{3n}$ et de la série « primitive » $\sum \frac{(-1)}{3n+1}\,x^{3n+1}$ valent ainsi 1.
   - Pour tout $x \in \,]-1,1[$ on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$
   et par théorème de primitivation terme à terme :
$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$
   - D'après la question précédente, pour tout $x \in \,]-1,1[$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\,\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right).$$

3. Notons $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ pour $(n,x) \in \mathbb{N}\times[0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, la suite $\big((-1)^n u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{3n+4}}{3n+4} \leqslant \frac{1}{3n+4}.$$
   On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il vient alors, les fonctions u_n étant continues, que la somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est continue sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot$$

11.14 1. Fixons $r \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad u_n(t) = f(re^{it})\overline{a_n} r^n e^{-nit}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $D_F(0,r)$, qui est un fermé borné de $\mathbb{C}$, elle est bornée. Il s'ensuit que :

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad \left|u_n(t)\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) r^n |a_n|.$$

Du fait que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1 et $r < 1$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ est convergente et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement. On en déduit, du fait que les fonctions u_n sont continues, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, d'après l'exercice 10 de la page 600, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{a_n}\, r^n\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = r^n\,\overline{a_n} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\,\mathrm{d}t = 2\pi |a_n|^2 r^{2n}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(re^{it})\,\overline{a_n}\,(re^{-it})^n$$

$$= f(re^{it}) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}\,(\overline{re^{it}})^n\right)$$

$$= f(re^{it})\,\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n} = \left|f(re^{it})\right|^2.$$

Par suite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t.$$

2. • Montrons que $g : r \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1]$.

En effet :

∗ pour tout $r \in [0,1]$ l'application $t \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue sur $[0,2\pi]$ par continuité de f ;

  * pour tout $t \in [0, 2\pi]$, l'application $r \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue ;
  * pour tout $(t, r) \in 0, 2\pi \times [0, 1]$ on a :

$$\left|f(re^{it})\right|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2$$

  et la fonction constante $\mathcal{N}_\infty(f)^2$ est intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

Par théorème, la fonction g est définie et continue sur $[0, 1]$.

- Montrons que $h : r \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2$ est définie et continue sur $[0, 1]$. Nous savons que h est définie sur $[0, 1[$. Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\forall r \in [0, 1[\quad h(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it}\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{N}_\infty(f)^2 \,\mathrm{d}t = \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, du fait qu'il s'agit d'une série à terme général positif, on a l'inégalité :

$$\forall r \in [0, 1[\quad \sum_{n=0}^{p} r^{2n}|a_n|^2 \leqslant h(r) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

En faisant tendre r vers 1 à p fixé dans cette dernière inégalité, il vient :

$$\forall r \in [0, 1[\quad \sum_{n=0}^{p} |a_n|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

Il s'ensuit que la série numérique à terme général positif $\sum |a_n|^2$ est convergente, puisque la suite des sommes partielles est majorée. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, où $u_n(r) = |a_n|^2 r^{2n}$. On en conclut aisément que h est continue sur $[0, 1]$.

Les fonctions g et h sont continues sur $[0, 1]$ et coïncident sur $[0, 1[$. Elles sont donc égales. En particulier :

$$g(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = h(1).$$

11.15 Première méthode

- Commençons par minorer le rayon de convergence. Il est immédiat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\,t = \mathrm{O}(1)$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est supérieur à 1.

- Soit $x \in]-1, 1[$; posons, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$ définies sur $[0, \pi/2]$.
  * Les fonctions u_n sont continues.
  * Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \pi/2]$:

$$\left|u_n(t)\right| \leqslant |x^n|,$$

  et, du fait que $|x| < 1$ et donc que la série numérique $\sum |x^n|$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/2]$.

Par conséquent, on peut intégrer terme à terme, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [0, \pi/2]$, la série numérique $\sum x^n \sin^{2n}(t)$ est une suite géométrique convergente et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

En posant le changement de variable $u = \tan t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1 - x\frac{u^2}{1+u^2})}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Ensuite, en posant $u = \dfrac{v}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot$$

- Montrons que le rayon de convergence R de la série $\sum I_n x^n$ vaut 1. Si $R > 1$, alors la somme est continue sur $]-R, R[$, en particulier elle est continue en 1, or l'expression obtenue de la somme donne que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Par conséquent, $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

Deuxième méthode

- Calculons I_n. On reconnaît une intégrale de Wallis. Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u(t) = \sin^{2n-1}(t)$ et $v(t) = -\cos t$, une intégration par parties donne la relation :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

Sachant que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}\cdot$$

- Le développement en série entière de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ donne, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, que le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n$ est 1 et que sa somme vaut $f(x)$ sur $]-1, 1[$. Par conséquent :

$$\forall x \in \,]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot$$

11.16 Pour $\alpha \equiv 0 \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

De même, si $\alpha \equiv \pi \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1+x| = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

Si α n'est pas congru à 0 modulo π, la fonction f est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec, pour tout x :

$$f'(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{2(x - e^{i\alpha})} + \frac{1}{2(x - e^{-i\alpha})}$$
$$= \frac{e^{-i\alpha}}{2(xe^{-i\alpha} - 1)} + \frac{e^{i\alpha}}{2(xe^{i\alpha} - 1)} = -\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}}\right)$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = -\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{i(n+1)\alpha}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\big((n+1)\alpha\big) x^n.$$

On en déduit le développement en série entière de f sur $]-1,1[$:

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\big((n+1)\alpha\big) \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} x^k.$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ on retrouve les développements précédents.

11.17 On vérifie immédiatement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt + e^{x^2} e^{-x^2} = 2xf(x) + 1.$$

Si, sur un intervalle $]-R,R[$, cette équation différentielle admet une solution développable en série entière $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$:

$$1 = \varphi'(x) - 2x\varphi(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$
$$= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}\big) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, compte tenu de $\varphi(0) = 0$, on a :

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1$$
$$\forall n \geqslant 1 \quad (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$$

Cela définit une unique série entière, telle que $a_{2k} = 0$ pour tout k, $a_1 = 1$, et, pour $k \geqslant 1$, $a_{2k+1} = \dfrac{2}{2k+1} a_{2k-1}$, soit :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k+1} = \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}.$$

La règle de d'Alembert entraîne que le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, pour tout x réel, la somme de la série entière :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

vérifie l'équation différentielle avec la condition initiale ci-dessus. D'après le théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires, il n'y a qu'une solution, donc :

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

sur tout $\mathbb{R}$.

11.18 Il suffit de montrer que si $a \neq 0$, alors $b = 0$ (et donc $g = 0$).

Supposons $a \neq 0$ et posons p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$. Puisque fg est nulle sur un intervalle $]-r, r[$, avec $r > 0$, par unicité du développement en série entière, on a $0 = c_n = \sum\limits_{k=0}^{n+p} a_k b_{n-k}$ pour tout entier naturel.

Montrons par récurrence « forte » que $b_n = 0$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

- On a $0 = c_p = a_p b_0$, donc b_0.
- Si $b_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors :

$$c_{n+p} = \sum_{k=p}^{n+p} a_k b_{n+p-k} = a_p b_n.$$

Par conséquent, $b_n = 0$, ce qui assure le résultat.

11.19 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$Q(z) = z^p \left(a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \cdots + a_p \frac{1}{z^p} \right) = z^p P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Par ailleurs :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = a_p \prod_{k=1}^{p} (z - \lambda_k).$$

Il s'ensuit que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$Q(z) = z^p a_p \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{z} - \lambda_k\right) = a_p \prod_{k=1}^{n} (1 - \lambda_k z).$$

Cette dernière égalité est évidemment vérifiée pour $z = 0$.

2. Remarquons que $r > 0$, car $a_0 \neq 0$ et donc 0 n'est pas racine de P. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1/r$, la série géométrique $\sum \lambda_k^{n+1} z^n$ est convergente. Par linéarité de la convergence, on en déduit que $f(z)$ est définie et :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lambda_1^{n+1} + \cdots \lambda_p^{n+1}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_1 \left(\lambda_1 z\right)^n + \cdots + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_p \left(\lambda_p z\right)^n \\ &= \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 z} + \cdots + \frac{\lambda_p}{1-\lambda_p z}\cdot \qquad (\star) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $Q = a_p \prod\limits_{k=1}^{p} (1-\lambda_k X)$ et donc :

$$Q' = \sum_{i=1}^{p} -\lambda_i \, a_p \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p} (1-\lambda_k X).$$

Par suite, on a : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \quad \dfrac{Q'(z)}{Q(z)} = -\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_i z}\cdot$

La conclusion est alors immédiate, compte tenu de $(\star)$.

3. Pour tout $z \in D_O(0,r)$, on a par distributivité :

$$\begin{aligned} Q(z)f(z) &= \left(a_0 z^p \cdots + a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1} z^n\right) \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1} z^{n+p} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1} z^{n+p-1} + \cdots + a_p \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1} z^n \\ &= a_0 \sum_{n=p}^{+\infty} S_{n+1-p} z^n + a_1 \sum_{n=p-1}^{+\infty} S_{n+2-p} z^n + \cdots + a_p \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1} z^n \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \left(a_0 S_{n+1-p} + a_1 S_{n+2-p} + \cdots + a_p S_{n+1}\right) z^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{p-1} \left(a_{p-n} S_1 + a_{p-n+1} S_2 + \cdots + a_p S_{n+1}\right) z^n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $-Q'(z) = -\sum\limits_{n=0}^{p-1} (n+1) a_{p-n-1} z^k$.

Puisque $Q(z)f(z) = Q'(z)$ au voisinage de 0, par unicité du développement en série entière, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad & a_0 S_n + \cdots + a_p S_{n+p} = 0 \\ \forall n \in [\![1,p]\!] \quad & a_p S_n = -a_{p-1} S_{n-1} - \cdots - a_{n-p+1} S_1 - n a_{p-n}, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation de récurrence recherchée.

Cela donne par exemple, si P est unitaire (et de degré au moins 3) :

$$S_1 = -a_{p-1};\quad S_2 = a_{p-1}^2 - 2a_{p-2};\quad S_3 = -a_{p-1}^3 + 3a_{p-1}a_{p-2} - 3a_{p-3}.$$

11.20 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left|\frac{e^{in\alpha}}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{e^{in\alpha}}{n} x^n$ est ainsi celui de la série $\sum \frac{x^n}{n}$, et donc il vaut 1.

2. Fixons un réel $x \in]-1,1[$. Pour $t \in]-1,1[$, on note $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} t^n$.

- La fonction f est, par propriété des sommes de séries entières, dérivable et :

$$\forall t \in]-1,1[\quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\alpha} t^{n-1}.$$

On reconnait une série géométrique convergente et l'on a :

$$\forall t \in]-1,1[\quad f'(t) = e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{i\alpha} t\right)^n = \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha} t}.$$

- Puisque $f(0) = 0$, il s'ensuit que :

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha} t}\, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha} t} &= \frac{e^{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha} t)}{(1 - e^{i\alpha} t)(1 - e^{-i\alpha} t)} = \frac{e^{i\alpha} - t}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1} \\ &= \frac{\cos\alpha - t}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1} + i\,\frac{\sin\alpha}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1}.\end{aligned}$$

∗ On a :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\cos\alpha - t}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1}\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2\cos\alpha - 2t}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1}\, \mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{1}{2} \ln\left|t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1\right|\right]_0^x = -\frac{1}{2} \ln\left|x^2 - 2\cos(\alpha\, x) + 1\right|\end{aligned}$$

∗ Si $\alpha = 0 \mod \pi$, alors on a :

$$\int_0^x \frac{\sin\alpha}{t^2 - 2\cos(\alpha\, t) + 1}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Sinon, par périodicité, imparité de la fonction sinus et parité de la fonction

cosinus, on peut supposer $\alpha \in]0,\pi[$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin\alpha}{t^2 - 2\cos\alpha\, t + 1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\sin\alpha}{(t-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^x \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} - \alpha,\end{aligned}$$

la dernière simplification venant de fait qu'ici $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En conclusion, si $\alpha \in]0,\pi[$:

$$f(x) = -\frac{\ln\left|x^2 - 2\cos\alpha\, x + 1\right|}{2} + i\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

et si $\alpha = 0$:

$$f(x) = -\ln(1-x),$$

les autres cas se ramenant aux deux cas ci-dessus.

11.21 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons Π_n l'ensemble des partitions de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. Remarquons que le nombre de partitions d'un ensemble E fini ne dépend pas explicitement de E, mais seulement de son cardinal $|E|$.

Soit n un entier naturel. Pour $\mathcal{A} \in \Pi_{n+1}$, notons $C_{\mathcal{A}}$ l'élément de $\mathcal{A}$ contenant n. En regroupant les partitions telles que $C_{\mathcal{A}}$ soit un ensemble donné et en remarquant que, par définition, $n \in C_{\mathcal{A}}$, on obtient :

$$\Pi_{n+1} = \bigcup_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}. \qquad (*)$$

Il est clair que les partitions de $[\![0,n]\!]$ telle que $C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}$ sont les partitions de $[\![0,n-1]\!] \setminus X$ auxquelles on adjoint la partie $X \cup \{n\}$. Il s'ensuit, pour $X \subset [\![0,n-1]\!]$:

$$\left|\left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}\right| = \pi_{n-|X|}.$$

Par suite, les ensembles dans l'union $(*)$ étant deux à deux disjoints :

$$\pi_{n+1} = \sum_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \pi_{n-|X|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \subset [\![0,n-1]\!] \\ |X| = k}} \pi_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_{n-k}.$$

En conclusion, par symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k. \qquad (**)$$

2. Notons $b_n = \dfrac{\pi_n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et démontrons par récurrence (forte) que $0 \leqslant b_n \leqslant 1$.
L'assertion est vraie si $n = 0$.
Supposons l'assertion vraie pour tout $k \leqslant n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En divisant par $(n+1)!$ la relation $(**)$, il vient que :
$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i. \qquad (***)$$
D'après l'hypothèse de récurrence :
$$0 \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} 1 = 1,$$
et donc $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. Cela démontre l'assertion pour $n{+}1$ et donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par comparaison, puisque $|b_n| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ vaut 1, il vient que $R \geqslant 1$. Par conséquent, $R > 0$.

3. • Soit $x \in \left]-R, R\right[$. En multipliant la relation $(***)$ par $(n{+}1)x^n$ et en sommant, il vient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \right) x^n.$$
Cela est légitime, car le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à celui de la série entière $\sum (n{+}1) b_{n+1} x^n$. Par ailleurs, d'après les résultats relatifs au produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \right) x^n = f(x) \exp(x).$$
Par conséquent, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \right) x^n = f(x) \exp(x).$$
Sachant que $f(0) = 1$, cette dernière relation donne, en intégrant l'équation différentielle résolue, linéaire du premier ordre, homogène vérifiée par f, la relation :
$$\forall x \in \left]-R, R\right[\quad f(x) = \exp\bigl(\exp(x) - 1\bigr).$$

11.22 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\cdot$

1. • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{a_{n+1} |x|^{n+1}}{a_n |x|^n} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)}\, |x| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{4}\cdot$$
D'après la règle de d'Alembert, il vient que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est 4.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$2(2n{+}1) a_{n+1} = (n{+}1) a_n, \qquad \text{soit} \qquad 4(n{+}1) a_{n+1} - 2a_{n+1} = n a_n + a_n. \quad (*)$$

En multipliant la relation $(*)$ par x^n, avec $|x| < 4$ et en sommant, il vient :

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$

et donc pour tout x vérifiant $0 < |x| < 4$:

$$4f'(x) - 2\frac{f(x)-1}{x} = xf'(x) + f(x),$$

soit :

$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2. \qquad (\star)$$

Cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$.

2. Posons $I =]0,4[$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\frac{1}{4-x}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène :

$$x(4-x)y' - (x+2)y = 0$$

est :

$$\mathcal{S}_0 = \Big\{x \mapsto a\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\ ;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Par ailleurs, la méthode de la variation de la constante assure qu'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $y : x \mapsto \alpha(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}$ soit une solution de l'équation $(\star)$. La fonction α est caractérisée par :

$$\forall x \in I \quad \alpha'(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}} = \frac{-2}{x(4-x)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \quad \alpha'(x) = \frac{-2}{x^{3/2}}\sqrt{4-x}.$$

Une intégration par parties donne, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}\alpha(x) - \alpha(2) &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 + 2\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}}\\ &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(\frac{t}{2}-1)^2}}\\ &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\operatorname{Arcsin}\Big(\frac{x}{2}-1\Big) + C^{\text{te}}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de $(\star)$ sur I est :

$$\mathcal{S} = \Big\{x \mapsto \frac{4}{4-x} + \Big(2\operatorname{Arcsin}\Big(\frac{x}{2}-1\Big) + a\Big)\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\ ;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{4}{4-x} + \left(2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + a\right) \frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}.$$

La fonction f, qui est la somme d'une série entière sur $]-4,4[$, étant dérivable en 0, on en déduit que :

$$a = 2 \operatorname{Arcsin}(1) = \pi.$$

Il s'ensuit que :

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{4}{3} + \left(-2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right) \frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

11.23 1. Il est clair que f est définie et nulle en 1 et -1.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
Si $|x| > 1$, alors $\left|x^{2^n} - 1\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :

$$\ln\left(|x^{2^n} - 1|\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il s'ensuit que la série $\sum \ln\left(|x^{2^n} - 1|\right)$ diverge grossièrement. Par suite :

$$\ln\left|\prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right)\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et $f(x)$ n'est pas définie.

Si $|x| < 1$, alors $x^{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln\left(1 - x^{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} x^{2^n}$. Puisque $x^{2^n} \leqslant |x|^n$, car pour tout entier naturel n on a, par exemple par récurrence, $2^n \geqslant n$, et la série géométrique $\sum |x|^n$ est convergente, par comparaison des séries à terme général positif, les séries $\sum x^{2^n}$ et $\sum \ln\left(1 - x^{2^n}\right)$ convergent.

Ainsi la suite $\left(\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right)\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et, par continuité de la fonction exponentielle, la quantité $f(x)$ est définie.

2. Il est immédiat que $f(x) = (1-x) f(x^2)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrons que la fonction $g = \ln \circ f$ est continue. Pour cela, démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : x \mapsto \ln\left(1 - x^{2^n}\right)$, converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.

Soit $a \in]0,1[$. Par croissance de la fonction logarithme, on a :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \ln\left(1 - a^{2^n}\right) \leqslant \ln\left(1 - x^{2^n}\right) \leqslant 0.$$

La convergence de la série $\ln\left(1 - a^{2^n}\right)$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-a,a]$. Par conséquent, la fonction g est continue sur $]-1,1[$, car les u_n sont des fonctions continues. Par continuité de la fonction exponentielle, il en est de même de f.

3. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme g. On a :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[\quad (1-x)g(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

Par unicité du développement en série entière, la fonction g vérifiera :

$$g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-R, R\right[\quad g(x) = (1-x)g(x^2)$$

si, et seulement si :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \begin{cases} a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ -a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{$*$}$$

La relation $(*)$ définit bien une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est facile de vérifier par récurrence qu'elle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour cette suite, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1. La somme g est une fonction continue sur $\left]-1, 1\right[$ et vérifie :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-1, 1\right[\quad g(x) = (1-x)g(x^2) \tag{$**$}$$

On déduit de $(**)$ que pour tout entier n :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\quad g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right).$$

D'autre part, la fonction g étant continue en 0, on a, pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$g\left(x^{2^{n+1}}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(0) = 1.$$

Par conséquent, toujours pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, on a :

$$g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - x^{2^k}\right) = f(x).$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\quad \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - x^{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

ce qui démontre que f est développable en série entière.

11.24 1. On suppose que la série $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(x)$ sur $\left]-R, R\right[$. Pour tout x vérifiant $|x| < R$, on a par produit de Cauchy :

$$x f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+1} = f(x) - 1.$$

On en déduit $4x^2 f(x)^2 - 4x f(x) + 4x = 0$ et :

$$\left(2x f(x) - 1\right)^2 = 1 - 4x.$$

Puisque $2xf(x)-1$ est par continuité strictement négatif au voisinage de 0, il existe α de $]0,R[$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$, on ait $2xf(x)-1=-\sqrt{1-4x}$ et donc :

$$f(x)=\frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right),$$

(on considère en 0 les prolongements par continuité).

2. En utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ de rayon de convergence $1/4$, on voit que la fonction :

$$g(x)=\frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$$

se développe sur $]-1/4,1/4[$ en :

$$g(x)=\frac{-1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-1)^n(4x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}d_nx^n$$

avec $d_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

On a $d_0=1$. Comme $g(x)$ vérifie $xg(x)^2=g(x)-1$, il vient :

$$\forall x\in\left]\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}d_{n+1}x^{n+1}$$

et, par unicité des coefficients $d_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}$ pour tout n. On en déduit par récurrence $c_n=d_n$ pour tout n.

11.25 1. Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_n$: « la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(x)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}f(\lambda^nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ ».

- Puisque f est par définition dérivable, f est continue.

  De plus la formule $f^{(n)}(x)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}f(\lambda^nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ est évidemment vérifiée lorsque $n=0$.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ vérifiée pour un entier naturel n.

  Par hypothèse, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}f(\lambda^nx)$ et, puisque f est dérivable, cette dernière relation donne que $f^{(n)}$ dérivable. De plus, toujours pour $x\in\mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda^nf'\left(\lambda^nx\right)=\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}f\left(\lambda^{n+1}x\right).$$

  Cette expression montre que $f^{(n+1)}$ est continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Cela démontre le résultat par récurrence.

2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral, pour démontrer que f est nécessairement la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

Commençons par remarquer que $f^{(n)}(0)=f(0)\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Soit a un réel strictement positif. Notons $M_a=\max\limits_{x\in[-a,a]}\left|f(x)\right|$, qui est bien définie puisque f est continue.

Pour tout $x \in [-a,a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x) - f(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!}\,x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1}t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,x^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1}xu)\,\mathrm{d}u}_{R_n(x)}$$

Puisque $\lambda \in \,]0,1[$, pour tout $x \in [-a,a]$ et $u \in [0,1]$, on a $\left|\lambda^{n+1}xu\right| \leqslant a$ et donc :

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,|x|^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} \left|f(\lambda^{n+1}xu)\right|\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} M_a\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1} M_a\,\mathrm{d}u \leqslant M_a\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De la convergence de la série $\sum \frac{a^n}{n!}$, il vient que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

Il est par ailleurs facile de vérifier que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\,x^n$ est une solution du problème.

11.26 1. Il est clair que $A_{n,p}$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant exactement p points fixes, c'est-à-dire $A_{n,p}$ ne dépend pas explicitement de l'ensemble considéré à n éléments.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Si $A \subset [\![1,n]\!]$ est un ensemble de cardinal p, alors une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement les éléments de A comme points fixes induit une permutation sans point fixe sur $\complement_{[\![1,n]\!]}A$. Il y a donc $A_{n-p,0}$ telles permutations. Puisqu'il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments dans $[\![1,n]\!]$, on obtient :

$$A_{n,p} = \binom{n}{p} A_{n-p,0}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ et $\mathfrak{S}_{n,p}$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement p points fixes, il est clair que :

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{p=0}^{n} \mathfrak{S}_{n,p}.$$

Cette dernière union étant disjointe et le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ étant $n!$, on en déduit :

$$n! = \sum_{p=0}^{n} A_{n,p}.$$

Cette dernière égalité est encore vérifiée lorsque $n = 0$.

3. • Il est clair, de par la définition de $A_{n,0}$, que $A_{n,0} \leqslant n!$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{A_{n,0}}{n!} \leqslant 1.$$

Puisque le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ vaut 1, par comparaisons, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{A_{n,0}}{n!}$ vérifie $R \geqslant 1$.

• La relation de la question 2 peut se réécrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n!} A_{n,p}$$

et d'après la première question :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{p} A_{n-p,0} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{A_{n-p,0}}{(n-p)!}. \qquad (*)$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, en multipliant la relation précédente par x^n et en sommant, ce qui est possible puisque la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{A_{n-p,0}}{(n-p)!} \right) x^n.$$

On reconnait à droite la somme du produit de Cauchy des séries $\sum \frac{A_{n,0}}{n!} x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Ces deux séries étant absolument convergentes pour $x \in]-1,1[$ (pour la seconde il s'agit de la série exponentielle), on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{A_{n-p,0}}{(n-p)!} \right) x^n = f(x) \exp(x).$$

Par suite :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Enfin, on constate que $R = 1$, car si $R > 1$, la fonction f serait bornée au voisinage de 1^-, ce qui n'est pas le cas.

4. Pour $x \in]-1,1[$, on a, les séries considérées étant toutes absolument convergentes :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{A_{n,0}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Compte tenu de la première question, on obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in [\![0, n]\!] \quad A_{n,p} = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

11.27 1. Il s'agit de montrer que si $n \geqslant 2$, l'équation $2p + 3q = n$, d'inconnues p et q a au moins une solution dans les entiers naturels.
Soit $n \geqslant 2$ un entier.
- Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2i$, avec i entier naturel, et $(i, 0)$ est solution.
- Si n est impair, comme $n \geqslant 3$ et $n-3$ est un entier naturel pair, $\big((n-3)/2, 1\big)$ est une solution.

2. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \mu_n x^n$. Procédons par encadrement.
- D'après la question précédente, $\mu_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 2$ et donc, par comparaisons, $R \leqslant 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si (p, q) est une solution, alors $0 \leqslant p \leqslant n/2$ et, pour $p \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$ donné, il existe au plus un entier q tel que $2p + 3q = n$.
Il s'ensuit que $\mu_n \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leqslant n + 1$. Le rayon de convergence de la série $\sum n x^n$ étant 1, on en déduit que $R \geqslant 1$.

En conclusion, $R = 1$.

3. Pour $a \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, notons $\varepsilon_k(a)$ l'entier qui vaut 1 si a divise k, et 0 sinon.
- Fixons $a \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$. On a :

$$\frac{1}{1 - x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{an} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(a) x^k.$$

En effet l'égalité de gauche est immédiate, puisqu'il s'agit d'un résultat connu sur les séries géométriques.
Justifions la seconde égalité. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n(a) x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor N/a \rfloor} x^{an} + \underbrace{\sum_{n=a\lfloor N/a \rfloor + 1}^{N} \varepsilon_n(a) x^n}_{=A_N(x)}.$$

Le terme $A_N(x)$ est la somme d'au plus a termes, chacun majoré en valeur absolue par $|x|^{a\lfloor N/a \rfloor}$, car $|x| < 1$. Ainsi, toujours du fait que $|x| < 1$:

$$\big|A_N(x)\big| \leqslant a|x|^{a\lfloor N/a \rfloor} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela, avec la convergence de la série $\sum x^{an}$, établit la seconde égalité.
La convergence de la série $\sum \varepsilon_n(a) x^n$ ayant été démontrée pour $x \in [0, 1[$, cette convergence est absolue sur $]-1, 1[$, car $\varepsilon_k(a)$ est toujours positif.

- Soit $x \in \left]-1,1\right[$.
  Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :

$$\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(2)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(3)x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} \varepsilon_i(2)\varepsilon_j(3)\right)}_{=a_n} x^n$$

  Puisque, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a $\varepsilon_i(2)\varepsilon_j(3) = 1$ si, et seulement si, 2 divise i et 3 divise j, il vient, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{i+j=n} \varepsilon_i(2)\varepsilon_j(3) = \sum_{2i'+3j'=n} 1 = \mu_n.$$

  Par suite :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad f(x) = \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3}.$$

11.28 1. Posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n : x \mapsto \frac{\cos\left(n^2x\right)}{2^n}.$$

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{n^{2k}}{2^n} \cos\left(n^2x + k\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Les fonctions $u_n^{(k)}$ sont donc bornées sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty\left(u_n^{(k)}\right) = \frac{n^{2k}}{2^n} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Par théorème, puisque les séries $\sum u_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$ et que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n} \cos\left(n^2x + p\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Par suite la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Pour démontrer que f n'est pas développable en série entière, il suffit de montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nul.

Il vient de la question précédente que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(2p)}(0) = (-1)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(2p)}(0)\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \geqslant \frac{p^{4p}}{2^p}.$$

En notant $b_p = \frac{p^{4p}}{(2p)!\,2^p}$, déterminons le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$. Pour tout $r > 0$, on a :

$$\frac{|b_{p+1}|\,r^{2p+2}}{b_p r^{2p}} = \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{4p}\frac{r^2}{2} \geqslant \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)}\frac{r^2}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il vient par la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$ est nul. Par comparaison, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p}$ est nul. Par suite la fonction f n'est pas développable en série entière.

11.29 Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Démontrons par récurrence :

   $\mathcal{H}_n$: « il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ ».

   Pour $n = 0$, le polynôme $P_0 = 1$ convient.
   Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, en dérivant $f^{(n)}$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, que :

   $$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) f(x).$$

   Il s'ensuit que le polynôme $P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P_n'$ convient.

2. • Notons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

   $$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P_n'.$$

   On vient de voir que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P_n est élément de $\mathbb{R}_d[X]$ pour un certain entier d. Il s'ensuit que l'on a au voisinage de 0 :

   $$P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{d+1}}\right),$$

   et donc :

   $$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \mathrm{O}\left(\frac{\exp(-1/x^2)}{x^{d+1}}\right).$$

   Il s'ensuit, par croissances comparées, que l'on a :

   $$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

   • Soit p un entier naturel. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $f^{(k)}$ admet une limite finie en 0 pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, la fonction f a un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^p$, qui coïncide avec le prolongement par continuité, que l'on note g. Par conséquent la fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ et $g^{(p)}(0) = 0$, cela pour tout entier p. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- La série de Taylor de g est nulle. Cependant, la fonction g ne s'annule qu'en 0 (car $g(x) = \exp(-1/x^2) > 0$ lorsque $x \neq 0$). Ainsi, g ne coïncide sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor ; la fonction g n'est pas développable en série entière.

11.30 1. Puisque la suite a est convergente, elle est bornée et donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$.Fixons un tel n_0. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$\big|(1-x)f(x)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-x) x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(1-x)x^n$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\big|(1-x)f(x)\big| &\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon(1-x)x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + x^{n_0}\varepsilon \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \varepsilon. \qquad (*)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$ on ait :

$$0 \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \leqslant \varepsilon. \qquad (**)$$

Fixons un tel η. Alors, pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$0 \leqslant \big|(1-x)f(x)\big| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, par définition, $(1-x)f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes, on a au voisinage de 1^- :

$$f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot$$

2. En appliquant la question précédente à la suite $(a_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$, qui tend vers 0, il vient qu'au voisinage de 1^- :

$$f(x) - \frac{\alpha}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \alpha)\, x^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}\cdot$

11.31 1. Remarquons que puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, la restriction de g à $[0,1[$ est croissante. Il s'ensuit que g a une limite ℓ en 1, finie ou infinie. Par ailleurs, toujours du fait que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} b_k x^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_k x^k = g(x).$$

En faisant tendre x vers 1 dans cette inégalité, il vient que $\sum\limits_{n=0}^{N} b_k \leqslant \ell$. Comme la série à termes positifs $\sum b_n$ est divergente, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} b_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, $\ell=+\infty$.

2. Fixons un $\varepsilon>0$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $|a_n-b_n|\leqslant \varepsilon\, b_n$, pour tout $n\geqslant n_0$. Fixons un tel n_0.
Pour tout $x\in[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\big|f(x)-g(x)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n-b_n|\,x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| + \varepsilon\, g(x). \qquad (*)\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $g(x) \underset{x\to+1^-}{\longrightarrow} +\infty$, on a au voisinage de 1 :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| = \mathrm{o}\big(g(x)\big).$$

Par conséquent, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[1-\eta,1[$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| \leqslant \varepsilon\, g(x). \qquad (**)$$

Ainsi, pour tout $x\in[1-\eta,1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\big|f(x)-g(x)\big| \leqslant 2\varepsilon g(x),$$

c'est-à-dire, par définition, $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} g(x)$.

11.32 1. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln 2 \leqslant \ln n \leqslant n-1$. Les rayons de convergence des séries $\sum (n-1)x^n$ et $\sum x^n$ valant 1, on obtient par comparaison que le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n)\, x^n$ vaut 1.

2. Opérons une comparaisons série/intégrale. La fonction $t \mapsto 1/t$ étant continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, on a pour tout entier naturel $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k-1}$$

et donc en sommant, pour $n \geqslant 2$, à l'aide de la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et donc :

$$-1 \leqslant \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant 0.$$

Cela démontre que la suite $\left(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. Notons M est un majorant de la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Soit $x \in [0,1[$.
     Le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1-t)$ donne, par produit de séries absolument convergentes :

     $$-\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n.$$

     On en déduit :

     $$\left| f(x) + \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| x^n \leqslant \frac{M}{1-x}\cdot$$

   - Il vient de l'inégalité précédente qu'au voisinage de 1 :

     $$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right)\cdot$$

     Par conséquent, selon la définition de l'équivalence :

     $$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$$

11.33 1. Par hypothèse :

$$\frac{a_n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right)\cdot$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ étant $+\infty$, il en est de même par comparaison du rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!}\, x^n$.

2. Montrons que $f(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   - Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Fixons un tel n_0. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\left| e^{-x} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right| &\leqslant e^{-x} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!} x^n \\ &\leqslant e^{-x} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2\,n!} x^n \\ &\leqslant e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2\,n!} x^n \qquad \text{(série à termes positifs)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} e^{-x} e^{x} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot \qquad \text{(définiton de la fonction exp)}\end{aligned}$$

   - Par croissances comparées, il vient :

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!}\, x^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Il existe donc un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$ on ait :

$$\left| e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!}\, x^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

   Fixons un tel réel x_0.
   - Pour tout $x \geqslant x_0$, on a :

$$\begin{aligned}\left| e^{-x} f(x) \right| &= \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!}\, x^n + e^{-x} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right| \\ &\leqslant \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!}\, x^n \right| + \left| e^{-x} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

   On en déduit que $e^{-x} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) = \mathrm{o}(e^{x})$ au voisinage de $+\infty$.

Chapitre 12 : Convergence dominée et applications

Convergence dominée et applications

12

Dans ce chapitre, nous étudions des intégrales dépendant d'un paramètre qui peut être entier (suites de fonctions) ou réel. Dans les deux cas, nous nous intéresserons aux problèmes de convergence et dans le second cas à la continuité et à la dérivabilité.
Les résultats de ce chapitre sont importants, mais certaines démonstrations sont hors programme. Il convient alors de lire avec attention les exemples et contre-exemples pour bien comprendre les hypothèses.
Dans tout le chapitre, les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés seront d'intérieur non vide et les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Suites et séries d'intégrales

1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1 (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ *intégrable* sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(**hypothèse de domination**).

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Nous n'en ferons pas la démonstration qui est hors programme.
Une démonstration avec des hypothèses renforcées est proposée dans l'exercice 12.8 de la page 703.

Remarques

- La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr, en particulier, continue par morceaux (car intégrable) et à valeurs positives.
- On n'oubliera pas de vérifier la continuité par morceaux de f. En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+nt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+nt)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $t > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+nt) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(0) = 1$

  Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

  La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, possède une limite finie à droite en 0 ; elle est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left|f_n(t)\right| = f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

  La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; comme $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

En conclusion, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Attention

Constatons sur un exemple l'importance de l'hypothèse de domination.
Soit $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^2 t^{n-1}$. Pour $n \geqslant 1$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1[$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, par comparaison des suites géométriques et puissances. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle, continue et intégrable sur $[0,1[$, d'intégrale nulle sur $[0,1[$.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc vérifiées, en dehors de l'hypothèse de domination. Or $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[nt^n\right]_0^1 = n$.

On n'a donc pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

p.690 **Exercice 1** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(t^n)\,\mathrm{d}t$.

p.690 **Exercice 2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x}\, e^{-x}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u$.
2. Justifier l'existence de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. En déduire un équivalent simple de I_n.

Remarque On aurait pu utiliser, dans la deuxième question de l'exercice précédent, le théorème de convergence dominée, mais ici une simple majoration nous a permis de conclure plus rapidement.

Attention Il faut bien noter, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, que *l'intervalle d'intégration est fixe*. Nous allons voir, dans l'exercice suivant, comment on peut parfois contourner cette difficulté lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n.

p.691 **Exercice 3** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{t/2}\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{1}_{[0,n]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$ et l'on considère $f_n : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{t/2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\,. \end{array}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$, et que $I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f_n$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2$.

   On pourra utiliser le théorème de convergence dominée et la première question de l'exercice 2.

2 Séries de fonctions intégrables

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2 (d'intégration terme à terme)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On fait les hypothèses suivantes :

- chaque u_n est intégrable sur I,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série $\sum \left(\int_I |u_n| \right)$ converge.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right).$$

Remarques

- Chaque u_n est bien sûr supposée en particulier continue par morceaux (car intégrable).
- Dans la plupart des exercices, on développe en série une fonction f continue par morceaux. La continuité par morceaux de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, égale à f, est alors évidente.
- Lorsque chaque u_n est continue et qu'on ne connaît pas d'expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, on peut s'assurer que c'est une fonction continue (donc continue par morceaux) par convergence uniforme, voire normale, sur tout segment.

Exemples

1. Établissons l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$

   Pour tout $t \in]0,1[$, la série géométrique $\sum t^n \ln t$ converge et l'on a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}\cdot$$

   Appliquons à la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(t) = -t^n \ln t$, le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,1[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $]0,1[$ et l'on a :
$$\forall t \in]0,1[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant |\ln t|.$$
Comme la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0,1[$, on en déduit, par comparaison, que chaque u_n est intégrable sur $]0,1[$.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$, continue sur $]0,1[$.
- Calculons $\displaystyle\int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrons par parties, en utilisant le théorème 55 de la page 418 (l'intégrale qu'on calcule existe, par intégrabilité de u_n et le crochet existe, par croissances comparées) :
$$\int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}(-\ln t)}{n+1}\right]_0^1}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot$$
La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t$ est donc convergente.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on peut facilement vérifier directement) et l'on a :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

2. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}$ et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.

- Chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la proposition 16 de la page 401.
- Pour $t > 0$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-nt},$$
ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(t)$, par comparaison à la série géométrique $\sum e^{-nt}$, de raison $e^{-t} \in]0,1[$, donc convergente.
Par suite, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$
Montrons la continuité de la somme sur $]0,+\infty[$.
  * Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$.
  * Il suffit donc d'établir la convergence normale sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. Soit $[a,b]$ un tel segment ($a < b$). Par positivité et décroissance de chaque u_n, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sup_{[a,b]} |u_n| = u_n(a)\ ;$$
d'où la conclusion, d'après l'étude de la convergence simple.

- Comme chaque u_n est positif, on a :

$$\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \left[-\frac{e^{-nt}}{n^{\frac{3}{2}}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite, la série $\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n| \right)$ est une série de Riemann convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et la formule annoncée s'en déduit, d'après le calcul précédent.

p.692 **Exercice 4** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2}{e^x - 1} \end{array}$.

1. Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Attention L'hypothèse de convergence de la série $\sum \left(\int_I |u_n| \right)$ est essentielle et la seule convergence, même absolue, de la série $\sum \left(\int_I u_n \right)$ ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^{2n+1}$.

- Chaque u_n est bien sûr intégrable sur $]-1, 1[$ et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} u_n = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} \right]_{-1}^{1} = 0.$$

  En particulier, la série $\sum \int_{-1}^{1} u_n$ converge.

- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$, puisque, pour tout $t \in]-1, 1[$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $t^2 \in [0, 1[$.

  Sa somme $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est continue sur $]-1, 1[$, mais elle n'est pas intégrable, car l'une de ses primitives, $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln\left(1 - t^2\right)$ n'a pas de limite finie en 1.

Point méthode

Lorsque le théorème 2 de la page 677 ne s'applique pas ou s'applique difficilement, on peut essayer de justifier l'intégration terme à terme d'une série de fonctions intégrables sur un intervalle I, en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

L'exercice suivant est une illustration du point méthode précédent.

p.693

Exercice 5

1. Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \frac{\cos x}{e^x + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos x.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos x$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (S_n), avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2+1}.$$

3. Quelle est la nature de la série $\sum \int_{]0,+\infty[} |u_n|$? Le théorème d'intégration terme à terme s'applique-t-il à la série $\sum u_n$ sur $]0, +\infty[$?

II Intégrales à paramètre

1 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 3 (Continuité des intégrales à paramètre)

Soit J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour tout segment $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ *intégrable* sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination sur tout segment**).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur J.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité, le théorème de convergence dominée et l'exercice 34 de la page 237.

Démonstration (non exigible) page 694

Remarques

1. La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr à valeurs positives et, étant intégrable, elle est en particulier continue par morceaux.
2. Dans le troisième point (hypothèse de domination sur tout segment), la fonction φ dépend *a priori* du segment $[a,b]$.

   Il va de soi qu'il suffit d'avoir une **hypothèse de domination globale**, c'est-à-dire l'existence d'une fonction $\varphi\ : I \mapsto \mathbb{R}$ *intégrable* sur I telle que :
   $$\forall\,(x,t) \in J \times I \quad \left|f\,(x,t)\right| \leqslant \varphi\,(t)\,.$$
   Lorsqu'une telle hypothèse de domination globale est vérifiée, il est inutile de repasser par la domination sur tout segment pour pouvoir appliquer le théorème.

Exemple Montrons que la fonction $g\,:\,x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquons le théorème 3 de la page précédente en notant $f\,:\,(x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\cdot$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f\,(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f\,(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on a :
  $$\left|f\,(x,t)\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$
  La fonction $\varphi\,:\,t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, quand $t \to +\infty$, on a $\varphi\,(t) \sim \frac{1}{t^2}$; d'où l'intégrabilité de φ sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit donc l'hypothèse de domination (ici hypothèse de domination globale).

En conclusion, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination est essentielle.
Prenons $A = \mathbb{R}$, $I = \,]0,1]$ et $f : A \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f\,(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}\cdot$
On vérifie sans difficulté les deux premières hypothèses.
Calculons $g\,(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On a $g\,(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:
$$g\,(x) = \big[\,\mathrm{Arctan}\,(t/x)\,\big]_{t=0}^{t=1} = \mathrm{Arctan}\,(1/x)\,.$$
Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g\,(x) = +\pi/2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g\,(x) = -\pi/2$; la fonction g n'est donc pas continue en 0.

p.695

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la *transformée de Fourier* $\mathcal{F}(f)$ de f par :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$ et f' intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f')(k) = ik\mathcal{F}(f)(k)$.

p.696

Exercice 7 On fixe une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue.

On note $\ell_0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0)$ et l'on suppose l'existence de $\ell_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Pour tout réel $q \geqslant 0$, on pose $H(q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} f(qu)\, \mathrm{d}u$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que H est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

p.696

Exercice 8 *On reprend les hypothèses et les notations de l'exercice 7.*

On va montrer, par deux méthodes différentes, que $\lim\limits_{q\to+\infty} H(q) = \ell_\infty$.

1. (a) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} H(q_n) = \ell_\infty$.

   (b) Conclure.
2. Pour tout réel $p > 0$, on pose $K(p) = H\left(\dfrac{1}{p}\right)$.

   Montrer, à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètre, que K se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, puis conclure.

p.697 **Exercice 9** *On reprend les hypothèses et les notations de l'exercice 7 de la page précédente.*

On définit la **transformée de Laplace** $Lf : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ de f par :

$$\forall p > 0 \quad Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la définition de Lf et exprimer Lf à l'aide de H.
2. Démontrer le **théorème de la valeur initiale**, c'est-à-dire :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,Lf(p) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell_0.$$

   On utilisera l'exercice 7 de la page ci-contre.
3. Démontrer le **théorème de la valeur finale**, c'est-à-dire :

$$\lim_{p\to 0^+} p\,Lf(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell_\infty.$$

   On utilisera l'exercice 8 de la page précédente.

Point méthode

Supposons que le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ contienne un intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

Pour montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{K}$, on pourra :

- appliquer à la fonction $h : y \mapsto g\left(\dfrac{1}{y}\right)$, prolongée en 0 par ℓ, le théorème de continuité des intégrales à paramètre, comme dans la question 2 de l'exercice 8 de la page ci-contre ;
- appliquer la caractérisation séquentielle de la limite à la fonction g, puis le théorème de convergence dominée, comme dans la question 1 de l'exercice 8 de la page précédente.

2 Dérivation d'une intégrale à paramètre

Rappel Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(x_0,t_0) \in J \times I$.
Lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x,t_0)$ est appelée dérivée partielle par rapport à x en (x_0,t_0) de f et est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)$.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}\cdot$
Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, dont la deuxième ne s'annule pas. Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{x^2+t^2} + x^2 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}\cdot$$

Théorème 4 (Dérivation des intégrales à paramètre)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- pour tout segment $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination sur tout segment pour** $\frac{\partial f}{\partial x}$)$\cdot$

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et l'on a :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. Pour tout $x_0 \in J$, on forme les taux d'accroissement de g en x_0 et l'on applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Démonstration (non exigible) page 697

Remarque Dans le quatrième point (hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$), la fonction φ dépend *a priori* du segment $[a,b]$.
Il va de soi qu'il suffit d'avoir une **hypothèse de domination globale**, c'est-à-dire l'existence d'une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ *intégrable* sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Lorsqu'une telle hypothèse de domination globale est vérifiée, il est inutile de repasser par la domination sur tout segment pour pouvoir appliquer le théorème. Ce sera le cas dans l'exemple suivant.

Exemple *On reprend les notations de l'exercice 6 de la page 682.*
On considère une fonction f continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et l'on suppose la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrons que la transformée de Fourier de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Notons $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (k,x) & \longmapsto & f(x)\, e^{-ikx}. \end{array}$

- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(k,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après l'exercice 6 de la page 682.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto h(k,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
$$\forall (k,x) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial h}{\partial k}(k,x) = -ixf(x)\, e^{-ikx}.$$
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial k}(k,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, puisque f l'est.
- On a :
$$\forall (k,x) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial h}{\partial k}(k,x)\right| = \left|xf(x)\right| = \left|g(x)\right|.$$
Cela fournit l'hypothèse de domination (ici hypothèse de domination globale), puisque g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On déduit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)'(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial k}(k,x)\, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} ixf(x)\, e^{-ikx} \mathrm{d}x = \mathcal{F}(-ig)(k).$$

Exemple Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

- Montrons que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètre. On note $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.
  * Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  * On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, quand $t \to +\infty$; d'où l'intégrabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

  D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (par parité de g, elle l'est également sur $\mathbb{R}_-^*$), en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

  * Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :
  $$\forall t \geqslant 0 \quad \forall x > 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$
  * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme on l'a vu dans l'étude de définition de g.
  * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  * Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :
  $$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2(1+t^2)}.$$
  La fonction $\varphi : t \mapsto 2be^{-a^2(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
  $$\varphi(t) = 2be^{-a^2}e^{-a^2t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$
  par croissances comparées ; d'où l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  L'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ est établie.

  On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
  $$\forall x > 0 \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

- Déduisons de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

  Notons que I existe, car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

  En effectuant dans l'intégrale donnant g' le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ (on applique le théorème 56 de la page 419 : la fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :
  $$\forall x > 0 \quad g'(x) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2\,I\,e^{-x^2}.$$
  En primitivant, on en déduit l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que :
  $$\forall x > 0 \quad g(x) = -2I\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C.$$

On a, par ailleurs :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-x^2}.$$

Par encadrement, on en déduit $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ et donc $C = 2I^2$.

On a, de plus :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} g = C = 2I^2.$$

La continuité de g en 0 permet de conclure que $2I^2 = \frac{\pi}{2}$ et, comme $I \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est essentielle.

Prenons $J = \mathbb{R}$, $I =]0,+\infty[$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}\cdot$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la seconde ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{x^2}{x^2+t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et comme, au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{x^2}{t^2}$, f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a vu dans l'exemple de la page 684 que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}$ et l'on prouve de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ a un prolongement continu sur $[0,+\infty[$.

Ainsi les trois premières hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont vérifiées.

Bien sûr $g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(x \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}|x|$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$. Par suite g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car non dérivable en 0 .

p.698 **Exercice 10** Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer g', puis g.

Corollaire 5 (Classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J,
- pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour *tout segment* $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination sur tout segment pour** $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$).

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a, pour tout $p \in [\![1, k]\!]$:

$$\forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. Démonstration (non exigible) page 699

On procède par récurrence et l'on utilise le théorème 4 de la page 684.

Exemple Montrons que $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx}\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le corollaire 5. On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2} e^{-itx}$ et l'on fixe $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall p \in [\![0, k]\!] \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (-it)^p\, e^{-t^2} e^{-itx}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

  On a, quand $|t| \to +\infty$:

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \right| = |t|^p\, e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right), \qquad (*)$$

  par croissances comparées.

  Cela assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |t|^k e^{-t^2}.$$

  Comme en $(*)$, on en déduit que la fonction $t \mapsto |t|^k e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

  Cela assure l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 5 de la page ci-contre, on peut conclure que g est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

p.700 **Exercice 11** On conserve la notation de l'exemple précédent.

Former une équation différentielle vérifiée par g et en déduire g.

p.701 **Exercice 12**

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : t \mapsto \cos(t^n)$ et appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$.

- Pour $t \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$; on en déduit, par composition de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(1) = \cos 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \cos 1 & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$
Cette fonction f est en escalier, donc continue par morceaux.
- On a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \left|f_n(t)\right| = \left|\cos(t^n)\right| \leqslant 1.$$
La fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$, puisque cet intervalle est borné. Cela fournit donc l'hypothèse de domination.

On déduit alors du théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(t^n)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 2

1. Pour $u > -1$, on a :
$$\ln(1+u) - u = \int_0^u \left(\frac{1}{1+t} - 1\right)\mathrm{d}t = -\int_0^u \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
   - Pour $u \geqslant 0$, on a :
$$\forall t \in [0,u] \quad \frac{t}{1+t} \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \int_0^u \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
   - Pour $u \in]-1,0]$, on a :
$$\forall t \in [u,0] \quad \frac{t}{1+t} \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad \int_u^0 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

   Dans les deux cas, on obtient l'inégalité annoncée.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x} e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 1/n$. En utilisant l'inégalité établie à la première question, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{n}\cdot \qquad (*)$$
La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$ et donc l'existence de I_n.
L'encadrement $(*)$ donne, par intégration sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n},$$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = nf_n$ et appliquons à la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}_+^*$. Chaque f_n et donc chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Soit $x > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$, on a $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$; on en déduit :
   $$g_n(x) \sim \frac{n}{x}\frac{x}{n}e^{-x} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-x}.$$
   Ainsi la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue $x \mapsto e^{-x}$.
   - L'encadrement $(*)$ fournit :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|g_n(x)\right| = g_n(x) \leqslant e^{-x}.$$
   La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, cela donne l'hypothèse de domination.

   On déduit alors du théorème de convergence dominée que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$, c'est-à-dire $I_n \sim \dfrac{1}{n}\cdot$

Exercice 3

1. La fonction f_n est continue sur $[0,n]$ et nulle sur $]n,+\infty[$, donc continue par morceaux (et même continue, car continue en n).

   Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f_n|$ est constante sur $]n,+\infty[$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n f_n = I_n$.
2. Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour $n > t$, qui équivaut à $1 - \frac{t}{n} > 0$, on a :
   $$\mathbb{1}_{[0,n]}(t) = 1 \quad \text{donc} \quad f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{t/2} > 0.$$
   Un développement limité de $\ln\bigl(f_n(t)\bigr)$, quand $n \to +\infty$, donne :
   $$\ln\bigl(f_n(t)\bigr) = n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) + \frac{t}{2} = n\left(-\frac{t}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} + \mathrm{o}(1).$$
   On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t/2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f : t \mapsto e^{-t/2}$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a, si $n > t$:
   $$\left|f_n(t)\right| = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}e^{t/2} \leqslant e^{-t}e^{t/2} = e^{-t/2},$$
   en utilisant la même inégalité qu'à la première question de l'exercice 2.

Comme, pour $n \leqslant t$, on a $f_n(t) = 0$, on peut écrire :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant e^{-t/2}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-t/2}\mathrm{d}t = \left[-2e^{-t/2}\right]_0^{+\infty} = 2.$$

Exercice 4

1. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \quad \text{car} \quad e^{-x} \in]0,1[.$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto x^2 e^{-nx}$ et appliquons à la série $\sum u_n$ le théorème d'intégration terme à terme (page 677) sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Comme $u_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées, u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, donc u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après la première question, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n$, procédons à une intégration par parties (l'intégrale à calculer converge, par intégrabilité de u_n, et le crochet existe, par croissances comparées) :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2 e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x.$$

  Effectuons une deuxième intégration par parties (l'intégrale que l'on calcule converge, d'après la première intégration par parties, et le crochet existe, par croissances comparées) :

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2xe^{-nx}}{n^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{n^3}.\end{aligned}$$

  On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \frac{2}{n^3}$, ce qui prouve la convergence de la série $\displaystyle\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n|\right)$ (série de Riemann).

En conclusion, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 5

1. Soit $x > 0$. Comme $e^{-x} \in]0,1[$, on peut écrire :

$$\frac{\cos x}{e^x+1} = \frac{e^{-x}\cos x}{1+e^{-x}} = e^{-x}\cos x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-e^{-x}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, e^{-nx}\cos x.$$

2. • Appliquons le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}_+^*$ à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Chaque fonction S_n est continue, comme somme finie de fonctions continues.

   * D'après le première question, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue $x \mapsto \dfrac{\cos x}{e^x+1}\cdot$
   * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, on a :

   $$S_n(x) = e^{-x}\cos x \sum_{k=1}^{n} \left(-e^{-x}\right)^{k-1} = e^{-x}\cos x\, \frac{1-\left(-e^{-x}\right)^n}{1+e^{-x}}\cdot$$

   Comme $1 + e^{-x} \geqslant 1$, on en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x > 0 \quad \left|S_n(x)\right| \leqslant e^{-x}\left(1+e^{-nx}\right) \leqslant 2e^{-x}.$$

   Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, cela fournit l'hypothèse de domination.

   On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k. \qquad (*)$$

   Comme chaque u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} u_k.$$

   On déduit alors de $(*)$:

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k.$$

   • Soit $k \in \mathbb{N}^*$; pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_k$, remarquons que :

   $$\int_0^{+\infty} u_k = (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}\left(e^{-kx}e^{ix}\right)\mathrm{d}x.$$

   La fonction $x \mapsto e^{-kx}e^{ix}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque :

   $$\forall x > 0 \quad \left|e^{-kx}e^{ix}\right| = e^{-kx} \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-kx}e^{ix}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-kx}e^{ix}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-kx}e^{ix}}{-k+i}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{k-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{k+i}{k^2+1}\right) = \frac{k}{k^2+1}\cdot$$

On a donc établi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+1}\cdot$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n}{n^2+1} = \left|\int_0^{+\infty} u_n\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |u_n|\,.$$

Comme $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, la série $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann. On en déduit, par comparaison, la divergence de la série $\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$.

Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique donc pas.

Théorème 3 D'après l'exercice 34 de la page 237, il suffit de prouver que g est définie et continue sur tout segment $[a,b] \subset J$.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans J. Pour établir que g est définie et continue sur $[a,b]$, utilisons la *caractérisation séquentielle de la continuité*.

Fixons $\alpha \in [a,b]$ et donnons-nous une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du segment $[a,b]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par $f_n(t) = f(x_n,t)$.

D'après la deuxième hypothèse, chaque f_n est continue par morceaux sur I.

Pour tout $t \in I$ fixé, d'après la première hypothèse et par *composition des limites* appliquée à la fonction continue $x \mapsto f(x,t)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,t) = f(\alpha,t)$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto f(\alpha,t)$, continue par morceaux sur I d'après la deuxième hypothèse.

Pour tous $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la troisième hypothèse, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$, avec φ intégrable sur I.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(\alpha,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\alpha)\,.$$

Cela étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b]$ de limite α, on en déduit, par caractérisation séquentielle de la continuité, que g est continue en α, pour tout $\alpha \in [a,b]$, c'est-à-dire sur $[a,b]$.

Exercice 6

1. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $k \mapsto f(x)\,e^{-ikx}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\,e^{-ikx}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - On a :
   $$\forall (k,x) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|f(x)\,e^{-ikx}\right| = \left|f(x)\right|,$$
   ce qui fournit l'hypothèse de domination (ici globale), puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'$ et $\displaystyle\int_0^{-\infty} f'$ convergent.

   La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f'$ possède donc une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x f' = f(x) - f(0).$$
   On en déduit l'existence de $\lim\limits_{+\infty} f$ et de $\lim\limits_{-\infty} f$ dans $\mathbb{C}$.

   Si $\ell = \lim\limits_{+\infty} f \neq 0$, on a $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$; comme la fonction constante ℓ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f ne l'est pas non plus, par comparaison. Cela contredit les hypothèses.

   Par suite $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. On prouve de même $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{R}$. Appliquons le théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque à l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x$:
   - les fonctions f et $x \mapsto e^{-ikx}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
   - l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x$ converge ;
   - le crochet $\left[f(x)\,e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty}$ existe et vaut 0, puisque $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ikf(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x$ converge et qu'on a l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x = \left[f(x)\,e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} ikf(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x.$

   On a donc établi :
   $$\forall k \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f')(k) = ik\mathcal{F}(f)(k).$$

Exercice 7

1. Par définition de la limite, on peut trouver un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geqslant A \quad |f(t)| \leqslant |\ell_\infty| + 1.$$

La fonction f est donc bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Comme elle est continue, elle est également bornée sur le segment $[0, A]$.

On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Soit $h : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (q, u) & \longmapsto & e^{-u} f(qu). \end{array}$

- Pour tout $u \in [0, +\infty[$, la fonction $q \mapsto h(q, u)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $q \in [0, +\infty[$, la fonction $u \mapsto h(q, u)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- En notant $M = \sup\limits_{t \geqslant 0} \big|f(t)\big|$, on a :

$$\forall (q, u) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\quad \big|h(q, u)\big| \leqslant M e^{-u}.$$

Cela fournit l'hypothèse de domination (globale sur $[0, +\infty[$), puisque la fonction $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc aussi la fonction $u \mapsto M e^{-u}$.

On a établi la continuité de H sur $[0, +\infty[$, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Exercice 8

1. (a) Définissons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n(u) = e^{-u} f(q_n u)$$

et appliquons-lui le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- Pour tout $u > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(u) = \ell_\infty e^{-u}$, par composition de limites, puisque :

$$\lim_{n \to +\infty} (q_n u) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell_\infty.$$

La fonction $u \mapsto \ell_\infty e^{-u}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Comme dans l'exercice 8 de la page 682, on réalise l'hypothèse de domination à l'aide de la fonction $u \mapsto M e^{-u}$, intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} H(q_n) = \int_0^{+\infty} \ell_\infty e^{-u} \mathrm{d}u = \big[-\ell_\infty e^{-u}\big]_0^{+\infty} = \ell_\infty.$$

(b) Le résultat précédent a été établi pour toute suite de réels positifs $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit : $\lim\limits_{q \to +\infty} H(q) = \ell_\infty$.

2. Posons $K(0) = \ell_\infty$ et montrons, à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètre, que la fonction K, ainsi prolongée, est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Définissons la fonction $k : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$k(p,u) = \begin{cases} e^{-u} f\left(\dfrac{u}{p}\right) & \text{si} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad u > 0 \\ e^{-u} \ell_\infty & \text{si} \quad p = 0 \quad \text{et} \quad u > 0. \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall p \in [0,+\infty[\quad K(p) = \int_0^{+\infty} k(p,u)\,\mathrm{d}u.$$

- Pour tout $u > 0$, la fonction $p \mapsto k(p,u)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et elle est continue en 0 par composition de limite, puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell_\infty$.
- Pour tout $p \geqslant 0$, la fonction $u \mapsto k(p,u)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Comme dans l'exercice 8 de la page 682, on réalise l'hypothèse de domination à l'aide de la fonction $u \mapsto Me^{-u}$, intégrable sur $]0,+\infty[$ (on a bien sûr $|\ell_\infty| \leqslant M$, puisque $M = \sup\limits_{t\geqslant 0} |f(t)|$).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction K est continue sur $[0,+\infty[$. On a donc, en particulier, $\lim\limits_{p\to 0^+} H\left(\dfrac{1}{p}\right) = \ell_\infty$. Par composition de limites, on en déduit $\lim\limits_{q\to+\infty} H(q) = \ell_\infty$.

Exercice 9

1. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant, dans l'intégrale définissant $H\left(\frac{1}{p}\right)$, le changement de variable $u = pt$ (on applique le théorème du changement de variable pour une intégrale généralisée : la fonction $t \mapsto pt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$H\left(\frac{1}{p}\right) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Cela justifie la définition de $Lf(p)$ et la formule : $Lf(p) = \frac{1}{p} H\left(\frac{1}{p}\right)\cdot$

2. En utilisant l'exercice 7 de la page 682, on obtient, par composition de limites :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,Lf(p) = \lim_{q\to 0} H(q) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell_0.$$

3. En utilisant l'exercice 8 de la page 682, on obtient, par composition de limites :

$$\lim_{p\to 0^+} p\,Lf(p) = \lim_{q\to+\infty} H(q) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell_\infty.$$

Théorème 4 Fixons $x_0 \in J$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre à $f_1 : J \times I \to \mathbb{K}$ définie par $f_1(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f_1(x,t)$ est continue en tout $x \in J \setminus \{x_0\}$, d'après la première hypothèse, et en x_0, par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$

- Fixons un segment $[a,b] \subset J$. Soit $c = \min(a, x_0)$ et $d = \max(b, x_0)$; le segment $[c,d]$ est tel que :
$$x_0 \in J \quad \text{et} \quad [a,b] \subset [c,d] \subset J.$$
D'après l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, il existe une fonction $\varphi\ : I \mapsto \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :
$$\forall (x,t) \in [c,d] \times I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$
La classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto f(x,t)$ permet de lui appliquer l'inégalité des accroissements finis ; on en déduit, d'après l'hypothèse de domination :
$$\forall (x,t) \in [c,d] \times I \quad \left|f_1(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$
et donc, *a fortiori* :
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left|f_1(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$
D'après les hypothèses, la fonction $t \mapsto f_1(x,t)$ est continue par morceaux sur I, pour tout $x \in [c,d]$.
L'inégalité précédente fournit l'hypothèse de domination sur le segment $[a,b]$, et cela pour tout segment $[a,b] \subset J$. On peut ainsi conclure que $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_I f_1(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J ; on a donc, en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g_1(x) = g_1(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Comme, pour $x \neq x_0$, $g_1(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$, on a établi que g est dérivable en x_0 avec $g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Le résultat précédent étant vrai pour tout $x_0 \in J$, g est dérivable sur J.
Une nouvelle application du théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de prouver que g' est continue sur J : les première, troisième et quatrième hypothèses fournissent les hypothèses concernant $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour ce théorème, d'où la conclusion.

Exercice 10

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction h_1 étant nulle, le domaine de définition de g contient 1.
Effectuons un développement de h_x au voisinage de 0 :
$$h_x(t) = \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} = \frac{1-t-1+xt+\mathrm{o}(t)}{t} = x-1+\mathrm{o}(1).$$
On en déduit $\displaystyle\lim_{t\to 0} h_x(t) = x-1$; ayant un prolongement continu en 0, la fonction h_x est intégrable sur $]0,1]$
Quand $t \to +\infty$, on a :
$$h_x(t) \sim \frac{e^{-t}}{t} \quad \text{si} \quad x > 1$$
$$h_x(t) \sim -\frac{e^{-xt}}{t} \quad \text{si} \quad x < 1.$$

- Pour $x \leqslant 0$, la fonction h_x est négative et $\frac{1}{t} = \mathrm{O}\big(h_x(t)\big)$ au vu de l'équivalent obtenu ; par comparaison aux intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x$ est donc divergente.
- Pour $x > 0$, l'équivalent obtenu montre que $\big|h_x(t)\big| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées ; cela prouve l'intégrabilité de h_x sur $[1, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, pour établir la classe $\mathcal{C}^1$ de g.

Notons $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la première question.
- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}.$$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

  La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

On déduit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$$

Comme $g(1) = 0$, on déduit de ce qui précède que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \ln x.$$

Corollaire 5 Démontrons ce résultat par récurrence sur k.

- Pour $k = 1$, il s'agit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.
- Supposons le résultat vrai au rang $k-1$ avec $k \geqslant 2$ et prouvons-le au rang k.

  Fixons un segment $[a,b] \subset J$ et donnons-nous une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

La classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ permet de lui appliquer, pour tout $x \in [a,b]$, l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[a,x]$; on obtient :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| \leqslant (x-a)\,\varphi(t) \leqslant (b-a)\,\varphi(t).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| + (b-a)\,\varphi(t) = \psi(t).$$

La fonction ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur I, d'après les deuxième et quatrième hypothèses.

L'hypothèse de domination sur tout segment étant vérifiée pour $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J et que :

$$\forall p \in [\![1, k-1]\!] \quad \forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier $g^{(k-1)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à cette intégrale :

* pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
* pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est intégrable sur I,
* pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k} f}{\partial x^{k}}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
* on a l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^{k} f}{\partial x^{k}}$.

Par suite $g^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$; g est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a :

$$\forall p \in [\![1, k]\!] \quad \forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où la conclusion.

Exercice 11 On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)\,e^{-t^2} e^{-itx}\mathrm{d}t.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et intégrons par parties, en utilisant le théorème 55 de la page 418 (ici les trois termes existent de manière évidente) :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-2te^{-t^2}\right) e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{i}{2} e^{-t^2} e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2}\, g(x). \end{aligned}$$

On a établi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\frac{x}{2}\, g(x).$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$x \mapsto C \exp\left(-\int_0^x \frac{t}{2}\, dt\right) = C e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{C}.$$

D'après l'exemple de la page 685, on a $g(0) = \sqrt{\pi}$; on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 12 Notons $f : \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}. \end{array}$

Appliquons le corollaire 5 de la page 688. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times [0,+\infty[\quad \forall p \in [\![0,k]\!] \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p\, \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}.$$

- Soit $x > 0$ et $p \in [\![0,k-1]\!]$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, car continue, et, quand $t \to +\infty$:

$$t^2 \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = \frac{t^{p+2} e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \sim t^{p+\frac{3}{2}} e^{-xt}.$$

  Par croissances comparées, on en déduit $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

  La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, car continue.
- Fixons deux réels a et b tels que $0 < a < b$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{t^k e^{-at}}{\sqrt{t+1}}.$$

  Comme $t^2 \varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{k+\frac{3}{2}} e^{-at}$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$, par croissances comparées, c'est-à-dire $\varphi(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$. La fonction φ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

On peut conclure, d'après le corollaire 5 de la page 688, que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $]0,+\infty[$.

S'entraîner et approfondir

12.1 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln\big(\cos(x^n)\big)\,\mathrm{d}x$.

12.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier la définition de I_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

12.3 Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la définition de I_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   On fournira le résultat sous la forme d'une intégrale faisant intervenir f.

12.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)\,e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier la définition de I_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

12.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir l'inégalité suivante :
$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin u| \leqslant |u|.$$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. À l'aide du changement de variable $t = u^{\frac{1}{n}}$, déterminer une intégrale J, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que $I_n \sim \frac{J}{n}$.

12.6 1. Établir l'inégalité suivante :
$$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\,\mathrm{d}t$.

12.7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Établir l'inégalité suivante : $\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin u| \leqslant |u|$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et un équivalent simple de I_n.

⋆ **12.8** Démontrer le théorème de convergence dominée de la page 674 en supposant en outre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I.

12.9 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner un développement en série de f.

12.10 Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir par deux méthodes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

1. En appliquant le théorème d'intégration terme à terme.
   On pourra utiliser, après l'avoir établie, l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée.

On pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}}$, valable pour tout $t > 0$.

12.11 Soit p et q deux réels strictement positifs. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}.$$

12.12 Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ.
2. Démonter que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que :

$$\forall x > 1 \quad \Gamma(x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

12.13 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de F sur $]0,2[$ et l'égalité :

$$\forall x \in]0,2[\quad F(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que F est continue sur $]0,2[$.

12.14 Les réels $a > 0$ et b étant fixés, on pose :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-at}}{t} \cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la définition de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer g', puis g.

12.15 Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$.

12.16 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g'.
3. Déterminer la limite de la suite $\big(g(n)\big)_{n \geqslant 2}$.
4. En déduire g.

12.17 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de g.
2. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et la calculer.
3. (a) Pour quels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
   (b) Lorsqu'elle converge, la calculer. On se ramènera à g par un changement de variable du type $u \mapsto u^\gamma$.

12.18 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une équation différentielle d'ordre 1 dont g est solution.
3. (a) Calculer $g(0)$, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$
   (b) Exprimer g à l'aide de fonctions usuelles.

12.19 Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Monter que la fonction g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par g.
3. En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tx)\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

⋆ **12.20** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Transformer $g(x)$, pour $x > 0$, à l'aide du changement de variable $t = u - x$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de la même équation différentielle que f.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$. Conclure que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+$.

   En déduire en particulier la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

12.21 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.

1. Soit g la fonction définie sur $J \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in J \setminus \{0\} \quad g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{\operatorname{sh} x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Montrer plus généralement que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h, définie par :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad h(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right),$$

   se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.

12.22 Théorème de Fubini

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ une application continue. En utilisant les applications H et G définies sur $[a,b]$ par :

$$H(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y,$$

établir :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Solution des exercices

12.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto \ln\big(\cos(x^n)\big)$ et appliquons à la suite de fonctions (f_n) le théorème de convergence dominée sur $[0,1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in [0,1] \quad x^n \in [0,1] \subset \big[0, \pi/2\big]\cdot$$

Par décroissance de la fonction cos sur $\big[0,\pi/2\big]$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1] \quad \cos(x^n) \in [\cos 1, 1] \subset]0,1].$$

Chaque fonction f_n est donc continue, comme composée de fonctions continues.

- Pour $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$; on en déduit donc, par composition de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(1) = \ln(\cos 1)$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \ln(\cos 1) & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

  Cette fonction f est en escalier, donc continue par morceaux.
- On a établi à la première question :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \cos 1 \leqslant \cos(x^n) \leqslant 1.$$

  On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \ln(\cos 1) \leqslant f_n(x) \leqslant 0,$$

  et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant -\ln(\cos 1).$$

  La fonction constante égale à $-\ln(\cos 1)$ est intégrable sur $[0,1[$, car cet intervalle est borné. On a donc établi l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\big(\cos(x^n)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f = 0.$$

12.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto e^{-x}(\cos x)^{2n}$.

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \big|f_n(x)\big| = f_n(x) \leqslant e^{-x}.$$

   Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison. On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} f_n$, c'est-à-dire l'existence de I_n.

2. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \pi\mathbb{N}$, on a $|\cos x| < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

     Pour $x \in \pi\mathbb{N}$, on a $|\cos x| = 1$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = e^{-x}$.
     La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :
     $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \setminus \pi\mathbb{N} \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \in \pi\mathbb{N}. \end{cases}$$
     La restriction de la fonction f à tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$ est en escalier, donc continue par morceaux. Par suite, la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a :
     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \big|f_n(x)\big| = f_n(x) \leqslant e^{-x}.$$
     Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

   Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f.$$
   Pour tout $A > 0$, la fonction f est nulle sur $[0, A]$, sauf peut-être en un nombre fini de points. On en déduit $\displaystyle\int_0^A f = 0$, et cela pour tout $A > 0$. D'où :
   $$\int_0^{+\infty} f = 0 \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x = 0.$$

12.3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : t \mapsto \left(\cos \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2n} f(t)$.

1. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant \big|f(t)\big|.$$
   Comme la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$, par comparaison. On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$, c'est-à-dire l'existence de I_n.
2. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
   - Fixons $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{n}} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
     $$\forall n \geqslant n_0 \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{t}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \cos\frac{t}{\sqrt{n}} > 0.$$
     Cela justifie l'existence, pour $n \geqslant n_0$, de :
     $$\ln\left(\left(\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2n}\right) = 2n\ln\left(\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n\ln\left(\cos^2\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{n}} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^2 \frac{t}{\sqrt{n}} = 1$ et l'on peut écrire :

$$n \ln\left(\cos^2 \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \sim n\left(\cos^2 \frac{t}{\sqrt{n}} - 1\right) = -n \sin^2 \frac{t}{\sqrt{n}} \sim -n\,\frac{t^2}{n},$$

en utilisant l'équivalent $\sin u \sim u$, au voisinage de 0.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(\cos^2 \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -t^2$, puis, en composant avec l'exponentielle $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = e^{-t^2}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F : t \mapsto e^{-t^2} f(t)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue par morceaux.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \left|f(t)\right|.$$

Comme la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

12.4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \mapsto \operatorname{Arctan}(nx)\, e^{-x^n}$.

1. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 1 \quad x^n \geqslant x \quad \text{donc} \quad \left|f_n(x)\right| = f_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\, e^{-x}.$$

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$, donc l'existence de I_n.

2. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- ∗ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$.
  ∗ Pour $x \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(nx) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.
  On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}\cdot$
  ∗ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{\pi}{2e}\cdot$
  ∗ Pour $x > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(nx) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$.
  On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \quad x \in]0,1[\\ \frac{\pi}{2e} & \text{si } \quad x = 1 \end{cases}$$

La restriction de la fonction f à tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$ est en escalier, donc continue par morceaux. Par suite, la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \operatorname{Arctan}(nx) \leqslant \frac{\pi}{2}$ et :

$$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leqslant e^{-x^n} \leqslant 1 \qquad \forall x > 1 \quad 0 \leqslant e^{-x^n} \leqslant e^{-x}.$$

Par suite, en notant $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{\pi}{2}\, e^{-x} & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(x)\right| = f_n(x) \leqslant \varphi(x).$$

Cette fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc établi l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)\, e^{-x^n}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 f = \frac{\pi}{2}\cdot$$

12.5 1. Soit $u \in \mathbb{R}^*$; notons $[0,u]$ le segment d'extrémités 0 et u. La fonction sin étant dérivable sur ce segment et sa dérivée (la fonction cos) étant bornée en valeur absolue par 1, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que cette fonction sin est 1-lipschitzienne.

On en déduit $|\sin u| \leqslant |u|$; d'où la conclusion, le résultat étant évident pour $u = 0$.

2. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, mais ici une méthode directe est plus simple. On déduit de l'inégalité établie à la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u \mapsto u^{\frac{1}{n}}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur lui-même ; en utilisant le théorème du changement de variable, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}$; chaque f_n est continue sur $]0,1]$. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $]0,1]$.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction continue f définie par : $\forall u \in]0,1] \quad f(u) = \frac{\sin(u)}{u}$.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in]0,1] \quad \left|f_n(u)\right| = f_n(u) \leqslant \frac{\sin u}{u} \leqslant 1,$$

en utilisant l'inégalité établie à la première question.
La fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$. L'hypothèse de domination est donc établie.

On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$ et, comme la fonction f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 f > 0$. On peut donc écrire :

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

12.6 1. L'inégalité demandé peut s'obtenir par étude de la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$, mais on peut aussi raisonner comme suit.

Pour tout $u > -1$, on a $\ln(1+u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\cdot$

- Pour $u \geqslant 0$, on en déduit :

$$\ln(1+u) \leqslant \int_0^u \mathrm{d}t = u.$$

- Pour $u \in]-1,0]$, en utilisant l'inégalité :

$$\forall t \in]-1,u] \quad \frac{1}{1+t} \geqslant 1,$$

on obtient :

$$\ln(1+u) = \int_u^0 \frac{-1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_u^0 -\mathrm{d}t = u.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{1}_{[0,n]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'on considère $f_n : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\, \mathbb{1}_{[0,n]}(t). \end{array}$

La fonction f_n est continue sur $[0,n]$ et nulle sur $]n,+\infty[$, donc continue par morceaux (et même continue, car continue en n).

Comme $x \mapsto \int_0^x |f_n|$ est constante sur $]n,+\infty[$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On a $\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n f_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\,\mathrm{d}t$.

Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour $n > t$, qui équivaut à $1-\frac{t}{n} > 0$, on a $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t$. Effectuons un développement limité :

$$f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\cos t = e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\cos t = e^{-t+o(1)}\cos t.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\cos t$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f : t \mapsto e^{-t}\cos t$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a, si $n > t$:

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -t,$$

en utilisant l'inégalité établie à la première question. La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(t)\right| = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\left|\cos t\right| \leqslant e^{-t}\left|\cos t\right| \leqslant e^{-t}.$$

Comme, pour $n \leqslant t$, on a $f_n(t) = 0$, on peut écrire :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant e^{-t}.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que la fonction $t \mapsto e^{-t}\cos t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-t}e^{it}\right)\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}e^{it}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque $\left|e^{-t}e^{it}\right| = e^{-t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-t}e^{it}\right)\mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-t}e^{it}}{-1+i}\right]_0^{+\infty}\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\end{aligned}$$

En conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$

12.7 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par $f_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- On a $f_n(t) \sim \frac{t/n}{t}$, au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 1/n$.

  La fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.
- On a, pour tout $t > 0$:

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{t\left(1+t^2\right)}.$$

Comme on a $\frac{1}{t(1+t^2)} \sim \frac{1}{t^3}$, au voisinage de $+\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. Cette inégalité a été établie dans l'exercice 12.5 de la page 702.
3. Posons $g_n = nf_n$ et appliquons à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$. Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   - On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n \sin\left(\frac{t}{n}\right)\big) = t$, pour tout $t > 0$.

     On en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vers la fonction g continue par morceaux, car continue, définie par $g(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot$
   - En utilisant la question précédente, on obtient :

     $$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \big|g_n(t)\big| \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

     La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, au voisinage de $+\infty$; cette fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann. L'hypothèse de domination est ainsi établie.

   On peut donc conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

   $$\lim_{n\to+\infty} (nI_n) = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \big[\operatorname{Arctan} t\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

   On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $I_n \sim \dfrac{\pi}{2n}\cdot$

12.8 • L'intégrabilité de chaque f_n se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.

Par convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, on a également $|f| \leqslant \varphi$; on en déduit l'intégrabilité de f, par comparaison.

• Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\alpha < \beta$ les bornes de I ; comme φ est intégrable sur I, il existe deux réels $a < b$ dans $]\alpha, \beta[$ tels que :

$$\int_\alpha^a \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{et} \quad \int_b^\beta \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{5}\cdot$$

En notant $\mathcal{N}_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{CM}\big([a,b], \mathbb{K}\big)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right| = \left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f_n - f|$$
$$\leqslant (b-a)\mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = 0$; il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{5(b-a)}\cdot$$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \left| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left| \int_I f_n - \int_I f \right| = \left| \int_\alpha^a f_n + \int_a^b f_n + \int_b^\beta f_n - \int_\alpha^a f - \int_a^b f - \int_b^\beta f \right|$$

(relation de Chasles)

$$\leqslant \left| \int_\alpha^a f_n \right| + \left| \int_b^\beta f_n \right| + \left| \int_\alpha^a f \right| + \left| \int_b^\beta f \right| + \left| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f \right|$$

(inégalité triangulaire)

$$\leqslant \int_\alpha^a |f_n| + \int_\alpha^a |f| + \int_b^\beta |f_n| + \int_b^\beta |f| + \left| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f \right|$$

$$\leqslant 2 \int_\alpha^a \varphi + 2 \int_b^\beta \varphi + \left| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f \right|$$

$$\leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi établi que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Remarque Dans le raisonnement précédent, comme les fonctions f_n et la fonction f ne sont pas supposées continues, mais seulement continues par morceaux, on n'a pas pu utiliser le théorème 8 de la page 518 pour établir :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f.$$

12.9 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto t^x \ln(t) \ln(1-t)$ est continue sur $]0,1[$.
Quand $t \to 1$, on a $g_x(t) \sim (t-1)\ln(1-t)$; on en déduit, par croissances comparées, $\lim\limits_1 g_x = 0$, donc l'intégrabilité de g_x sur $[\frac{1}{2}, 1[$, et par suite la convergence de $\int_{\frac{1}{2}}^1 g_x$.

Quand $t \to 0$, on a $g_x(t) \sim -t^{x+1} \ln(t)$.

- Pour $x > -2$, choisissons $y \in]-1, x+1[$. On peut écrire, pour tout $t > 0$:

$$g_x(t) = -t^y \left(t^{x+1-y} \ln t\right) \quad \text{avec} \quad x + 1 - y > 0.$$

On a, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to 0} \left(t^{x+1-y} \ln t\right) = 0$, donc $g_x(t) = \mathrm{o}(t^y)$, quand $t \to 0$. Comme $y > -1$, la fonction g_x est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et donc $\int_0^{\frac{1}{2}} g_x$ converge.

- Pour $x \leqslant -2$, comme on a, quand $t \to 0$:
$$t^{x+1} = \mathrm{o}\big(g_x\,(t)\big) \quad \text{avec} \quad x+1 \leqslant -1,$$
et que la fonction g_x est positive sur $]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} g_x$ diverge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, le domaine de définition de f est $]-2,+\infty[$.

2. Fixons $x > -2$. Comme, pour tout $t \in\,]-1,1[$, on a $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, on peut écrire :
$$\forall t \in\,]0,1[\quad g_x\,(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,(t) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n\,(t) = -\frac{t^{x+n}\ln t}{n}\cdot$$
Appliquons à la série $\sum u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,1[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est continue sur $]0,1[$ et, comme $\lim\limits_{1} u_n = 0$, elle est intégrable sur $[\frac{1}{2},0[$.
Comme $x+n > -1$, on peut choisir $y \in\,]-1,x+n[$. Comme dans la première question, on établit que $u_n\,(t) = \mathrm{o}\,(t^y)$, quand $t \to 0$; on en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que u_n est intégrable sur $]0\frac{1}{2}]$.
Par suite, chaque u_n est intégrable sur $]0,1]$.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme (la fonction g_x) est continue sur $]0,1]$.
- Comme chaque u_n est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n| = u_n$. Effectuons une intégration par parties :
$$\int_0^1 u_n = -\int_0^1 \frac{t^{n+x}\ln t}{n}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^{n+x+1}\ln t}{n\,(n+x+1)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{n\,(n+x+1)}\,\mathrm{d}t.$$
Cette intégration par parties est justifiée car :
  - $*$ les fonctions $t \mapsto \frac{t^{n+x+1}}{n(n+x+1)}$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$;
  - $*$ on a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^{n+x+1}\ln t}{n(n+x+1)} = 0$, par croissances comparées, car $n+x+1 > 0$, et $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t^{n+x+1}\ln t}{n(n+x+1)} = 0$, ce qui prouve que le crochet existe et est nul.

On a donc établi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^1 |u_n| = \int_0^1 u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{n\,(n+x+1)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{t^{n+x+1}}{n\,(n+x+1)^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n\,(n+x+1)^2}\cdot$$

Comme $\frac{1}{n(n+x+1)^2} \sim \frac{1}{n^3}$, la série $\sum \displaystyle\int_0^1 |u_n|$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

D'après le théorème précité, on a $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n \right)$ et donc :

$$\forall x > -2 \quad \int_0^1 t^x \ln(t) \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+x+1)^2}.$$

12.10 1. • L'inégalité proposée a été établie dans l'exercice 12.5 de la page 702.

• Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} = \frac{2\sin(xt)}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1 - e^{-2t}}.$$

La série géométrique $\sum 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}$, de raison $e^{-2t} \in]0,1[$, converge et l'on peut écrire :

$$\frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1 - e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}.$$

Appliquons à la série $\sum u_n$, avec $u_n(t) = 2\sin(xt)\,e^{-(2n+1)t}$, le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.

∗ Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on en déduit que chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison.

∗ La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$, continue sur $]0,+\infty[$.

∗ En utilisant l'inégalité établie plus haut, on obtient :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{+\infty} 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2\,|x|}{2n+1}\Big[-te^{-(2n+1)t}\Big]_0^{+\infty} + \frac{2\,|x|}{2n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t.$$

Cette intégration par parties est justifiée, car :

⋆ la fonction $t \mapsto 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $2\,|x|\,te^{-(2n+1)t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, par croissances comparées ;

⋆ le crochet existe, puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(t\,e^{-(2n+1)t}\right) = 0$, par croissances comparées.

On obtient :

$$\int_0^{+\infty} 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2\,|x|}{2n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\,|x|}{2n+1}\left[-\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{2\,|x|}{(2n+1)^2}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2\,|x|}{(2n+1)^2}.$$

Comme $\frac{2|x|}{(2n+1)^2} \sim \frac{|x|}{2n^2}$, la série $\sum \frac{2|x|}{(2n+1)^2}$ converge, par comparaison aux séries de Riemann, donc aussi la série $\sum\left(\int_0^{+\infty}|u_n|\right)$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ce que l'on peut facilement vérifier directement) et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

* Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

  Notons que $u_n(t) = \operatorname{Im}\left(2e^{(ix-2n-1)t}\right)$.

  Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|2e^{(ix-2n-1)t}\right| = 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}$, donc la fonction $t \mapsto 2e^{(ix-2n-1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left[\frac{2e^{(ix-2n-1)t}}{ix-2n-1}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2n+1-ix}\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{2(2n+1+ix)}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}.$$

En conclusion, nous avons établi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et appliquons à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le théorème de convergence dominée. Comme les autres hypothèses ont été établies dans la première méthode, vérifions seulement l'hypothèse de domination.

Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|S_n(t)\right| = \left|2e^{-t}\sin(xt)\ \frac{1-e^{-(2n+2)t}}{1-e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{2e^{-t}\,|xt|}{1-e^{-2t}} = \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t},$$

en utilisant l'inégalité fournie : $\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin u| \leqslant |u|$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc intégrable sur $]0,1]$. De plus, quand $t \to +\infty$, on a :

$$\frac{|xt|}{\operatorname{sh} t} = \frac{2\,|xt|\,e^{-t}}{1-e^{-2t}} \sim 2\,|xt|\,e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées.

Cela prouve l'intégrabilité de la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et fournit l'hypothèse de domination.

On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k. \qquad (*)$$

Comme chaque u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} u_k.$$

On déduit alors de $(*)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k.$$

12.11 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ est continue sur $]0,1]$ et $f(x) \sim x^{p-1}$ au voisinage de 0 avec $p-1 > -1$. Donc f est intégrable sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Pour $x \in]0,1[$, on a $x^q \in]0,1[$, donc la série géométrique $\sum (-1)^n x^{nq}$ converge et l'on a :

$$f(x) = x^{p-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{nq} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{avec} \quad u_n(x) = (-1)^n x^{nq+p-1}.$$

Appliquons à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ le théorème de convergence dominée sur $]0,1[$. Notons que chaque S_n est continue sur $]0,1[$, comme somme finie de fonctions continues.

- La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction continue f.

- En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left]0,1\right[\quad \left|S_n(x)\right| = x^{p-1}\left|\sum_{k=0}^{n}(-x^q)^k\right|$$
$$= x^{p-1}\left|\frac{1-(-x^q)^{n+1}}{1+x^q}\right|$$
$$\leqslant x^{p-1}\frac{1+x^{q(n+1)}}{1+x^q}$$
$$\leqslant \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} = 2f(x),$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque f est intégrable sur $\left]0,1\right[$.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\displaystyle\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n$.

Notons que chaque u_n est intégrable sur $\left]0,1\right[$, puisque $\displaystyle\int_0^1 |u_n|$ est une intégrale de Riemann convergente (car $nq+p-1>-1$). On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 S_n = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k x^{kq+p-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{kq+p}\cdot$$

Le résultat annoncé est donc établi, en faisant tendre n vers $+\infty$.

Remarque On a $\displaystyle\int_{]0,1]}|u_n| = \frac{1}{n\,q+p} \sim \frac{1}{nq}$; donc la série de terme général $\displaystyle\int_{]0,1]}|u_n|$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas à la série de fonctions $\sum u_n$.

12.12 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La fonction g_x est positive et l'on a $g_x(t) \sim t^{x-1}$, quand $t \to 0$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_0^1 g_x$ converge si, et seulement si, $x>0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par croissances comparées, $g_x(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, ce qui assure l'intégrabilité de g_x sur $\left[1,+\infty\right[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrons que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en appliquant le corollaire 5 de la page 688. On note $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p\, t^{x-1}e^{-t}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ car continue, sur cet intervalle. On a, quand $t \to 0$:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p \, t^{x-1} e^{-t} \sim |\ln t|^p \, t^{x-1} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

par croissances comparées.

Cela assure l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a, quand $t \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |\ln t|^p \, t^{x-1} e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées. Par comparaison aux intégrales de Riemann, cela assure l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$.

Donc la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [\![0,k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après ce qui précède.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux d'après ce qui précède.
- Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,1] \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k \, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k \, t^{a-1} e^{-t}$$

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]1,+\infty[\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k \, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k \, t^{b-1} e^{-t}.$$

  Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = |\ln t|^k \, t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^k \, t^{b-1} e^{-t} = \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)\right|.$$

  Cette fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après l'étude préliminaire et l'on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

  Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ pour la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 5 de la page 688, on peut conclure que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \, t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

3. Fixons $x > 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$; on peut écrire :

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}}\cdot$$

La série géométrique $\sum t^{x-1}e^{-nt}$, de raison $e^{-t} \in]0,1[$, converge et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}}\cdot$$

Définissons $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_n(t) = t^{x-1}e^{-nt}$ et appliquons à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall t > 0 \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$

  La fonction u_n est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison, en reprenant l'étude de la fonction Γ.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est continue sur $]0,+\infty[$, car égale à $t \mapsto \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; comme u_n est positive, on a :

$$\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

  L'application $\theta : u \mapsto u/n$ étant une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même, on peut écrire, d'après le théorème du changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \big(\theta(u)\big)^{x-1} e^{-n\theta(u)}\theta'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{n^x}\cdot\end{aligned}$$

  La série $\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ converge, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge pour $x > 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, on peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\cdot$$

12.13 1. Soit $x \in]0,2[$. Effectuons une intégration par parties, avec les fonctions $f : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ et $g : t \mapsto 1 - \cos t$ sur $]0,+\infty[$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

- la fonction g est bornée, donc $\lim\limits_{+\infty} fg = 0$, car $x > 0$;
- quand $t \to 0$, on a $g(t) \sim \frac{t^2}{2}$, donc $\lim\limits_{0} fg = 0$, car $x < 2$.

Ces deux points prouvent que le crochet $[fg]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

Prouvons la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$.

- Quand $t \to 0$, on a :

$$\left|f'(t)\,g(t)\right| = \left|-x\,\frac{1-\cos t}{t^{x+1}}\right| \sim \frac{x}{2t^{x-1}}\cdot$$

Comme $x - 1 < 1$, la fonction $f'g$ est intégrable sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'g$ est donc convergente.

- On a :

$$\forall t > 0 \quad \left|f'(t)\,g(t)\right| = x\,\frac{1-\cos t}{t^{x+1}} \leqslant \frac{2x}{t^{x+1}}\cdot$$

Comme $x+1 > 1$, la fonction $f'g$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'g$ est donc convergente.

On a ainsi établi la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$.

On déduit alors du théorème d'intégration par parties la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg'$ et l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg' = [fg]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'g$. On a donc établi :

$$\forall x \in]0,2[\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrons que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,2[$, à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Notons $h : \begin{array}{ccc}]0,2[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1-\cos t}{t^{x+1}}. \end{array}$

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0,1[$.
- Pour tout $x \in]0,2[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est positive. La première question montre donc qu'elle est intégrable et, en particulier, continue par morceaux.
- Fixons a et b tels que $0 < a < b < 2$. On a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\forall t \in]0,1] \quad \left|h(x,t)\right| \leqslant h(b,t) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [1,+\infty[\quad \left|h(x,t)\right| \leqslant h(a,t).$$

La fonction $\varphi : t \mapsto h(a,t) + h(b,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après ce qui précède et vérifie :

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty \quad \left|h(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

La fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ est donc continue sur $]0,2[$,d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre. On en déduit la continuité de F sur $]0,2[$, comme produit de deux fonctions continues.

12.14 1. Soit $x>0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t}\cos(bt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Quand $t \to 0$, on a :

$$\frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t} = \frac{1-xt-1+at+\mathrm{o}(t)}{t} = a-x+\mathrm{o}(1).$$

  Comme $\lim\limits_{t\to 0}\cos(bt)=1$, on en déduit $\lim\limits_{0} h_x = a-x$.
  Par suite, la fonction h_x est intégrable sur $]0,1]$.
- Par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall t \geqslant 1 \quad \big|h_x(t)\big| \leqslant \frac{e^{-xt}+e^{-at}}{t} \leqslant e^{-xt}+e^{-at}.$$

  Par comparaison, la fonction h_x est intégrable sur $[1,+\infty[$, puisque les fonctions $t\mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-at}$ le sont ($x>0$ et $a>0$).

La fonction h_x étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_x$ converge. Ce résultat étant établi pour tout $x>0$, la définition de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est justifiée.

2. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, pour justifier la classe $\mathcal{C}^1$ de g. Notons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-xt}-e^{-at}}{t}\cos(bt). \end{array}$

- Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la première question.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\cos(bt).$$

- Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[\alpha,\beta]$, avec $0<\alpha<\beta$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t)\in[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\big|\cos(bt)\big| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t)=e^{-\alpha t}.$$

  La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle est intégrable, car $\alpha>0$.
  L'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc établie.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$

Fixons $x>0$. Notons que $e^{-xt}\cos(bt)=\operatorname{Re}\left(e^{(ib-x)t}\right)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$, et que la fonction $t\mapsto |e^{(ib-x)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car :

$$\forall t>0\quad \left|e^{(ib-x)t}\right|=e^{-xt}\quad\text{avec}\quad x>0.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\int_0^{+\infty}\operatorname{Re}\left(e^{(ib-x)t}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(ib-x)t}\mathrm{d}t\right)\\ &= -\operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(ib-x)t}}{ib-x}\right]_0^{+\infty}\right).\end{aligned}$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\left|e^{(ib-x)t}\right|=e^{-xt}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{(ib-x)t}=0$. Par suite :

$$\forall x>0\quad g'(x)=-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x-ib}\right)=-\operatorname{Re}\left(\frac{x+ib}{x^2+b^2}\right)=-\frac{x}{x^2+b^2}\cdot$$

Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(a)=0$, on a :

$$\forall x>0\quad g(x)=\int_a^x g'(u)\,\mathrm{d}u=-\left[\frac{1}{2}\ln\left(u^2+b^2\right)\right]_a^x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a^2+b^2}{x^2+b^2}\right)\cdot$$

12.15 1. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $h_x : t\mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et :

- quand $t\to 0$, on a :

$$\sin(xt)\sim xt\quad\text{et}\quad e^t-1\sim t\quad\text{donc}\quad \lim_0 h_x=x,$$

  ce qui assure un prolongement continu de h_x sur $[0,1]$, donc l'intégrabilité de h_x sur $]0,1]$;
- quand $t\to+\infty$, on a :

$$\left|h_x(t)\right|\leqslant\frac{1}{e^t-1}\sim e^{-t},$$

  ce qui assure, par comparaison, l'intégrabilité de h_x sur $[1,+\infty[$, puisque la fonction $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle.

Par suite h_x est intégrable sur $]0,+\infty[$, et cela pour tout $x\in\mathbb{R}$. La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, en notant :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,t) & \longmapsto & \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\cdot\end{array}$$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la première question.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\cos(xt)}{e^t - 1}\cdot$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t\,|\cos(xt)|}{e^t - 1} \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{t}{e^t - 1}\cdot$$
La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
  * quand $t \to 0$, on a $e^t - 1 \sim t$, donc $\lim\limits_{0} \varphi = 1$, ce qui assure un prolongement continu de φ sur $[0,1]$, donc l'intégrabilité de φ sur $]0,1]$;
  * quand $t \to +\infty$, on a $t^2\varphi(t) \sim t^3 e^{-t}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$ par croissances comparées, c'est-à-dire $\varphi(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui assure l'intégrabilité de φ sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  La fonction φ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'hypothèse de domination (ici globale) pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ est établie.

En conclusion, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, et l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos(xt)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

12.16 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Comme $\lim\limits_{0} u_x = 1$, la fonction u_x est intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$, comme $\mathrm{sh}\,t \sim \dfrac{e^t}{2}$, on a $u_x(t) \sim v_x(t)$, avec $v_x(t) = \frac{e^{(1-x)t}}{2t}\cdot$

- Pour $x > 1$, on en déduit, $u_x(t) = \mathrm{o}\left(e^{(1-x)t}\right)$.
Comme $x > 1$, on a $1 - x < 0$. Donc la la fonction $t \mapsto e^{(1-x)t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$; il en est de même de u_x, par comparaison.
- Pour $x \leqslant 1$ et $t \geqslant 1$, on a $v_x(t) \geqslant \frac{1}{2t} \geqslant 0$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} v_x$ est donc divergente, par comparaison aux intégrales de Riemann. Comme $u_x \underset{+\infty}{\sim} v_x$ et que les fonctions sont positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u_x$ diverge.

Par suite, le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}\,\mathrm{d}t$ est $]1,+\infty[$.

2. Posons $f(x,t) = \frac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

   - Pour tout $x \in]1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, d'après l'étude initiale.
   - Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et l'on a :
   $$\forall (x,t) \in]1,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\operatorname{sh} t.$$
   - Pour tout $x \in]1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\operatorname{sh} t$ est continue par morceaux, car continue, sur $]0,+\infty[$.
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]1,+\infty[$. On a :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\operatorname{sh} t \leqslant e^{-at}\operatorname{sh} t.$$
   La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-at}\operatorname{sh} t$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et l'on a :
   $$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{(1-a)t}}{2}\,;$$
   comme $1-a<0$, cela prouve l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction φ, par comparaison. L'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc établie.

   On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ avec :
   $$\forall x \in]1,+\infty[\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t.$$
   On en déduit, pour tout $x>1$:
   $$\begin{aligned} g'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-x)t} - e^{-(1+x)t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{e^{(1-x)t}}{2(1-x)} + \frac{e^{-(1+x)t}}{2(1+x)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}. \end{aligned}$$

3. Pour déterminer la limite de cette suite, appliquons le théorème de convergence dominée sur $]0,+\infty[$ à la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geqslant 2}$, avec :
   $$\forall t>0 \quad f_n(t) = f(n,t).$$
   Avec cette notation, on a $g(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$, pour tout $n \geqslant 2$.

   - Pour tout $t>0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nt} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle, fonction bien sûr continue par morceaux.

- On a :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \forall t > 0 \quad \left|f_n(t)\right| = \frac{e^{-nt} \operatorname{sh} t}{t} \leqslant \frac{e^{-2t} \operatorname{sh} t}{t} = f_2(t),$$

ce qui établit l'hypothèse de domination, puisque la fonction f_2 est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'après la première question.

On déduit du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = 0$.

4. On déduit de la deuxième question l'existence d'un réel C tel que :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 0$, on a $C = \lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = 0$.

En conclusion, on a établi :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

12.17 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$.

Quand $t \to 1$, on a $t^x - 1 = e^{x \ln t} - 1 \sim x \ln t$, puisque $\lim\limits_{t \to 1} (x \ln t) = 0$. On en déduit $\lim\limits_1 h_x = x$; par suite, la fonction h_x est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$, donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 h_x$ converge.

Pour l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h_x$, distinguons deux cas.

- Pour $x \geqslant 0$, on a $\lim\limits_0 h_x = 0$; par suite, la fonction h_x est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h_x$ converge.
- Pour $x < 0$, on a $h_x(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t}$.

  Pour $x > -1$, comme $h_x(t) = \mathrm{o}(t^x)$, quand $t \to 0$, la fonction h_x est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h_x$ converge.

  Pour $x = -1$, une primitive sur $]0, 1[$ de $t \mapsto \frac{t^x}{\ln t} = \frac{1}{t \ln t}$ est $t \mapsto \ln|\ln t|$. Comme $\lim\limits_{t \to 0} \ln|\ln t| = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$ diverge, donc aussi $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h_x$, par comparaison de fonctions de signe constant.

  Pour $x < -1$, on a $\frac{1}{t \ln t} = \mathrm{o}\big(h_x(t)\big)$, quand $t \to 0$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h_x$ diverge, par comparaison de fonctions de signe constant.

En conclusion, le domaine de définition de g est $]-1, +\infty[$.

2. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Notons :
$$f:\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[\times]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \frac{t^x-1}{\ln t}.\end{array}$$
   - Pour tout $x\in]-1,+\infty[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$, d'après la première question.
   - Pour tout $t\in]0,1[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et l'on a :
   $$\forall (x,t)\in]-1,+\infty[\times]0,1[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\right)=t^x.$$
   - Pour tout $x\in]-1,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $]0,1[$.
   - Soit $[a,b]$, avec $-1<a<b$, un segment inclus dans $]-1,+\infty[$. On a :
   $$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,1[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=t^x\leqslant t^a.$$
   La fonction $t\mapsto t^a$ étant intégrable sur $]0,1[$, car $a>-1$, cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

   D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, avec :
   $$\forall x\in]-1,+\infty[\quad g'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^x\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}.$$
   Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g(0)=0$, on a :
   $$\forall x\in]-1,+\infty[\quad g(x)=\int_0^x g'(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\big[\ln(u+1)\big]_0^x=\ln(x+1).$$

3. (a) Notons $f_{\alpha,\beta}:t\mapsto\frac{t^\alpha-t^\beta}{\ln t}$.
   Pour $\alpha=\beta$, l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ converge et est nulle.
   Étudions le cas $\alpha>\beta$.
   - Quand $t\to1$, on a :
   $$f_{\alpha,\beta}(t)=t^\beta\,\frac{e^{(\alpha-\beta)\ln t}-1}{\ln t}\sim\frac{(\alpha-\beta)\ln t}{\ln t}.$$
   Donc $\lim\limits_1 f_{\alpha,\beta}=\alpha-\beta$, ce qui assure l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta}$ sur $[\frac12,1[$ et par suite la convergence de $\displaystyle\int_{\frac12}^1 f_{\alpha,\beta}$.
   - On a $f_{\alpha,\beta}(t)\sim-\frac{t^\beta}{\ln t}$, quand $t\to0$. Or, comme on l'a vu dans la première question, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{t^\beta}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta>-1$.
   Par comparaison de fonctions de signe constant, on en déduit que l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ converge si, et seulement si, $\beta>-1$.
   Pour $\beta>\alpha$, comme $f_{\alpha,\beta}=-f_{\beta,\alpha}$, on déduit de l'étude du cas précédent que l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ converge si, et seulement si, $\alpha>-1$.

En conclusion, l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ converge dans les cas suivants :

$$\alpha=\beta \qquad\qquad \alpha>\beta>-1 \qquad\qquad \beta>\alpha>-1.$$

(b) Calculons $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-\beta}-1}{\ln t}\,t^{\beta}\mathrm{d}t$, en supposant $\alpha>\beta>-1$.

La fonction $\varphi : u\mapsto u^{\frac{1}{\beta+1}}$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0,1[$ sur lui-même, on peut écrire, d'après le théorème du changement de variable :

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}}-1}{\frac{1}{\beta+1}\ln u}\,u^{\frac{\beta}{\beta+1}}\,\frac{1}{\beta+1}\,u^{\frac{1}{\beta+1}-1}\mathrm{d}u=\int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}}-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\alpha>\beta>-1$, on a $\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}>0>-1$. On déduit alors de la deuxième question :

$$I(\alpha,\beta)=g\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}\right)=\ln\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}+1\right)=\ln\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)\cdot$$

Pour $\beta>\alpha>-1$, comme $I(\alpha,\beta)=-I(\beta,\alpha)$, le calcul précédent fournit :

$$I(\alpha,\beta)=-\ln\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)=\ln\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)\cdot$$

Cette formule est bien sûr aussi valable, lorsque $\alpha=\beta$. Finalement, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $I(\alpha,\beta)$ converge, on a $I(\alpha,\beta)=\ln\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}\right)\cdot$

12.18 1. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Notons :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}. \end{array}$$

- Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+^*$, et :
  - ∗ quand $t\to 0$, on a $\left|f(x,t)\right|=\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sim\frac{1}{\sqrt{t}}$, ce qui assure l'intégrabilité de la fonction $t\mapsto f(x,t)$ sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann ;
  - ∗ quand $t\to+\infty$, on a $\left|f(x,t)\right|=\mathrm{o}\left(e^{-t}\right)$, ce qui assure l'intégrabilité de la fonction $t\mapsto f(x,t)$ sur $[1,+\infty[$, puisque la fonction $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle.

  Cela prouve l'intégrabilité de la fonction $t\mapsto f(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}\,e^{-t}e^{itx}.$$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t}.$$

La fonction $\varphi : t\sqrt{t}e^{-t}$ est continue sur IR_+^*, possède une limite finie en 0 et vérifie $\varphi(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, par croissances comparées. Cela prouve l'intégrabilité de φ sur IR_+^*.

On a donc établi l'hypothèse de domination (ici globale) pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur IR, avec :

$$\forall x \in \mathrm{IR} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\,e^{-t}e^{itx}\mathrm{d}t.$$

2. Soit $x \in \mathrm{IR}$. Une intégration par parties fournit :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\,e^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = \left[i\sqrt{t}\,\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{i}{2\sqrt{t}}\,\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégration par parties est justifiée, car :

- les fonctions $t \mapsto i\sqrt{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur IR_+^* ;
- la fonction $h : t \mapsto i\sqrt{t}\,\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}$ vérifie :

$$\forall t > 0 \quad \left|h(t)\right| = \frac{\sqrt{t}\,e^{-t}}{|ix-1|} \quad \text{donc} \quad \lim_0 h = 0,$$

et $\lim\limits_{+\infty} h = 0$, par croissances comparées. Cela prouve que le crochet existe et est nul.

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathrm{IR} \quad g'(x) = \frac{i}{2(1-ix)}\,g(x).$$

3. (a) La fonction $\theta : u \mapsto u^2$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de IR_+^* sur lui-même, on peut écrire, d'après le théorème du changement de variable :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

(b) On a vu que g est solution sur IR du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + \frac{i}{2(ix-1)}\,y & = & 0 \\ y(0) & = & \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

On en déduit (voir cours de première année) :

$$\forall x \in \mathrm{IR} \quad g(x) = \sqrt{\pi}\,\exp\left(\int_0^x \frac{i}{2(1-it)}\,\mathrm{d}t\right).$$

En écrivant les parties réelle et imaginaire de la fonction à intégrer, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= \sqrt{\pi}\,\exp\left(\int_0^x \frac{-t+i}{2\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}\Big[\ln\left(t^2+1\right)\Big]_0^x + \frac{i}{2}\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^x\right)\\ &= \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x\right)\\ &= \sqrt{\pi}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x}.\end{aligned}$$

12.19 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = e^{-t^2}\sin(2tx)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$ et au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left|e^{-t^2}\sin(2tx)\right| \leqslant e^{-t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

par croissances comparées ; cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. Posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t$ et montrons que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\sin(2tx)$.

- Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\cos(2tx).$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto 2te^{-t^2}$ est continue par morceaux, car continue, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $2te^{-t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, par croissances comparées.

Cela fournit l'hypothèse de domination (ici globale) pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Par suite, g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t.$$

3. Formons une équation différentielle linéaire du premier ordre dont g est solution. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t &= \Big[-e^{-t^2}\cos(2tx)\Big]_0^{+\infty} - 2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t\\ &= 1 - 2xg(x).\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est justifiée, car l'intégrale initiale converge et le crochet $\Big[-e^{-t^2}\cos(2tx)\Big]_0^{+\infty}$ existe (et vaut 1).

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 1 - 2xg(x).$$

4. Posons $h(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$. D'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = e^{-x^2}e^{x^2} - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = 1 - 2xh(x).$$

Comme $g(0) = h(0) = 0$, les fonctions g et h sont solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + 2xy &= 1 \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du premier ordre (voir cours de première année), on en déduit que les fonctions g et h sont égales. On a donc établi que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

12.20 1. (a) Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$; elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}\cdot$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) Notons $\varphi : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le corollaire 5 de la page 688, pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\cdot$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [\![0,1]\!]$.

  La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

  Comme $\frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2} \sim (-1)^p\, t^{p-2} e^{-xt} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall\,(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

  La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$; d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) + f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}\cdot\end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

2. - Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car, au voisinage de 0, on a $\sin t \sim t$.

   Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

   Fixons $x \geqslant 0$ et justifions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$, à l'aide d'une intégration par parties :

   * Le crochet $\left[-\dfrac{\cos t}{t+x}\right]_{t=1}^{t=+\infty}$ existe et vaut $\frac{\cos 1}{1+x}\cdot$
   * On a, pour tout $t \geqslant 1$: $\left|\dfrac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}\cdot$

     On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos 1}{1+x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc établi la convergence, pour tout $x \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x, +\infty[\to]0, +\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$, est une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème du changement de variable, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin\big(\psi(u)\big)}{x+\psi(u)}\,\psi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos u}{u}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit de l'exercice 11 de la page 399 que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &\quad - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{\sin x \cos x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &\quad + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= -g(x) + \frac{1}{x}\cdot \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$$

3. • Fixons $x \geqslant 0$ et effectuons une intégration par parties.
   De $\left|\frac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \frac{1-\cos t}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$, car $\frac{1-\cos t}{t} \sim \frac{t^2/2}{t}$, au voisinage de 0.
   De $\left|\frac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \frac{2}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$.
   Par suite, le crochet $\left[\frac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0. On déduit alors du théorème d'intégration par parties la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :
$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$
   • Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
     ∗ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
     ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
     ∗ On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}\cdot$$
     La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
     Comme $\frac{1-\cos t}{t^2} \sim \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$, au voisinage de 0, la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0,1]$.
     On a $\varphi(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1,+\infty[$.
     Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.
   On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. • On a :
$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x}\cdot$$
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
   • Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :
$$y'' + y = 0.$$
   On en déduit l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x > 0 \quad h(x) = a\cos x + b\sin x.$$
   D'après l'étude précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Il en résulte en particulier que les deux suites $\big(h(2n\pi)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 ; comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_+$, par continuité en 0.

On a donc établi que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

12.21 1. (a) Soit $x \in J \setminus \{0\}$. comme J contient 0, le segment d'extrémités 0 et x est inclus dans J et l'on peut écrire :

$$\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = g(x).$$

(b) Notons g_1 la fonction définie sur J par :

$$\forall x \in J \quad g_1(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$$

et appliquons à g_1 le corollaire 5 de la page 688.
Notons $\varphi : (x,t) \mapsto f'(tx)$ et fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a :

$$\forall p \in [\![0,k]\!] \quad \forall (x,t) \in J \times [0,1] \quad \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx)$$

- Pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0,k]\!]$, la fonction :

$$t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx),$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur ce segment.

- Fixons un segment $[a,b]$ de J contenant 0. La fonction $f^{(k+1)}$ est continue sur ce segment, donc bornée sur ce segment ; posons $M = \sup\limits_{u\in[a,b]} \left|f^{(k+1)}(u)\right|$.

Notons que pour $x \in [a,b]$ et $t \in [0,1]$, on a $tx \in [a,b]$; on en déduit :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,1] \qquad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|t^k f^{(k+1)}(tx)\right| \leqslant M,$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque la fonction constante égale à M est intégrable sur l'intervalle borné $[0,1]$.

On peut donc conclure, d'après le corollaire précité, que g_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in J \quad g_1^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Il est clair que g_1 fournit un prolongement de g.

2. D'après la première question, les fonctions $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   La deuxième fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, puisque la fonction sh ne s'y annule pas ; en 0 elle vaut $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) = 1$.

   Par suite, le quotient de ces deux prolongements est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cela veut dire que la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{\operatorname{sh} x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction f sur le segment $[0, x]$, on obtient :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad h\,(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Le changement de variable $t = ux$ donne :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad h\,(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}\,(ux)\,\mathrm{d}u.$$

   En procédant comme à la première question, on établit que h se prolonge en une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in J \quad h_1^{(k)}\,(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} u^k f^{(n+k+1)}\,(ux)\,\mathrm{d}u.$$

12.22 Notons que la fonction f, continue sur le fermé borné $R = [a,b] \times [c,d]$, est bornée ; posons $M = \sup\limits_R |f|$.

- Montrons que H est de classe $\mathcal{C}^1$.

  Pour cela, établissons la continuité sur $[a,b]$ de l'application $t \mapsto \displaystyle\int_c^d f\,(t,y)\,\mathrm{d}y$, en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Les deux premières hypothèses sont facilement vérifiées, par continuité de f, et l'on utilise la fonction constante égale à M comme fonction de domination.

  La fonction H est donc de classe $\mathcal{C}^1$, comme primitive de $t \mapsto \displaystyle\int_c^d f\,(t,y)\,\mathrm{d}y$, et l'on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad H'\,(x) = \int_c^d f\,(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- Montrons que G est de classe $\mathcal{C}^1$, en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

  Définissons $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ par :

$$\forall\,(x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad g\,(x,y) = \int_a^x f\,(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

  * Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto g\,(x,y)$ est intégrable sur $[c,d]$, car continue sur ce segment (comme pour l'étude de H, on utilise le théorème 3 de la page 680).

* Pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme primitive de $t \mapsto f(t,y)$, et l'on a :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$$

* Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $[c,d]$, car f est continue.
* On utilise de même la fonction constante égale à M pour l'hypothèse de domination.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in [a,b] \quad G'(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Les fonctions H et G sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $H' = G'$; comme, de plus, $H(a) = G(a) = 0$, on a $H = G$ et, en particulier, $H(b) = G(b)$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Chapitre 13 : Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et n un entier naturel non nul.
En première année ont été abordées :

- les équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$y' + a(t)\,y = b(t) \quad \text{avec} \quad a : I \to \mathbb{K} \quad \text{et} \quad b : I \to \mathbb{K} \text{ continues ;}$$

- les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' + a\,y' + b\,y = c(t) \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{et} \quad c : I \to \mathbb{K} \text{ continue.}$$

Les objectifs du cours de seconde année sont :

- dans le cas de l'ordre 1, étendre l'étude à des systèmes différentiels ;
- pour les équations d'ordre 2, étendre l'étude au cas de coefficients non constants.

I Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

1 Définitions et notations

Convention Dans la suite du chapitre, on identifie comme souvent $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. Ainsi, on pourra écrire $A\,X$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$.

Définition 1

- On appelle **système différentiel linéaire du premier ordre** toute équation différentielle de la forme :
$$X' = A(t)\,X + B(t) \tag{S}$$
avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ des applications continues.
- Une **solution** du système différentiel (S) est une application dérivable $X : I \to \mathbb{K}^n$ vérifiant :
$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t).$$
Résoudre le système différentiel (S), c'est chercher toutes ses solutions.
- On appelle **système homogène** associé à (S) le système différentiel :
$$X' = A(t)\,X, \tag{S$_0$}$$
que l'on appelle aussi système **sans second membre** associé à (S).

p.766

Exercice 1 Reprenons les notations de la définition précédente. Prouver que toute solution du système différentiel (S) est de classe $\mathcal{C}^1$.

Écriture sous forme d'un système Un tel système (S) s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}(t)\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}(t)\,x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}(t)\,x_n & + & b_n(t), \end{array}\right. \tag{S}$$

où les $a_{i,j}$, appelées **coefficients**, et les b_i, appelées **seconds membres**, sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque Si $n = 1$, alors le système différentiel (S) s'écrit :
$$x_1' = a_{1,1}(t)\,x_1 + b_1(t),$$
et n'est alors rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 écrite sous forme résolue, comme déjà étudié en première année.

Exemple issu de la physique : particule chargée dans un champ magnétique
Considérons une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t)$ (dépendant continûment du temps).
Cette particule est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}(t),$$

et donc, d'après le principe fondamental de la dynamique, en notant $\vec{a}$ son accélération et m sa masse :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\,\vec{v} \wedge \vec{B}(t).$$

Autrement dit, la vitesse $\vec{v}$ est solution l'équation différentielle :

$$x' = x \wedge \left(\frac{q}{m}\vec{B}(t)\right). \tag{E}$$

Supposons désormais que le champ magnétique $\vec{B}(t)$ ait une direction constante et plaçons-nous dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que ce champ soit dirigé par le premier vecteur de $\mathcal{B}$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, les composantes de $\dfrac{q}{m}\,\vec{B}(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont alors de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En notant alors $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ les composantes de $x(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x(t) \wedge \left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(t)\,x_3(t) \\ -\alpha(t)\,x_2(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle (E) se traduit alors par le système différentiel homogène suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 0 \\ x_2'(t) &= \alpha(t)\,x_3(t) \\ x_3'(t) &= -\alpha(t)\,x_2(t). \end{cases} \tag{S}$$

Problème de Cauchy

- On dit qu'une solution φ du système différentiel (S) vérifie la **condition initiale** $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ si elle vérifie :

$$\varphi(t_0) = X_0.$$

- On appelle **problème de Cauchy** le système différentiel (S) muni d'une condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$:

$$\text{(E)} \;:\; X' = A(t)\,X + B(t) \qquad \text{et} \qquad X(t_0) = X_0.$$

- **Résoudre** ce problème de Cauchy, c'est trouver toutes les solutions φ de (S) vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = X_0$.

2 Propriétés linéaires : structure de l'ensemble des solutions

Notation Pour $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X : I \to \mathbb{K}^n$, notons $A\,X$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} A\,X & : & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & t & \longmapsto & A(t)\,X(t). \end{array}$$

Avec cette notation, le système différentiel s'écrit : $\qquad X' = A\,X + B. \qquad$ (S)

L'application (il a été vu à l'exercice 1 que les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\begin{array}{rccl} L & : & \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) & \to & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n) \\ & & X & \mapsto & X' - A\,X \end{array}$$

est bien définie, c'est une application linéaire, et l'on constate que les systèmes différentiels (S) et (S_0) se formulent naturellement à l'aide de L :

$$(\mathrm{S}) \ : \ L(X) = B \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{S}_0) \ : \ L(X) = 0.$$

Les propriétés générales des équations linéaires donnent alors les deux résultats suivants.

Proposition 1

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (S_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$; c'est le noyau de l'application linéaire L introduite ci-dessus.
- Si φ_p est une solution particulière de (S), l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (S) s'écrit :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0 = \{\varphi_p + \varphi_0 \,;\ \varphi_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

Point méthode

Résoudre le système différentiel (S) revient à :

- résoudre le système homogène associé (S_0) ;
- trouver une solution particulière φ_p.

Proposition 2 (Principe de superposition)

Supposons que le second membre B de (S) s'écrive :

$$B = \alpha_1\,B_1 + \alpha_2\,B_2 \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{et} \quad (B_1, B_2) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)^2.$$

Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$X' = A(t)\,X + B_1(t) \quad \text{et} \quad X' = A(t)\,X + B_2(t),$$

alors la fonction $\alpha_1\,\varphi_1 + \alpha_2\,\varphi_2$ est solution de (S).

3 Théorème de Cauchy linéaire

Dans cette sous-section, A et B désignent des applications continues sur I à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. On considère le système différentiel linéaire du premier ordre :

$$X' = A(t)\,X + B(t) \tag{S}$$

Théorème de Cauchy linéaire

Le théorème suivant (admis) est fondamental.

Théorème 3 (Théorème de Cauchy linéaire, admis)

Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une et une seule solution φ du système différentiel (S) vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = X_0$.
Autrement dit, le problème de Cauchy :

$$(\mathrm{S}) \;:\; X' = A(t)\,X + B(t) \qquad \text{et} \qquad X(t_0) = X_0$$

possède une unique solution.

Remarque La partie « existence » du théorème de Cauchy linéaire assure que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est non vide (car $I \times \mathbb{K}^n$ est non vide).

p.766 **Exercice 2** Soit φ_1 et φ_2 deux solutions distinctes de (S). Montrer que :

$$\forall t \in I \quad \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t).$$

p.766 **Exercice 3** Montrer qu'une solution non nulle du système différentiel homogène (S_0) ne s'annule en aucun point de I.

Remarque La partie « unicité » du théorème de Cauchy linéaire assure :

- que deux solutions distinctes de (S) ne se « croisent » pas (*cf.* exercice 2) ;
- qu'une solution non nulle de (S_0) ne s'annule pas (*cf.* exercice 3).

p.766 **Exercice 4** Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continues, ainsi que $t_0 \in I$.
On considère le système différentiel :

$$X' = A(t)X + B(t). \tag{S}$$

Montrer qu'une solution $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ de (S) est réelle (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) si, et seulement si, $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque Le théorème de Cauchy linéaire a été démontré dans le cours de première année pour les équations différentielles linéaires scalaires (*i.e.* $n = 1$) du premier ordre en exhibant la forme explicite des solutions.
Pour ces équations, de la forme :

$$x' + a(t)x = b(t) \quad \text{avec} \quad a : I \to \mathbb{K} \text{ et } b : I \to \mathbb{K} \text{ continues},$$

l'unique solution prenant la valeur x_0 au point $t_0 \in I$ est :

$$t \mapsto \exp(-F(t)) \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(F(u)\right) b(u)\, \mathrm{d}u\right)$$

où F est la primitive de a sur I s'annulant en t_0.
Cette forme explicite ne s'étend malheureusement pas au cas où $n \geqslant 2$. En effet, on ne sait pas, en général, expliciter les solutions d'un système différentiel linéaire du premier ordre.

Résolution numérique : méthode d'Euler

À défaut de savoir résoudre explicitement un système différentiel linéaire du premier ordre :

$$(\mathrm{S}) : X' = A(t)\, X + B(t),$$

on dispose d'algorithmes de résolution numérique.
La **méthode d'Euler** est l'un de ces algorithmes ; elle repose sur l'approximation à l'ordre 1 suivante (qui a du sens lorsque h est petit) :

$$X(t+h) \approx X(t) + hX'(t),$$

ce qui donne, comme X est solution du système différentiel :

$$X(t+h) \approx X(t) + h\big(A(t)X(t) + B(t)\big).$$

On construit ainsi une solution approchée Y pas à pas ; on définit $Y(t)$ en des temps de la forme $t = t_0 + k\,h$ avec t_0 le temps initial et k un entier, en posant :

$$Y(t_0) = X(t_0) \quad \text{puis} \quad Y(t+h) = Y(t) + h\big(A(t)Y(t) + B(t)\big).$$

Cette solution approchée Y est alors renvoyée sous la forme d'une liste.
La quantité h, strictement positive et « petite », est appelée le **pas**.

Algorithme 1 : méthode d'Euler

Données : $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto B(t)$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $h > 0$
Résultat : Y

$Y[t_0] \leftarrow x_0$
$t \leftarrow t_0$
pour $k = 1$ **à** n **faire**
  $Y[t+h] \leftarrow Y[t] + h * (A[t] * Y[t] + B[t])$
  $t \leftarrow t + h$
retourner Y

---

4 Espace des solutions du système homogène

Théorème 4

Soit $t_0 \in I$. Notons $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des solutions du système différentiel homogène (S_0) : $X' = A(t)\,X$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \delta_{t_0} & : \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{K}^n \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. L'application δ_{t_0} est évidemment linéaire, et elle est bijective puisque, pour tout $X_0 \in \mathbb{K}^n$, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence d'un et un seul élément $\varphi \in \mathcal{S}_0$ tel que $\varphi(t_0) = X_0$. □

Corollaire 5

L'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ est de dimension n.

Point méthode

Le fait de connaître la dimension de $\mathcal{S}_0$ se révèle utile lors de la résolution. En effet, si l'on dispose de n solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de (S_0), alors pour obtenir que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$ et donc :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

il suffit de montrer, au choix :

- que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre ;
- que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice (en montrant que toute solution de (S_0) s'écrit nécessairement comme combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$).

Remarque Concernant la seconde option du point méthode ci-dessus, il n'est pas nécessaire d'avoir préalablement vérifié que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont solutions ; en effet, si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont n applications dont toute solution de (S_0) est combinaison linéaire, alors on a :

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

et donc, comme on a $\dim \mathcal{S}_0 = n$, un argument de dimension permet de conclure que l'inclusion précédente est une égalité :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est alors nécessairement libre et est une base de $\mathcal{S}_0$. Cet argument sera utilisé à l'exercice 5 .

Exemple Reprenons l'exemple de la page 742 de la particule chargée dans un champ magnétique homogène. Supposons cette fois que le champ magnétique $\vec{B}$ soit constant. Le système différentiel obtenu à la page 742 s'écrit alors :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 0 \\ x_2'(t) &= \alpha\, x_3(t) \\ x_3'(t) &= -\alpha\, x_2(t) \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \text{ une constante positive.}$$

Constatons que les trois fonctions suivantes sont solutions :

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha\, t) \\ \cos(\alpha\, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha\, t) \\ -\sin(\alpha\, t) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, le système étudié étant un système différentiel linéaire homogène de taille 3, l'espace $\mathcal{S}_0$ de ses solutions est de dimension 3.
Puisque la famille $\big(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)\big)$ est libre, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ l'est aussi ; c'est donc une base de $\mathcal{S}_0$. On a donc :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

p.766

Exercice 5 On souhaite résoudre le système différentiel homogène :

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

1. Soit $f = (f_1, f_2)$ une solution de (S).
   (a) En additionnant les deux équations, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad (f_1 + f_2)(t) = a\, e^{3t}.$$
   (b) En déduire que $f \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ avec :
   $$\varphi_1 : t \mapsto (e^{-t}, -e^{-t}) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : t \mapsto (e^{3t}, e^{3t}).$$
2. Conclure la résolution.

5 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants

Le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)\, X + B(t)$$

est dit **à coefficients constants** si la fonction $A : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array}$ est constante. On identifie alors A à un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on note l'équation :

$$X' = A\, X + B(t).$$

Plus particulièrement, on s'intéresse dans cette partie à des systèmes différentiels linéaires *homogènes* :

$$X' = A\, X \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}). \qquad \text{(S)}$$

L'objectif est de présenter une méthode de résolution d'un tel système différentiel. Nous traitons trois situations :

- A est diagonalisable ;
- A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$;
- A est à coefficients réels, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

D'après le corollaire 5 de la page 746, on sait déjà que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (S) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Résoudre l'équation (S) revient donc à déterminer une base de $\mathcal{S}$.

Cas où A est diagonalisable

p.767

Exercice 6

1. Soit V un vecteur propre de A ; notons λ la valeur propre associée. Montrer que la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} V \end{array}$ est la solution du problème de Cauchy :
$$X' = AX \qquad \text{et} \qquad X(0) = V.$$
2. Supposons la matrice A diagonalisable. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées.
Montrer qu'alors, en notant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\varphi_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k \end{array}$$
la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.

Comme le montre l'exercice précédent, le cas où A est diagonalisable se révèle particulièrement simple : l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) s'obtient directement à partir des éléments propres de A.

Point méthode (Conséquence de l'exercice précédent)

Si la matrice A est diagonalisable, alors en notant $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées, on obtient une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (S) en prenant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\varphi_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k. \end{array}$$

p.768

Exercice 7 Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques

- Dans le cas où A est à coefficients réels, on peut s'intéresser aux solutions complexes ou réelles de l'équation. Lorsqu'il y a ambiguïté, on note $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ pour éviter toute confusion.
- Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et si $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de vecteurs propres *réels*, alors les application $\varphi_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k$ du point méthode précédent sont à valeurs réelles et l'on a :
$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$
La seule différence entre $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ réside alors dans les coefficients des combinaisons linéaires (qui sont ou bien complexes ou bien réels).

p.768 **Exercice 8** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable et que toute valeur propre de A a une partie réelle strictement négative. Montrer que toute solution du système différentiel (S) : $X' = A\,X$ tend vers 0 en $+\infty$.

Cas où la matrice A est trigonalisable

Exemple On souhaite résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- L'étude des éléments propres de A indique que 2 est valeur propre triple de A. Comme $A \neq 2I_3$, on en déduit que A est trigonalisable mais pas diagonalisable. Notons $N = A - 2I_3$. On a :
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice N est nilpotente d'indice 2. En posant :
$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
on a :
$$N\,U_1 = 0, \qquad N\,U_2 = U_1 \qquad \text{et} \qquad N\,U_3 = 0.$$
Ainsi, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, on a :
$$N = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$
et donc :
$$A = N + 2I_3 = P\,T\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- En notant $Y = P^{-1}X$, on a :
$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = P\,T\,P^{-1}\,X \\ &\iff P^{-1}X' = T\,P^{-1}\,X \\ &\iff Y' = T\,Y \qquad\qquad \text{(par linéarité de la dérivation).} \end{aligned}$$

  Résolvons le système différentiel $Y' = T\,Y$, qui, en notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, s'écrit :
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

  * *Analyse*. Supposons que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ soit solution.

    Les deux dernières équations mènent à l'existence de $(k_2, k_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_2(t) = k_2\,e^{2t} \quad \text{et} \quad y_3(t) = k_3\,e^{2t}.$$
    La première équation $y_1' = 2y_1 + k_2 e^{2t}$ apparaît alors comme une équation différentielle linéaire du premier ordre en y_1 et mène à l'existence de $k_1 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = k_1\,e^{2t} + k_2\,t\,e^{2t}.$$
    On obtient alors :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = k_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} t\,e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

  * *Synthèse*. De l'analyse précédente il résulte que l'espace $\mathcal{S}_T$ des solutions du système différentiel $Y' = T\,Y$ vérifie $\mathcal{S}_T \subset \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$ avec :
$$Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\,e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$
    Or, on sait que $\dim \mathcal{S}_T = 3$; la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est donc libre et en forme une base.

- Finalement, en utilisant l'équivalence :
$$X' = AX \iff Y' = TY \quad \text{avec} \quad X = PY,$$
  on obtient que l'espace des solutions du système $X' = AX$ est :
$$\text{Vect}(X_1, X_2, X_3) \quad \text{avec} \quad X_1 = PY_1, \quad X_2 = PY_2 \quad \text{et} \quad X_3 = PY_3.$$
  De manière plus explicite, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Point méthode

La méthode de résolution utilisée dans l'exemple précédent peut être utilisée dès que la matrice A est trigonalisable :

1. on trigonalise A, c'est-à-dire qu'on écrit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure ;
2. en posant $Y = P^{-1}X$ et en traduisant à l'aide de Y le système différentiel $X' = AX$, on obtient le système différentiel $Y' = TY$; ce système différentiel est triangulaire et on peut le résoudre ligne par ligne, du bas vers le haut ;
3. on obtient alors les solutions cherchées à l'aide de la relation $X = PY$.

Remarque Dans la démarche précédente :

- il n'est en aucun cas nécessaire de calculer P^{-1} ;
- lorsque l'on trigonalise A, on cherchera à obtenir la matrice triangulaire la plus simple possible afin d'obtenir le système différentiel $Y' = TY$ le plus simple possible.

p.768 **Exercice 9** Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque La technique consistant à obtenir un système différentiel plus simple par réduction de la matrice A peut aussi être utilisée dans le cas d'un système différentiel *avec second membre* de la forme $X' = AX + B(t)$ (*cf.* exercice 13.11 de la page 785).

Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le premier cas traité nous permet d'obtenir rapidement les solutions complexes, mais pas les solutions réelles. Donnons d'abord, *via* l'exercice suivant, un résultat utile pour la suite.

p.770 **Exercice 10** Considérons une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$.

Montrer que, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2$, on a :

$$\text{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) = \text{Vect}\big(\text{Re}(\varphi), \text{Im}(\varphi)\big).$$

L'exemple suivant fournit une méthode pour obtenir, dans le cas où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les solutions réelles à partir des solutions complexes.

Exemple On souhaite résoudre le système différentiel (S) : $X' = AX$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- On a :

$$\chi_A = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j}).$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Après calculs, le vecteur $V = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre j. Comme A est à coefficients réels, on en déduit que le vecteur $\overline{V} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{j}$.

- La résolution dans $\mathbb{C}$ du système différentiel étudiée se termine alors facilement : une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est donnée par $\left(X, \overline{X}\right)$ avec $X : t \mapsto e^{jt}V$.

- Comme la matrice A est à coefficients réels et le système homogène, le fait que X soit solution implique que les applications $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ sont également solutions : on obtient ainsi deux solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, d'après l'exercice 10 de la page précédente, on a :

$$\mathrm{Vect}\left(X, \overline{X}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(X)\right).$$

On en déduit que la famille $\left(\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(X)\right)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. En particulier, c'est une famille libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, et donc *a fortiori* une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Comme $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = 2$, on en déduit que c'est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ (car c'est une famille libre d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$).

De manière plus explicite, la base $\left(\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(X)\right)$ est donnée par :

$$\mathrm{Re}(X) : t \mapsto e^{-t/2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Im}(X) : t \mapsto e^{-t/2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

p.770 **Exercice 11** Résoudre dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le système différentiel $X' = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

1 Généralités

Définition 2

Soit a_0, a_1 et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire du second ordre** une équation de la forme :

$$x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t). \tag{E}$$

On appelle **solution** de l'équation différentielle linéaire (E) toute application 2 fois dérivable $\varphi : I \to \mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall t \in I \quad \varphi''(t) + a_1(t)\,\varphi'(t) + a_0(t)\,\varphi(t) = b(t).$$

- L'application $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ s'appelle le **second membre** de (E).
- On dit que l'équation (E) est à **coefficients constants** si les fonctions a_0 et a_1 sont constantes et qu'elle est **homogène** ou **sans second membre** si b est la fonction nulle.
- On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation :

$$x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0. \tag{E_0}$$

Remarque L'équation (E) dans la définition 2 est écrite sous une forme dite **résolue**, ce qui signifie que le coefficient devant x'' vaut 1.
Si une équation apparaît sous une forme **non résolue** :

$$\alpha_2(t)\,x'' + \alpha_1(t)\,x' + \alpha_0(t)\,x = b(t),$$

alors :

- si la fonction α_2 ne s'annule pas sur I, on divise par α_2 pour se ramener à une forme résolue ;
- sinon, le problème est plus délicat : quelques exemples de telles équations seront vus dans la partie III.

p.771

Exercice 12 (Régularité des solutions)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si les fonctions a_0, a_1 et b sont de classe $\mathcal{C}^p$, alors toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$.

Remarque En particulier, puisque les applications a_0, a_1 et b sont *a minima* supposées continues, toute solution de (E) est au moins de classe $\mathcal{C}^2$.

2 Traduction sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1

Nous reprenons ici les notations de la définition 2 de la page précédente. Considérons les applications $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ définies par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Les applications A et B ainsi définies nous permettent de traduire l'équation différentielle linéaire scalaire du second ordre (E) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1.

Proposition 6

- Si $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (E), alors l'application $\Phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$X' = A(t)X + B(t). \qquad \text{(S)}$$

- Réciproquement, toute solution du système différentiel (S) est de la forme $\Phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ avec φ solution de l'équation différentielle (E).

Démonstration page 771

Remarque d'approfondissement Le résultat précédent se généralise pour des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n (*cf.* exercice 13.9 de la page 785) dont l'étude ne figure pas au programme.

La proposition 6 ramène ainsi l'étude des équations différentielles linéaires scalaires du second ordre à celle des systèmes différentiels linéaires du premier ordre. Les résultats des trois sections qui suivent sont donc des conséquences immédiates de ceux établis dans la partie I.

3 Propriétés linéaires

Proposition 7 (Structure de l'ensemble des solutions)

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
- Si φ_P est une solution de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation (E) est donné par :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0 = \{\varphi_p + \varphi_0\,;\ \varphi_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

Proposition 8 (Principe de superposition)

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ tels que $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$x'' + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b_1(t) \qquad \text{et} \qquad x'' + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b_2(t)$$

alors la fonction $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ est solution de (E).

4 Problème de Cauchy

Reprenons les notations de la proposition 6 de la page ci-contre.
Le théorème de Cauchy linéaire pour les systèmes différentiels nous assure que pour tout couple $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution Φ au système différentiel (S) vérifiant la condition initiale :

$$\Phi(t_0) = X_0.$$

Puisque $\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$, on constate que fixer une condition initiale de la forme $\Phi(t_0) = X_0$ revient à fixer les valeurs de $\varphi(t_0)$ et $\varphi'(t_0)$. Cela mène à la version suivante du théorème de Cauchy linéaire :

Théorème 9 (Théorème de Cauchy linéaire)

Pour tout $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution φ de (E) vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Exemple Sans calculs, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$x'' + \sin(t)\, x' + \cos(t)\, x = t \qquad \text{et} \qquad \big(x(0), x'(0)\big) = (1, 0).$$

En revanche, le théorème de Cauchy linéaire ne nous donne pas de forme explicite de la solution.

5 Espace des solutions de l'équation homogène

Proposition 10

Soit $t_0 \in I$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 11

L'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$.

6 Cas des équations à coefficients constants

Soit a et b deux scalaires et $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On s'intéresse ici à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$x'' + a\,x' + b\,x = c(t). \qquad \text{(E)}$$

On sait que l'espace solution $\mathcal{S}$ de (E) est de la forme :

$$\mathcal{S} = y_P + \mathcal{S}_0$$

où y_P est une solution particulière et $\mathcal{S}_0$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée :

$$x'' + a\,x' + b\,x = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Résolution de l'équation homogène

Rappelons la méthode de résolution de l'équation homogène (E_0), vue en première année. Pour des applications simples de cette méthode, on pourra traiter l'exercice 13.1 de la page 783.

Définition 3

L'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (E_0).

Proposition 12 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

- Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1,\varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{r_2 t}.$$

- Si l'équation caractéristique a une solution double r, alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1,\varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{rt} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto t\,e^{rt}.$$

Principe de démonstration. Dans chacun des deux cas il est facile de vérifier :

- que les fonctions φ_1 et φ_2 proposées sont bien solutions de (E_0) ;
- que la famille (φ_1,φ_2) est une famille libre de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Comme on sait que l'espace solution $\mathcal{S}_0$ de (E_0) est de dimension 2, il en résulte que la famille (φ_1,φ_2) en est une base. Démonstration page 771

Proposition 13 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Supposons a et b réels.

- Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2, alors :
$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{r_2 t}.$$
- Si l'équation caractéristique a une solution réelle double r, alors :
$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{rt} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto t\, e^{rt}.$$
- Si l'équation caractéristique a deux solutions complexes non réelles, et donc conjuguées, $\alpha \pm i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors :
$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Démonstration page 772

L'exercice suivant propose de démontrer les deux premiers cas des propositions 12 et 13 en utilisant la traduction de l'équation (E_0) sous la forme d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1. Il utilise le résultat de la proposition 6 de la page 754.

p.773

Exercice 13

1. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ permettant de traduire l'équation (E_0) sous la forme d'un système différentiel : $$X' = A\,X. \qquad (\mathrm{S}_0)$$
2. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.
3. Supposons que l'équation caractéristique possède dans $\mathbb{K}$ deux solutions distinctes r_1 et r_2. Résoudre le système différentiel (S_0) et en déduire le premier point des propositions 12 et 13.
4. Traiter le cas où l'équation caractéristique possède dans $\mathbb{K}$ une solution double r.
   Indication : trigonaliser la matrice A pour se ramener à un système différentiel plus simple à résoudre.

Recherche d'une solution particulière

La recherche d'une solution particulière n'est en général pas un problème facile. Le seul résultat au programme est le suivant, déjà vu en première année. Il concerne un second membre de la forme $t \mapsto e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 14

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe une constante k telle que l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : x'' + a\,x' + b\,x = e^{\lambda t}$ possède une solution particulière de la forme :

- $t \mapsto k\,e^{\lambda t}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
- $t \mapsto k\,t\,e^{\lambda t}$ si λ est solution simple de l'équation caractéristique ;
- $t \mapsto k\,t^2\,e^{\lambda t}$ si λ est solution double de l'équation caractéristique.

Démonstration page 774

Point méthode

Lorsque le second membre est de la forme $A\,\sin(\omega t)$ ou $A\,\cos(\omega\,t)$, les formules d'Euler :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \qquad \text{et} \qquad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

permettent, *via* le principe de superposition, d'utiliser la proposition 14.

L'exercice 13.1 de la page 783 propose deux utilisations de cette méthode.

7 Quelques techniques classiques

Les techniques qui suivent ne sont pas destinées uniquement aux équations mises sous forme résolue. Pour preuve, l'équation étudiée dans l'exercice 14 n'apparaît pas sous forme résolue.

Recherche de solutions « simples »

Selon l'allure de l'équation, il peut être pertinent de rechercher une solution sous une forme explicite : fonction polynomiale, exponentielle, trigonométrique, ...

p.775

Exercice 14 Recherche d'une solution polynomiale)

Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène :

$$\left(t^2+2t-1\right)x'' + \left(t^2-3\right)x' - (2t+2)\,x = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

1. Soit $t \mapsto P(t)$ une solution polynomiale non nulle de (E_0).
   Montrer que $\deg(P) = 2$.
2. Obtenir alors toutes les fonctions polynomiales solutions de (E_0).

Recherche de solutions développables en série entière

Exemple Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène :

$$(\mathrm{E}) \;:\; t\,x'' + 2\,x' + t\,x = 0.$$

Recherchons les solutions de (E_0) développables en série entière.

- Dans un premier temps, supposons que φ soit une solution de (E) développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.
  Pour $t \in\,]-r, r[$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation (E), on a, pour tout $t \in]-r, r[$:

$$t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0.$$

Puis en réindexant les sommes pour obtenir dans chacune d'entre elles des t^n :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}\, t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}\, t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, t^n = 0,$$

ce qui donne, en regroupant les sommes :

$$2\, a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\big)t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients :

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0. \qquad (\star)$$

Il en résulte facilement que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, a_0.$$

Par suite, on a :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}.$$

- Réciproquement :
  - ∗ le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$ vaut $+\infty$ (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
  - ∗ la fonction :

$$\varphi_1 \ :\ t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$$

    est telle que ses coefficients vérifient la propriété $(\star)$, et donc, d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement, φ_1 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - ∗ On peut simplifier l'expression de cette solution φ_1 en remarquant que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t\,\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1} = \sin t,$$

    et donc finalement :

$$\varphi_1(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi_1(t) = \frac{\sin t}{t}\cdot$$

p.775

Exercice 15 Considérons, sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène :

$$(\mathrm{E}_0) \;:\; 4\,t\,x'' + 2x' - x = 0.$$

1. Déterminer une solution φ de (E_0) développable en série entière et vérifiant $\varphi(0) = 1$.
2. (a) Pour $t \in]0, +\infty[$, exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de la fonction ch.
   (b) Sauriez-vous « deviner » une autre solution de (E_0) sur $]0, +\infty[$ et ainsi terminer la résolution sur cet intervalle ?
3. (a) Pour $t \in]-\infty, 0[$, exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de la fonction cos.
   (b) Sauriez-vous « deviner » une autre solution de (E_0) sur $]-\infty, 0[$ et ainsi terminer la résolution sur cet intervalle ?

Remarque

L'équation (E_0) de l'exercice précédent n'apparaît pas sous forme résolue : sa résolution sur $\mathbb{R}$ tout entier est proposée à l'exercice 21 de la page 765.

Méthode de variation de la constante

Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(\mathrm{E}) : x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t).$$

Si l'on dispose d'une solution non triviale φ_0 de l'équation homogène et que l'on souhaite trouver d'autres solutions, il peut être intéressant de les rechercher sous la forme $\varphi = \lambda\,\varphi_0$ avec λ une fonction deux fois dérivable. En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi' &= \lambda'\,\varphi_0 + \lambda\,\varphi_0' \\ \varphi'' &= \lambda''\,\varphi_0 + 2\,\lambda'\,\varphi_0' + \lambda\,\varphi_0'' \end{aligned}$$

et donc, puisque φ_0 est solution de l'équation homogène, on a, après simplification :

$$\varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) = \varphi_0(t)\,\lambda''(t) + \big(2\varphi_0'(t) + a(t)\varphi_0(t)\big)\,\lambda'(t)$$

La fonction φ est alors solution de (E) si, et seulement si, la fonction λ' est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(\widetilde{\mathrm{E}}) \;:\; \varphi_0(t)\,y' + \big(2\varphi_0'(t) + a(t)\varphi_0(t)\big)\,y = c(t).$$

Si l'on sait trouver une solution de l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}})$, alors on peut en déduire une solution particulière de (E).

Exemple On souhaite résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$(\mathrm{E}) \ : x'' + \frac{2}{t}\,x' + x = 0.$$

D'après l'exemple de la page de la page 758, la fonction $\varphi_0 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est solution de (E). Puisque l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2, pour terminer la résolution de (E), il reste à en déterminer une solution non proportionnelle à φ_0.
Cherchons une telle solution sous la forme $\varphi = \lambda\,\varphi_0$ avec λ une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En injectant φ dans l'équation (E), on obtient que φ est solution si, et seulement si, λ' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(\widetilde{\mathrm{E}}) \ : \ \frac{\sin t}{t}\,y' + 2\,\frac{\cos t}{t}\,y = 0.$$

Sur l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}})$ s'écrit :

$$(\widetilde{E}) \ : \ y' + 2\,\frac{\cos t}{\sin t}\,y = 0.$$

La résolution de $(\widetilde{E})$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donne que la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{\sin^2 t}$ est solution.
En posant alors $\lambda(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ pour tout $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\lambda'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}\cdot$
Par suite, la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \lambda(t)\varphi_0(t) = \frac{\cos t}{t}$$

est solution de l'équation (E) sur l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. On peut alors vérifier que cette fonction peut en fait être considérée sur l'intervalle $]0,+\infty[$ tout entier et qu'elle est solution de (E) sur cet intervalle. Comme elle est non proportionnelle à la première solution $\varphi_0 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, cela termine la résolution, car l'équation est homogène d'ordre 2 :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \frac{\sin t}{t},\ t \mapsto \frac{\cos t}{t}\right).$$

Remarques Dans l'exemple précédent :

- pour résoudre l'équation différentielle $(\widetilde{\mathrm{E}})$, on s'est d'abord restreint à l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; cela nous a permis d'obtenir l'expression $\dfrac{\cos t}{t}$, et l'on a pu ensuite vérifier que cette expression définissait une solution de (E) sur tout l'intervalle $]0,+\infty[$;
- sachant que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ était déjà solution, on aurait pu raisonnablement penser que la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ pouvait également l'être et donc la tester directement.

p.777 **Exercice 16** Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x'' + \frac{1}{t}\,x' - \frac{1}{t^2}\,x = \frac{4\,\ln t}{t}\cdot$$

Indication : on pourra commencer par constater que la fonction $t \mapsto t$ est solution de l'équation homogène.

Changement de variable

Certaines équations différentielles sont telles que si $t \mapsto x(t)$ est solution, alors une fonction de la forme $u \mapsto x\big(\theta(u)\big)$ est solution d'une équation plus simple (idéalement, une équation à coefficients constants). La résolution de cette équation plus simple peut permettre d'en déduire les solutions de l'équation initiale. Lorsque l'on utilise une telle technique, on dit qu'on « effectue le changement de variable $t = \theta(u)$. »

Exemple Considérons, sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(\mathrm{E}) \ : \ t^2\,x'' + 3\,t\,x' + 4\,x = \cos(\ln t).$$

Nous allons mettre en place le changement de variable $t = e^u$.
Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit f une solution de (E).
  - ∗ Considérons la fonction :

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & f(e^u). \end{array}$$

Comme f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g'(u) = e^u f'(e^u) \qquad \text{et} \qquad g''(u) = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u).$$

On constate alors que, pour $u \in \mathbb{R}$:

$$g''(u) + 2\,g'(u) + 4\,g(u) = (e^u)^2 f''(e^u) + 3\,e^u\,f'(e^u) + 4\,f(e^u).$$

La fonction f étant solution de (E), on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g''(u) + 2\,g'(u) + 4\,g(u) = \cos(u),$$

et donc la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\widetilde{\mathrm{E}}) \ : \ y'' + 2\,y' + 4\,y = \cos(u).$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre, que l'on sait résoudre. Après l'avoir résolue, on en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g(u) = a\,e^{-u}\,\cos\big(\sqrt{3}\,u\big) + b\,e^{-u}\,\sin\big(\sqrt{3}\,u\big) + \frac{3}{13}\cos u + \frac{2}{13}\sin u.$$

∗ Revenons sur la fonction f. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$f(t) = f\big(e^{\ln t}\big) = g(\ln t).$$

Par suite, on obtient l'expression suivante de $f(t)$ pour $t \in]0,+\infty[$:

$$f(t) = \frac{a}{t}\cos\big(\sqrt{3}\ln t\big) + \frac{b}{t}\sin\big(\sqrt{3}\ln t\big) + \frac{3}{13}\cos(\ln t) + \frac{2}{13}\sin(\ln t).$$

- *Synthèse.* Réciproquement, on peut vérifier que toute fonction f de la forme ci-dessus est bien solution de (E).

Remarque culturelle On appelle **équation d'Euler** une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_n\,t^n\,x^{(n)} + a_{n-1}\,t^{n-1}\,x^{(n-1)} + \cdots + a_0\,x = h(t) \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0.$$

- Comme dans l'exemple précédent, une telle équation peut être ramenée, par un changement de variable en $t = e^u$, à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- Pour résoudre l'équation homogène, on peut aussi chercher les solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Dans le cas de l'équation de l'exemple précédent, on obtient que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est solution de l'équation homogène si, et seulement si, $\alpha = -1 \pm i\sqrt{3}$, et l'on obtient finalement, en prenant les parties réelle et imaginaire, que les deux fonctions réelles :

$$t \mapsto \frac{\cos(\sqrt{3}\ln t)}{t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{3}\ln t)}{t}$$

forment une base de l'espace solution de l'équation homogène, car il s'agit d'une famille libre de solutions.

p.778 **Exercice 17** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \;:\; (1+t^2)^2\,x'' + 2\,(t+1)(1+t^2)\,x' + x = 0.$$

Indication : changement de variable $t = \tan u$.

III Exemples d'équations différentielles linéaires non résolues

1 Exemples d'équations du premier ordre

Étant donné une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t),$$

si la fonction a_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I de résolution, alors on peut diviser par $a_1(t)$ pour se ramener à une équation sous forme résolue : on sait alors que l'ensemble solution est de la forme $y_P + \mathcal{S}_0$, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène étant de dimension 1.

En revanche, si la fonction a_1 s'annule, la situation est plus délicate. Le plan d'étude d'équations non résolues sera en général le suivant :

Point méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t)$ lorsque la fonction a_1 possède des points d'annulation :

- on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a_1 ne s'annule pas ;
- on cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier.

Terminologie Étant donné un sous-intervalle J de I, on dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) sur J pour signifier que la restriction de f à J est solution de (E).

Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre non résolue :

- l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel, mais n'est pas nécessairement de dimension 1 ;
- la structure de l'ensemble des solutions est la même que dans le cas d'une équation résolue : $\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0$, où φ_P est une solution particulière ;
- l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Cauchy n'est plus assurée : il peut ne pas y avoir de solution, ou en exister une infinité.

p.779 **Exercice 18** Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ t\,x' - 2\,x = t^3.$$

1. Donner les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.
2. Si φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, prouver que φ est de la forme :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda\,t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu\,t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Conclure.

p.780 **Exercice 19** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ t^2\,x' - x = 0.$$

p.780 **Exercice 20** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (1-t)\,x' - x = t$$

2 Exemples d'équations du second ordre

Point méthode

Pour résoudre une équation differentielle linéaire du second ordre de la forme $a_2(t)\,x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t)$ lorsque la fonction a_2 possède des points d'annulation :

- on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a_2 ne s'annule pas ;
- on cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier.

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre non résolue :

- l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel, mais n'est pas nécessairement de dimension 2 ;
- la structure de l'ensemble des solutions est la même que dans le cas d'une équation résolue : $\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0$, où φ_P est une solution particulière ;
- l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Cauchy n'est plus assurée : il peut ne pas y avoir de solution, ou en exister une infinité.

p.781 **Exercice 21** *(Suite de l'exercice 15 de la page 760)*

Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0)\ :\ 4\,t\,x'' + 2\,x' - x = 0.$$

On a vu à l'exercice 15 que :

- sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont données par :

$$t \mapsto \lambda_1 \cos\left(\sqrt{-t}\right) + \lambda_2 \sin\left(\sqrt{-t}\right) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\ ;$$

- sur $]0, +\infty[$, les solutions sont données par :

$$t \mapsto \mu_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) + \mu_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) \quad \text{avec} \quad (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Soit $X : I \to \mathbb{K}^n$ une application dérivable vérifiant :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Puisque les applications A, X et B sont continues car dérivables, l'application :

$$t \mapsto A(t)X(t) + B(t)$$

est continue, et donc X' l'est aussi. Ainsi X est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2 S'il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, alors les applications φ_1 et φ_2 sont toutes deux solutions du problème de Cauchy :

$$X' = A(t)\,X + B(t) \qquad \text{et} \qquad X(t_0) = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0).$$

et donc, par propriété d'unicité, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 3 Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ une solution de (S_0). Supposons que φ s'annule en un point $t_0 \in I$. Alors φ vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = 0$. Or, la fonction nulle est également une solution de (S_0) vérifiant cette condition initiale. Par unicité de la solution de (S_0) vérifiant une condition initiale donnée, on en déduit que φ est la fonction nulle.

Exercice 4

- Si φ est une solution réelle de (S) alors on a :

  $$\forall t \in I \quad \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

  et donc en particulier $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.
- Réciproquement, soit φ une solution du système (S) telle que $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

  L'application $\overline{\varphi} : t \mapsto \overline{\varphi(t)}$ est aussi une solution de (S) puisque, pour tout $t \in I$, en conjuguant la relation $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + B(t)$, on obtient, puisque les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont à coefficients réels :

  $$\overline{\varphi'(t)} = \overline{A(t)\,\varphi(t) + B(t)} = A(t)\,\overline{\varphi(t)} + B(t)$$

  autrement dit :

  $$\overline{\varphi}'(t) = A(t)\,\overline{\varphi}(t) + B(t).$$

  Comme $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(t_0) = \overline{\varphi(t_0)} = \overline{\varphi}(t_0)$. Les fonctions φ et $\overline{\varphi}$ sont donc solutions de (S) et vérifient la même condition initiale en t_0. Par unicité de la solution vérifiant un problème de Cauchy, on a $\varphi = \overline{\varphi}$, ce qui signifie que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5

1. (a) On a, en additionnant les deux équations :

   $$(f_1 + f_2)' = 3(f_1 + f_2),$$

   donc $f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = 3y$. On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_1(t) + f_2(t) = ae^{3t}.$$

(b) En remplaçant $f_2(t)$ par $ae^{3t} - f_1(t)$ dans la première équation du système, on trouve :

$$f_1'(t) = -f_1(t) + 2ae^{3t},$$

donc f_1 est solution de l'équation $y' + y = 2ae^{3t}$.
Il existe donc un scalaire b tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_1(t) = be^{-t} + \frac{a}{2}e^{3t};$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2(t) = -be^{-t} + \frac{a}{2}e^{3t}.$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = b\left(e^{-t}, -e^{-t}\right) + \frac{a}{2}\left(e^{3t}, e^{3t}\right),$$

donc f est combinaison linéaire de $\varphi_1 : t \mapsto (e^{-t}, -e^{-t})$ et $\varphi_2 : t \mapsto (e^{3t}, e^{3t})$.

2. Il s'agit d'un système différentiel linéaire homogène de taille 2, donc l'espace des solutions $\mathcal{S}_0$ est de dimension 2. D'après la question précédente, on a :

$$\mathcal{S}_0 \subset \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

On a donc nécessairement $\dim \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) = 2$ et :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

La famille (φ_1, φ_2) est donc base de $\mathcal{S}_0$.

Exercice 6

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \exp(\lambda t)V$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \lambda\, e^{\lambda t}\, V = e^{\lambda t}\, \lambda V = e^{\lambda t}\, AV = A\, e^{\lambda t} V = A\, \varphi(t).$$

Comme de plus $\varphi(0) = V$, φ est bien solution du problème de Cauchy :

$$X' = AX \qquad \text{et} \qquad X(0) = V.$$

Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, c'est la seule.

2. D'après la première question, les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont solutions de l'équation (S). Comme $\dim(\mathcal{S}) = n$, pour conclure que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$, il suffit de prouver la liberté. Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k\, \varphi_k = 0.$$

En évaluant en $t \in I$ quelconque, on obtient, par définition de φ_k :

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k\, e^{\lambda_k t}\, V_k = 0.$$

Comme la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mu_k \underbrace{e^{\lambda_k t}}_{\neq 0} = 0 \quad \text{et donc} \quad \mu_k = 0.$$

D'où la liberté de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Exercice 7

- La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Obtenons ses éléments propres.

  On a $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  La matrice J est de rang 1. Son noyau est donc de dimension 2. Plus précisément, une base de $\operatorname{Ker} J$ est donnée par (V_1, V_2) avec :

  $$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  On a $\operatorname{Tr}(J) = 3$; comme 0 est valeur propre de multiplicité 2, on a $3 \in \operatorname{sp}(J)$.

  On constate que $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé.

  La matrice J est donc diagonalisable et (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres associée au triplet $(0, 0, 3)$ de valeurs propres.

- Par suite, A est diagonalisable, et (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres associée au triplet $(1, 1, 4)$ de valeurs propres. Il en résulte qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel étudié est (X_1, X_2, X_3) avec :

  $$X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A ; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. L'espace solution du système différentiel (S) est alors :

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \varphi_k : t \mapsto e^{\lambda_k t}\, V_k.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$, donc $e^{\lambda_k t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\varphi_k(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, toute combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, c'est-à-dire toute solution de (S), tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9

- Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

  $$\chi_A = X^2 - 12X + 36 = (X - 6)^2,$$

  donc 6 est valeur propre double de A. Comme $A \neq 6I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable. En revanche, comme χ_A est scindé, A est trigonalisable.
  Notons $N = A - 6I_2$. On a :

  $$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  En notant $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, on a :

  $$N\,U_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad N\,U_2 = U_1.$$

Donc, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$, on a :

$$N = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc :

$$A = P\,T\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- En notant $Y = P^{-1}X$, on a :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = P\,T\,P^{-1}\,X \\ &\iff P^{-1}X' = T\,P^{-1}\,X \\ &\iff Y' = T\,Y. \end{aligned}$$

Résolvons le système différentiel $Y' = T\,Y$, qui, en notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcr} y_1' & = & 6y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & & & 6y_2. \end{array} \right.$$

$*$ *Analyse.* Supposons que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ soit solution.

La dernière équation mène à l'existence de $k_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_2(t) = k_2\,e^{6t}.$$

La première équation $y_1' = 6y_1 + k_2 e^{2t}$ apparaît alors comme une équation différentielle linéaire du premier ordre en y_1 et mène à l'existence de $k_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = k_1\,e^{6t} + k_2\,t\,e^{6t}.$$

On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = k_1 \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} t\,e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$

$*$ *Synthèse.* De l'analyse précédente il résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_T$ des solutions du système différentiel $Y' = T\,Y$ vérifie $\mathcal{S}_T \subset \operatorname{Vect}(Y_1, Y_2)$ avec :

$$Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\,e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Comme on sait de plus que $\dim \mathcal{S}_T = 2$, la famille (Y_1, Y_2) en est une base.

- Finalement, en utilisant l'équivalence :

$$X' = AX \iff Y' = TY \quad \text{avec} \quad X = PY,$$

on obtient que l'espace des solutions du système $X' = AX$ est :

$$\operatorname{Vect}(X_1, X_2) \quad \text{avec} \quad X_1 = PY_1 \quad \text{et} \quad X_2 = PY_2.$$

De manière plus explicite, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X_1(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} t + 1/2 \\ -t + 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

- On a $\mathrm{Vect}(\varphi,\overline{\varphi}) \subset \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Re}(\varphi),\mathrm{Im}(\varphi)\big)$ du fait des deux relations :
$$\varphi = \mathrm{Re}(\varphi) + i\,\mathrm{Im}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \overline{\varphi} = \mathrm{Re}(\varphi) - i\,\mathrm{Im}(\varphi).$$
- L'inclusion réciproque $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{Re}(\varphi),\mathrm{Im}(\varphi)\big) \subset \mathrm{Vect}(\varphi,\overline{\varphi})$ vient des relations :
$$\mathrm{Re}(\varphi) = \frac{\varphi+\overline{\varphi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) = \frac{\varphi-\overline{\varphi}}{2i}\cdot$$

Exercice 11

- Pour $x \in \mathbb{C}$, on a :
$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ -2 & x+1 & -3 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$
et donc, en développant par rapport à la dernière ligne :
$$\chi_A(x) = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i).$$
La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
- Après calculs :
  * le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 ;
  * le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre i ;

  par suite, comme A est à coefficients réels, le vecteur $\overline{V_2}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-i$.
- Ainsi, une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ des solutions à valeurs complexes est donnée par $(X_1, X_2, \overline{X_2})$ avec :
$$X_1 : t \mapsto e^t V_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 : t \mapsto e^{it} V_2.$$
- Comme $\mathrm{Vect}\big(X_2,\overline{X_2}\big) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Re}(X_2),\mathrm{Im}(X_2)\big)$ (*cf.* exercice 10 de la page 751), on a :
$$\mathrm{Vect}\big(X_1,X_2,\overline{X_2}\big) = \mathrm{Vect}\big(X_1,\mathrm{Re}(X_2),\mathrm{Im}(X_2)\big),$$
et donc la famille $\big(X_1,\mathrm{Re}(X_2),\mathrm{Im}(X_2)\big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. Puisqu'elle est formée d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, c'est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ (c'est en effet une famille libre de deux éléments appartenant à $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, et l'on a $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = 2$).

  De manière plus explicite, la base $\big(X_1,\mathrm{Re}(X_2),\mathrm{Im}(X_2)\big)$ est donnée par :
$$X_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Re}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$
et
$$\mathrm{Im}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 Supposons que les fonctions a_0, a_1 et b soient de classe $\mathcal{C}^p$.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une solution de (E). Raisonnons par l'absurde en supposant que φ ne soit pas de classe $\mathcal{C}^{p+2}$. Comme φ, en tant que solution de (E), est 2 fois dérivable, il existe $k \in [\![1, p+1]\!]$ tel que φ soit de classe $\mathcal{C}^k$ mais pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. La relation :

$$\varphi'' = b - a_1\,\varphi' - a_0\,\varphi$$

mène alors à une contradiction car :

- le membre de gauche, φ'', n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k-1}$;
- le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ car :
  - ∗ les fonctions a_0, a_1 et b sont de classe $\mathcal{C}^p$ donc $\mathcal{C}^{k-1}$;
  - ∗ les fonctions φ et φ' sont de classes respectivement $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^{k-1}$.

Proposition 6

- Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une solution de (E). Notons $\Phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$.

  Pour tout $t \in I$, on a :

  $$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ -a_0(t)\varphi(t) - a_1(t)\varphi'(t) \end{pmatrix}.$$

  Puisque φ est solution de (E), on a :

  $$\varphi''(t) = -a_0(t)\varphi(t) - a_1(t)\varphi(t) + b(t).$$

  Par suite, Φ est solution du système différentiel :

  $$X' = A(t)X + B(t). \qquad \text{(S)}$$

- Réciproquement, soit $\Phi : I \to \mathbb{K}^2$ une solution du système différentiel (S).

  En écrivant $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$, la relation $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t) + B(t)$ s'écrit :

  $$\begin{cases} \Phi_1'(t) &= \Phi_2(t) \\ \Phi_2'(t) &= -a_0(t)\,\Phi_1(t) - a_1(t)\,\Phi_2(t) + b(t). \end{cases}$$

  Ainsi, en posant $\varphi = \Phi_1$, Φ est de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ et φ est solution de (E).

Proposition 12 Tout d'abord, il est facile de vérifier que si $r \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation caractéristique, alors la fonction $\varphi : t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0), puisque :

$$\begin{aligned} \varphi'' + a\varphi'(t) + b\varphi(t) &= r_1^2 e^{r_1 t} + a r_1 e^{r_1 t} + b e^{r_1 t} \\ &= \underbrace{\left(r_1^2 + a r_1 + b\right)}_{=0} e^{r_1 t}. \end{aligned}$$

- *Premier cas : deux solutions distinctes r_1 et r_2.*
  - ∗ Comme r_1 et r_2 sont solutions de l'équation caractéristique, et d'après le calcul ci-dessus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont solutions de (E_0).

- ∗ *Liberté de la famille* (φ_1, φ_2). Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$. En dérivant, on a alors $\lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' = 0$. On a donc, pour $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{r_1 t} & + & \lambda_2 e^{r_2 t} & = & 0 \\ r_1\lambda_1 e^{r_1 t} & + & r_2\lambda_2 e^{r_2 t} & = & 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme $r_1 \neq r_2$, la matrice $\begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$ est de déterminant non nul, donc inversible.

On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. D'où la liberté de la famille (φ_1, φ_2).

- *Second cas : une solution double* r.
  - ∗ Comme r est solution de l'équation caractéristique, la fonction $\varphi_1 : t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0). Intéressons-nous à $\varphi_2 : t \mapsto te^{rt}$. Pour $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_2''(t) + a\,\varphi_2'(t) + b\,\varphi_2(t) &= (r^2 t + 2r)e^{rt} + a(rt+1)e^{rt} + bte^{rt} \\ &= \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0}\,t\,e^{rt} + \underbrace{(2r + a)}_{=0}\,e^{rt}, \end{aligned}$$

donc φ_2 est solution de (E_0).

  - ∗ *Liberté de la famille* (φ_1, φ_2). Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$. On a :

$$\forall t \in I \quad \lambda_1 e^{rt} + \lambda_2 te^{rt} = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt} = 0$$

et donc, puisque l'exponentielle ne s'annule pas :

$$\forall t \in I \quad \lambda_1 + \lambda_2 t = 0.$$

En évaluant en deux valeurs distinctes de t (rappelons que l'intervalle I a été supposé non réduit à un point), on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

D'où la liberté de la famille (φ_1, φ_2).

Proposition 13

- Les deux premiers cas se traitent de la même manière que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Plaçons-nous dans le troisième cas : supposons que l'équation caractéristique ait deux racines complexes non réelles $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

L'espace des solutions de (E_0) à valeurs complexes est alors :

$$\mathcal{S}_{0,\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) \quad \text{avec} \quad \varphi : t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big).$$

Les fonctions $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$ sont alors deux solutions de (E_0) à valeurs réelles, et elles vérifient de plus :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi, \overline{\varphi}) = \mathcal{S}_{0,\mathbb{C}},$$

donc (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_{0,\mathbb{C}}$.

La famille (φ_1, φ_2) est donc libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, donc *a fortiori* libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Comme $\dim \mathcal{S}_0 = 2$, on en déduit que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$. D'où le résultat.

Exercice 13

1. On notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, l'équation (E_0) se traduit par le système différentiel suivant :
$$X' = A\,X. \tag{S$_0$}$$
2. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :
$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ b & x+a \end{vmatrix} = x^2 + ax + b.$$
Remarque. On retrouve l'équation caractéristique de (E_0) : résoudre l'équation caractéristique revient à chercher les racines du polynômes χ_A.
3. Dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes r_1 et r_2, le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples r_1 et r_2. Dans ce cas, la matrice A est diagonalisable. Soit V_1 et V_2 des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres r_1 et r_2. D'après le point méthode de la page 748, l'espace $\tilde{\mathcal{S}}_0$ des solutions du système différentiel (S) est :
$$\tilde{\mathcal{S}}_0 = \mathrm{Vect}(\Phi_1, \Phi_2) \quad \text{avec} \quad \Phi_1 : t \mapsto e^{r_1 t}\, V_1 \quad \text{et} \quad \Phi_2 : t \mapsto e^{r_2 t}\, V_2.$$
Puisque $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre de A. Par suite, les vecteurs V_1 et V_2 ont une première composante non nulle. Quitte à les multiplier par un scalaire, on peut supposer qu'ils s'écrivent :
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2.$$
Les solutions du système $(\mathcal{S})$ sont de la forme :
$$\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,$$
et l'on a :
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, e^{r_2 t} \\ \lambda_1\, \alpha_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, \alpha_2\, e^{r_2 t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$
Ainsi, d'après la proposition 6 de la page 754, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$\varphi(t) = \lambda_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, e^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,$$
autrement dit :
$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{r_2 t}.$$
4. Supposons que l'équation caractéristique possède une solution double r. Dans ce cas, la matrice A possède r comme unique valeur propre.
Comme $A \neq rI_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$. On a $r = -\dfrac{a}{2}$ et l'on constate que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à r. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

complète ce vecteur propre en une base de $\mathbb{K}^2$ et l'on a :

$$A = P\,T\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} r & \alpha \\ 0 & r \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Si l'on note $Y = P^{-1}X$, alors X est solution de (S_0) si, et seulement si, Y est solution du système différentiel $Y' = T\,Y$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & r y_1 + \alpha y_2 \\ y_2' & = & r y_2 \end{array} \right. \quad \text{en ayant écrit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

- La résolution de la seconde équation donne : $y_2(t) = \lambda e^{rt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- La première équation apparaît alors comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en y_1 :

  $$y_1'(t) - r y_1(t) = \alpha\lambda e^{rt},$$

  et la résolution donne :

  $$y_1(t) = \mu e^{rt} + \alpha\lambda t e^{rt}.$$

- Ainsi, les solutions du système différentiel $Y' = T\,Y$ sont données par :

  $$Y(t) = \begin{pmatrix} \mu e^{rt} + \alpha\lambda t e^{rt} \\ \lambda e^{rt} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

- La relation $X = P\,Y$ donne alors les solutions du système différentiel (S_0), dont on récupère la première composante pour obtenir les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

  $$t \mapsto \mu e^{rt} + \alpha\lambda t e^{rt} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

  On a donc :

  $$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto \alpha t e^{rt}\right)$$

  ou encore, puisque $\alpha \neq 0$:

  $$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto t e^{rt}\right).$$

Proposition 14

- Supposons que λ ne soit pas racine de l'équation caractéristique.
  La fonction $\varphi : t \mapsto e^{\lambda t}$ est deux fois dérivable et :

  $$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''(t) + a\,\varphi'(t) + b\,\varphi(t) = (\lambda^2 + a\lambda + b)\,e^{\lambda t}.$$

  Par suite, en posant $k = \dfrac{1}{\lambda^2 + a\lambda + b}$, la fonction $t \mapsto k\,e^{\lambda t}$ est solution de (E).
- Supposons que λ soit racine simple de l'équation caractéristique. On a alors :

  $$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda + a \neq 0.$$

  La fonction $\varphi : t \mapsto t\,e^{\lambda t}$ est deux fois dérivable et :

  $$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''(t) + a\,\varphi'(t) + b\,\varphi(t) &= \left((\lambda^2 + a\lambda + b)t + (2\lambda + a)\right) e^{\lambda t} \\ &= (2\lambda + a)\,e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

  Par suite, en posant $k = \dfrac{1}{2\lambda + a}$, la fonction $t \mapsto k\,t\,e^{\lambda t}$ est solution de (E).

- Supposons que λ soit racine double de l'équation caractéristique. On a alors :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda + a = 0.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t^2\, e^{\lambda t}$ est deux fois dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''(t) + a\,\varphi'(t) + b\,\varphi(t) = \big((\lambda^2 + a\lambda + b)t^2 + 2(2\lambda + a)t + 2\big)\, e^{\lambda t}$$
$$= 2\, e^{\lambda t}.$$

Par suite, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}\, e^{\lambda t}$ est solution de (E).

Exercice 14

1. Notons n le degré P, de telle sorte que, comme P est non nul, P s'écrit :

$$P = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_0 \quad \text{avec} \quad \alpha_n \neq 0.$$

En reportant dans l'équation (E_0), on constate que le polynôme :

$$Q = \big(X^2 + 2X - 1\big)\, P'' + \big(X^2 - 3\big)\, P' - (2X + 2)\, P$$

est le polynôme nul car il vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Q(t) = 0.$$

Or, le polynôme Q s'écrit :

$$Q = (n-2)\, \alpha_n X^{n+1} + \cdots - (2\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0)\,.$$

Comme $\alpha_n \neq 0$, on a nécessairement $n = 2$.

2. D'après la question précédente, on peut rechercher les solutions polynomiales non nulles de (E_0) sous la forme $t \mapsto P(t)$ avec P de la forme :

$$P = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \quad \text{avec} \quad \alpha_2 \neq 0.$$

En reportant dans l'équation (E_0) et, par unicité des coefficients, on obtient que $t \mapsto P(t)$ est solution de (E_0) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_0 = -\alpha_2. \end{cases}$$

Par suite, et comme la fonction nulle est également solution, les solutions polynomiales de (E_0) sont les fonctions :

$$t \mapsto \lambda\,(t^2 - 1) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15

1. - Dans un premier temps, supposons que φ soit une solution de (E_0) développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.
   Pour $t \in\,]-r, r[$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

En injectant dans l'équation (E_0), on a, pour tout $t \in]-r, r[$:

$$4\,t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0.$$

puis en réindexant les sommes pour obtenir dans chacune d'entre elles des termes en t^n :

$$4 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}\, t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}\, t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0,$$

ce qui donne, en regroupant les sommes :

$$(2\,a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n\big)t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0. \qquad (\star)$$

Il en résulte facilement que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{(2n)!}\, a_0,$$

ce qui donne :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

- Réciproquement :
  - ∗ le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{t^n}{(2n)!}$ vaut $+\infty$ (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
  - ∗ la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!} \end{array}$

    est telle que ses coefficients vérifient la propriété $(\star)$, et par suite, d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement, φ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $\varphi(0) = 1$, cela répond à la question.

2. (a) Pour $t > 0$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(\sqrt{t}\,\big)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\big(\sqrt{t}\,\big).$$

(b) Il est naturel de tester la fonction $t \mapsto \operatorname{sh}\big(\sqrt{t}\,\big)$, dont on constate qu'elle est solution de (E_0) sur $]0, +\infty[$.

- D'une part, les fonctions $t \mapsto \operatorname{ch}\big(\sqrt{t}\,\big)$ et $t \mapsto \operatorname{sh}\big(\sqrt{t}\,\big)$ forment une famille libre dans l'espace $\mathcal{F}\big(]0, +\infty[, \mathbb{R}\big)$. En effet, si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$\forall t > 0 \quad \lambda_1 \operatorname{ch}\big(\sqrt{t}\,\big) + \lambda_2 \operatorname{sh}\big(\sqrt{t}\,\big) = 0,$$

  alors en considérant la limite quand $t \to 0^+$, on obtient $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$ en prenant n'importe quelle autre valeur de t.

- D'autre part, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation (E_0) se met sous forme résolue :
$$(E_0)\ :\ x''+\frac{x'}{2t}-\frac{x}{4t}=0.$$
Par suite, sur cet intervalle, l'espace solution est de dimension 2.

Ainsi, les deux fonctions $t\mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)$ et $t\mapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)$ forment une base de l'espace solution.

3. (a) Pour $t<0$, on a :
$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-t}\right)^{2n}}{(2n)!}=\cos\left(\sqrt{-t}\right).$$

(b) De même, on peut vérifier que la fonction $t\mapsto \sin\left(\sqrt{-t}\right)$ est solution de (E_0) sur $]-\infty,0[$. On conclut, par les mêmes arguments qu'en 2b, que les fonctions $t\mapsto \cos\left(\sqrt{-t}\right)$ et $t\mapsto \sin\left(\sqrt{-t}\right)$ forment une base de l'espace solution de (E_0) sur $]-\infty,0[$.

Exercice 16 La fonction $\varphi_0 : t\mapsto t$ est solution de l'équation homogène.

Cherchons une solution particulière sous la forme $\varphi=\lambda\,\varphi_0$ avec λ une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En injectant dans l'équation (E), on obtient que φ est solution de (E) si, et seulement si, λ' est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
$$(\widetilde{E})\ :\ t\,y'+3\,y=\frac{4\ln t}{t}$$
qui s'écrit sous forme résolue :
$$(\widetilde{E})\ :\ y'+\frac{3}{t}\,y=\frac{4\ln t}{t^2}\cdot$$
Les solutions de l'équation $(\widetilde{E})$ (obtenues en résolvant l'équation homogène puis en appliquant la méthode de variation de la constante vue en première année) sont les fonctions :
$$t\mapsto 2\,\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}+\frac{k}{t^3}\quad\text{avec}\quad k\in\mathbb{R}.$$
En primitivant, on obtient que la fonction $\varphi=\lambda\,\varphi_0$ est solution de (E) si, et seulement si, λ est de la forme :
$$\lambda(t)=\ln^2 t-\ln t+\frac{k}{t^2}+\ell\quad\text{avec}\quad(k,\ell)\in\mathbb{R}^2.$$
En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions :
$$t\mapsto t\ln^2 t-t\ln t+\frac{k}{t}+\ell\,t\quad\text{avec}\quad(k,\ell)\in\mathbb{R}^2.$$
On distingue dans cette forme des solutions :

- une base de l'espace des solutions de l'équation homogène : $\left(t\mapsto t,\ t\mapsto\dfrac{1}{t}\right)$;
- une solution particulière : $t\mapsto t\ln^2 t-t\ln t$.

Exercice 17

- *Analyse.* Soit f une solution de (E).
  - ∗ Considérons la fonction :

$$g \; : \; \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & f(\tan u). \end{array}$$

Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, g est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Fixons $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a, en notant $t = \tan u$:

$$g'(u) = (1+t^2)\, f'(t)$$

et

$$g''(u) = (1+t^2)^2\, f''(t) + 2\,t\,(1+t^2)\, f'(t),$$

et l'on constate que :

$$g''(u) + 2\,g'(u) + g(u) = (1+t^2)^2\, f''(t) + 2\,(t+1)(1+t^2)\, f'(t) + f(t).$$

En utilisant le fait que f est solution de (E), on obtient :

$$g''(u) + 2\,g'(u) + g(u) = 0,$$

et donc fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\widetilde{\mathrm{E}}) \; : \; x'' + 2x' + x = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait résoudre. On en déduit l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g(u) = (a\,u + b)\,e^{-u}.$$

  - ∗ Revenons sur la fonction f. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(t) = f\big(\tan(\operatorname{Arctan} t)\big) = g(\operatorname{Arctan} t).$$

Par suite, on obtient l'expression suivante de $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \big(a \operatorname{Arctan} t + b\big)\, e^{-\operatorname{Arctan} t}.$$

Remarque Pour obtenir l'expression de $f(t)$ à partir de celle de $g(u)$, on a exprimé u en fonction de t, ce que l'on a pu faire car le changement de variable $t = \tan u$ est bijectif.

- *Synthèse.* Réciproquement, on peut vérifier que toute fonction f de la forme ci-dessus est bien solution de (E).

Remarque Pour justifier la partie synthèse sans calculs, on peut remarquer que, d'après la partie « analyse » du raisonnement, on a :

$$\mathcal{S}_0 \subset \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 = t \mapsto e^{-\operatorname{Arctan} t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t) e^{-\operatorname{Arctan} t}.$$

Comme l'équation est linéaire homogène d'ordre 2 et peut être mise sous forme résolue, on a $\dim \mathcal{S}_0 = 2$. L'inclusion précédente est donc une égalité.

Exercice 18

1. Sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, l'équation se met sous forme résolue.
   - Sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions :
$$t \mapsto \lambda\, t^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   - Sur $]0, +\infty[$, les solutions sont les fonctions :
$$t \mapsto \mu\, t^2 + t^3 \qquad \text{avec} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
Elle est solution sur $]-\infty, 0[$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t < 0 \quad \varphi(t) = \lambda\, t^2 + t^3.$$
De même, φ est solution sur $]0, +\infty[$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t > 0 \quad \varphi(t) = \mu\, t^2 + t^3.$$
En exploitant le fait que φ vérifie l'équation en 0, on obtient $\varphi(0) = 0$.
On a donc la forme recherchée pour φ :
$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu\, t^2 + t^3 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

   Remarque Pour obtenir $\varphi(0) = 0$, plutôt que d'évaluer l'équation en 0, on aurait pu évoquer la continuité de φ en 0 et obtenir $\varphi(0) = 0$ par passage à la limite.

3. Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme :
$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu\, t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
Montrons que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   - Cette fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est manifestement solution de l'équation (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   - On voit rapidement que φ est de plus continue en 0.
   - Pour tout $t < 0$, on a $\varphi'(t) = 2\lambda t + 3t^2$. On a donc $\varphi'(t) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que φ est dérivable à gauche en 0 avec $\varphi'_g(0) = 0$ d'après le théorème de limite de la dérivée.
De même, on montre que φ est dérivable à droite en 0 et que $\varphi'_d(0) = 0$. Comme $\varphi'_g(0) = \varphi'_d(0)$, la fonction φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.
   - Enfin, on a l'égalité $0\,\varphi'(0) - 2\varphi(0) = 0$, donc φ vérifie l'équation différentielle en 0.

   La fonction φ est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

- Tout d'abord, l'équation se met sous forme résolue sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:
  - $*$ sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont $t \mapsto \lambda e^{-1/t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$;
  - $*$ sur $]0, +\infty[$, les solutions sont $t \mapsto \mu e^{-1/t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - $*$ *Analyse.* Soit φ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
    - $\star$ Tout d'abord, φ est solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) = \lambda\, e^{-1/t} \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_-^* \quad \varphi(t) = \mu\, e^{-1/t}.$$
    - $\star$ De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue. En particulier, φ est continue en 0, et donc possède une limite finie à gauche en 0.
Comme $\lim\limits_{t \to 0^-} e^{-1/t} = +\infty$, on a nécessairement $\mu = 0$.
La fonction φ vérifie donc :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ \lambda\, e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$
  - $*$ *Synthèse.* Réciproquement, supposons φ de la forme ci-dessus.
    - $\star$ La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
    - $\star$ Puisque $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \leqslant 0$, la fonction φ est dérivable à gauche en 0 et $\varphi'_g(0) = 0$.
    - $\star$ Puisque $\varphi'(t) = \mu \dfrac{e^{-1/t}}{t^2}$ pour tout $t > 0$, on a, par croissances comparées, $\varphi'(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Comme φ est continue en 0, on déduit du théorème de limite de la dérivée que φ est dérivable à droite en 0 avec $\varphi'_d(0) = 0$.
    - $\star$ Comme $\varphi'_g(0) = \varphi'_d(0)$, la fonction φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.
    - $\star$ Enfin, il est facile de constater que φ vérifie l'équation en 0.

    Par suite, φ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20

- Tout d'abord, on constate que l'équation se résout facilement sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ où elle se met sous forme résolue :
  - $*$ sur $]-\infty, 1[$, les solutions sont :
$$t \mapsto \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}\ ;$$
  - $*$ sur $]1, +\infty[$, les solutions sont :
$$t \mapsto \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - *Analyse.* Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$.
    - Tout d'abord, φ est solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et sur l'intervalle $]1, +\infty[$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t > 1 \quad \varphi(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} \qquad \text{et} \qquad \forall t < 1 \quad \varphi(t) = \frac{\mu + t^2}{2(1-t)}\cdot$$

    - De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue. En particulier, φ est continue en 1, et donc possède une limite finie en 1.
      Cela impose d'avoir $\lambda = \mu = -1$. On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{t+1}{2},$$

      et donc, par continuité en 0 :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = -\frac{t+1}{2}\cdot$$

  - *Synthèse.* Réciproquement, il est immédiat que la fonction :

$$\varphi : t \mapsto -\frac{t+1}{2}$$

    est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21

- *Analyse.* Soit φ une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
  - Comme φ est solution de (E_0) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \cos\left(\sqrt{-t}\right) & + \quad \lambda_2 \sin\left(\sqrt{-t}\right) \quad \text{si} \quad t < 0 \\ \mu_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) & + \quad \mu_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) \quad \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

  - La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue en 0.
    On a ainsi :

$$\varphi(0) = \lim_{0^-} \varphi = \lim_{0^+} \varphi, \quad \text{et donc} \quad \varphi(0) = \lambda_1 = \mu_1.$$

  - La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0.

    - Pour tout $t > 0$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\mu_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}} + \frac{\mu_2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}\cdot$$

      Si μ_2 n'était pas nul, alors on aurait $\varphi'(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \pm\infty$ (selon le signe de μ_2).
      Cela impliquerait, d'après le théorème de la limite de la dérivée, que le taux d'accroissement de φ en 0 tendrait vers $\pm\infty$ en 0^+, ce qui contredirait la dérivabilité à droite de φ en 0. Donc $\mu_2 = 0$.

⋆ Pour tout $t < 0$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda_1 \sin\left(\sqrt{-t}\right)}{2\sqrt{-t}} - \frac{\lambda_2 \cos\left(\sqrt{-t}\right)}{2\sqrt{-t}}.$$

Si λ_2 n'était pas nul, alors on aurait $\varphi'(t) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} \pm\infty$ (selon le signe de λ_2).
Cela impliquerait, d'après le théorème de la limite de la dérivée, que le taux d'accroissement de φ en 0 divergerait vers $\pm\infty$ en 0^-, ce qui contredirait la dérivabilité à gauche de φ en 0. Donc $\lambda_2 = 0$.

∗ On obtient que :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \cos\left(\sqrt{-t}\right) & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

et donc finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \lambda_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

- *Synthèse.* Réciproquement, toutes les fonctions de la forme précédente sont solutions de (E_0) : ce sont les solutions développables en série entière déjà obtenues à l'exercice 15 de la page 760.

S'entraîner et approfondir

13.1 Ordre 2 à coefficients constants

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. (E) : $x'' - 3x' + 2x = \sin(t)$,
2. (E) : $x'' - 2x' + x = \operatorname{ch}(t)$.

13.2 Résoudre sur $I =]-1, 1[$ l'équation réelle :

$$4\,(1-t^2)\,x'' - 4\,t\,x' + x = 0. \qquad \text{(E)}$$

On cherchera des solutions développables en série entière.

13.3 Équation d'Airy

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \ : \ y'' - xy = 0$$

Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

13.4 Soit $p : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $q : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable et ne s'annulant pas, telle que l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \ : \ x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$$

se traduise, sur la fonction $z = \dfrac{x}{\alpha}$, en une équation du type :

$$(\widetilde{\text{E}}) \ : \ z'' + r(t)\,z = 0 \quad \text{avec } r : I \to \mathbb{K} \text{ continue.}$$

13.5 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée. On souhaite prouver que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \ : \ y'' + y = g$$

est bornée. Soit f une telle solution.

1. Montrer qu'il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sin(t)\left(k_1 + \int_0^t \cos(u)g(u)\mathrm{d}u\right) + \cos(t)\left(k_2 - \int_0^t \sin(u)g(u)\mathrm{d}u\right).$$

2. Montrer que f est bornée.

⋆ **13.6** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + f$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

Indication : on pourra poser $g = f' + f$, et voir alors f comme une solution de l'équation différentielle $y' + y = g$.

13.7 Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On s'intéresse à une équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0 \quad \text{avec} \quad a_1 : I \to \mathbb{K} \quad \text{et} \quad a_0 : I \to \mathbb{K} \text{ continues.}$$

Soit φ_1 et φ_2 deux solutions de (E_0). On appelle **wronskien** de la famille (φ_1, φ_2) l'application :

$$\begin{array}{rccl} W_{\varphi_1,\varphi_2} : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Montrer que le wronskien W_{φ_1,φ_2} est solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)\,x = 0.$$

2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$;
   - (ii) $\exists t \in I \quad W(t) \neq 0$;
   - (iii) $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$.
3. *Application.* Justifier que les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $\varphi_2 : t \mapsto t$ ne sont pas solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire homogène de la forme :

$$x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0 \quad \text{avec } a_1 \text{ et } a_0 \text{ continues sur } \mathbb{R}.$$

⋆ **13.8** Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' + q(t)\,y = 0.$$

Soit u et v deux solutions de (E) linéairement indépendantes.

1. Notons Z_u l'ensemble des zéros (*i.e.* des points d'annulation) de u.
   Montrer que tout point de Z_u est isolé, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall t_0 \in Z_u \quad \exists r > 0 \quad Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}.$$

2. Soit t_0 un point d'annulation de u. Supposons que u s'annule sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$. Montrer qu'il est licite de considérer t_1 le plus petit point d'annulation de u sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$.
3. (a) Montrer que la fonction $W = u\,v' - u'\,v$ est constante et n'est pas l'application nulle.
   On pourra utiliser les questions 1 et 2 de l'exercice 13.7.

   (b) Montrer que, sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, v s'annule une et une seule fois.

13.9 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, n un entier naturel non nul, ainsi que $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} = 0. \qquad \text{(E)}$$

Une telle équation différentielle est dite *linéaire scalaire homogène d'ordre* n.

1. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Trouver une application $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ permettant de traduire l'équation (E) à l'aide d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$X' = A(t)\, X. \qquad \text{(S)}$$

On donnera rigoureusement le lien entre les solutions de (E) et celles de (S).

(b) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension n.

2. Dans cette question on suppose que les fonctions $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont constantes.

(a) Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_0) si, et seulement si, λ est racine du polynôme :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

(b) En déduire que si le polynôme P est scindé à racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_0) est :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\right).$$

13.10 Considérons un système différentiel linéaire homogène :

$$(\mathrm{S}_0) \ : \ X' = A(t)\, X \quad \text{avec} \quad A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ continue.}$$

On note $\mathcal{S}_0$ l'espace des solutions du système différentiel S_0.
Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des solutions de l'équation homogène (S_0).
Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$;

(*ii*) il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $\big(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)\big)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$;

(*iii*) pour tout $t \in I$, la famille $\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

13.11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 8y & + & e^t \\ y' & = & 2x & + & y & & \end{array} \right.$$

On pourra écrire sous la forme $X' = AX + B(t)$ et réduire la matrice A pour se ramener à un système plus simple.

13.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel (S) : $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & z \\ z' & = & x \end{array} \right.$

13.13 Résoudre le système réel :

$$(\mathrm{S})\ :\ \begin{cases} x' = x - ty + t\,e^t \\ y' = tx + y \end{cases} \qquad (1)$$

On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par $x+iy$.

13.14 Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}.$$

13.15 Soit A une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et φ une solution réelle non nulle sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$X' = AX$$

Montrer que l'application $t \mapsto \|\varphi(t)\|$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (la norme $\|\cdot\|$ désignant la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$).

★ **13.16** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que le système différentiel homogène

$$(\mathrm{S})\ :\ X' = A(t)\,X$$

admet une solution non nulle φ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+T) = \lambda\,\varphi(t).$$

13.17 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' = x^4 y$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet que $\dfrac{1}{f^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction :

$$g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}$$

   est aussi solution de l'équation (E).
3. Montrer le résultat admis à la question précédente.

13.18 On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right)\sin x.$$

1. Établir, pour tout $x > 0$, la convergence des intégrales :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}\cdot$
3. En déduire que $f = g$ et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Solution des exercices

13.1 Les deux équations de cet exercice sont des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. On cherche à les résoudre sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. • L'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$ possède deux solutions distinctes : 1 et 2. Ainsi l'espace des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_0=\mathrm{Vect}(t\mapsto e^t, t\mapsto e^{2t}).$$

• Le second membre s'écrit $\sin(t)=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot$

Donc, si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$(\mathrm{E}_1) : x''-3x'+2x=e^{it} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_2) : x''-3x'+2x=e^{-it},$$

alors la fonction $\varphi=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2i}$ est solution de (E).

∗ Comme i n'est pas solution de l'équation caractéristique, l'équation (E_1) possède une solution de la forme $t\mapsto ke^{it}$ avec $k\in\mathbb{C}$. On obtient que :

$$\varphi_1 : t\mapsto \frac{1+3i}{10}\,e^{it}$$

est solution.

∗ On observe que la fonction $\varphi_2=\overline{\varphi_1}$ est solutions de (E_2).

On obtient finalement comme solution de (E) la fonction φ définie par :

$$\varphi(t)=\mathrm{Im}\big(\varphi_1(t)\big)=\frac{3}{10}\cos(t)+\frac{1}{10}\sin(t).$$

• En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$t\mapsto \frac{3}{10}\cos(t)+\frac{1}{10}\sin(t)+\lambda\,e^t+\mu\,e^{2t} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

2. • L'équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ possède 1 comme solution double. Ainsi l'espace des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_0=\mathrm{Vect}(t\mapsto e^t, t\mapsto t\,e^t).$$

• Le second membre s'écrit $\mathrm{ch}(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$. Donc, si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$(\mathrm{E}_1) : x''-2x'+x=e^t \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_2) : x''-2x'+x=e^{-t},$$

alors la fonction $\varphi=\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ est solution de (E).

∗ Comme 1 est solution double de l'équation caractéristique, l'équation (E_1) possède une solution de la forme $t\mapsto k\,t^2\,e^t$ avec $k\in\mathbb{R}$. On obtient que :

$$\varphi_1 : t\mapsto \frac{t^2}{2}\,e^t$$

est solution.

- $*$ Comme -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, l'équation (E_2) possède une solution de la forme $t \mapsto ke^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$. On obtient que :
$$\varphi_1 : t \mapsto \frac{1}{4}\, e^{-t}$$
est solution.

On obtient finalement comme solution de (E) la fonction φ définie par :
$$\varphi(t) = \frac{t^2}{4}\, e^t + \frac{1}{8}\, e^{-t}.$$

- En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions :
$$t \mapsto \frac{1}{8}\, e^{-t} + \left(\lambda + \mu\, t + \frac{t^2}{4}\right) e^t \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

13.2 • Commençons par chercher les solutions de (E) développables en série entière.

$*$ *Analyse.* Soit φ une solution de (E) sur $]-1,1[$, somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $t \in\,]-1,1[\, \cap\,]-R,R[$, on a :
$$4\left(1 - t^2\right) \varphi''(t) - 4\, t\, \varphi'(t) + \varphi(t) = 0,$$
ce qui donne, en remplaçant $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ par leurs développements en série entière et après arrangement du calcul :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2 - 1)a_n\Big)\, t^n = 0.$$
Par unicité du développement en série entière, l'égalité précédente se traduit par le fait que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} 4(n+2)(n+1)\, a_{n+2} &= (2n-1)(2n+1)\, a_n \qquad (\star)\\ &= (1-2n)(1-2n-2)\, a_n \end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = \left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) a_n$$
ou encore, en notant $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $a_{n+2} = \dfrac{(\alpha - n)(\alpha - n - 1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n\,.$

On obtient ainsi, en distinguant les valeurs paires et impaires (et en utilisant les coefficients binomiaux généralisés) :
$$a_{2n} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)\cdots(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+1)}{(2n)!}\, a_0 = \binom{\alpha}{2n} a_0$$
$$a_{2n+1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+1)(\alpha-2n)}{(2n+1)!}\, a_1 = \frac{1}{\alpha}\binom{\alpha}{2n+1} a_1.$$
Il en résulte que pour tout $t \in\,]-1,1[\cap]-R,R[$, on a $\varphi(t) = a_0\, \varphi_1(t) + \dfrac{a_1}{\alpha}\, \varphi_2(t)$
$$\text{avec} \qquad \varphi_1 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{2n} t^{2n} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{2n+1} t^{2n+1}$$

* *Synthèse.* Réciproquement, les fonctions φ_1 et φ_2 sont bien définies sur $]-1,1[$, car le rayon de convergence des séries entières considérées vaut 1 (grâce à la règle de d'Alembert) et leurs coefficients vérifient la relation de récurrence $(\star)$. Ainsi, φ_1 et φ_2 sont bien solutions de (E) sur $]-1,1[$.

• L'équation (E) est d'ordre 2, à coefficients continus, et se met sous forme résolue sur l'intervalle $]-1,1[$; on a donc $\dim \mathcal{S}_{\mathrm{E}} = 2$. On sait de plus, d'après la proposition 10 de la page 755, que l'application :

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_{\mathrm{E}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(0), \varphi'(0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

On a de plus $\big(\varphi_1(0), \varphi_1'(0)\big) = (1,0)$ et $\big(\varphi_2(0), \varphi_2'(0)\big) = (0,1/2)$.

Autrement dit, on a $\varphi_1 = \psi^{-1}\big((1,0)\big)$ et $\varphi_2 = \psi^{-1}\big((0,1/2)\big)$. Comme la famille $\big((1,0),(0,1/2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il en résulte que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$, ce qui conclut la résolution de (E) :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Remarque On peut simplifier le résultat en remarquant que pour $t \in\,]-1,1[$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} t^n \quad \text{et} \quad (\varphi_1 - \varphi_2)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} t^n$$

autrement dit :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \sqrt{1+t} \quad \text{et} \quad (\varphi_1 - \varphi_2)(t) = \sqrt{1-t}$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+t}$ et $t \mapsto \sqrt{1-t}$ étant linéairement indépendantes, on a :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\Big(t \mapsto \sqrt{1+t}\,,\, t \mapsto \sqrt{1-t}\Big).$$

13.3 • Remarquons tout d'abord que l'équation (E) est une équation linéaire scalaire homogène d'ordre 2, à coefficients continus, et écrite sous forme résolue, donc son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Ainsi, pour prouver que toutes les solutions sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'il en existe deux linéairement indépendantes.

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$ s'écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, après simplification :

$$f''(x) - x f(x) = 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n\big) x^{n+1}.$$

Par unicité du développement en série entière, une telle fonction f est donc solution de l'équation (E) si, et seulement si, la suite (a_n) vérifie :

$$a_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0. \qquad (\star)$$

On peut constater qu'une telle suite (a_n) est entièrement caractérisée par ses deux premiers termes a_0 et a_1 et que tous les termes de la forme a_{3n+2} sont nuls.

- Nous sommes alors en mesure d'expliciter deux solutions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 développables en série entière sur $\mathbb{R}$.
  - ∗ Considérons la suite (α_n) définie par :
  $$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+3} = \frac{\alpha_n}{(n+3)(n+2)}.$$
  On a alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{3n+1} = \alpha_{3n+2} = 0.$$
  Posons, lorsque c'est possible :
  $$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{3n} x^{3n}.$$
  La relation de récurrence vérifiée par la suite (α_n) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
  $$\left| \frac{\alpha_{3n+3}\, x^{3n+3}}{\alpha_{3n}\, x^{3n}} \right| = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
  La règle de d'Alembert assure alors que la série entière $\sum \alpha_{3n} t^{3n}$ a un rayon de convergence valant $+\infty$. La fonction φ_1 est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, et est donc une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
  - ∗ De la même manière, si l'on pose :
  $$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+3} = \frac{\beta_n}{(n+3)(n+2)},$$
  alors la fonction $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{3n+1} x^{3n+1} \end{array}$

  est une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
  - ∗ On a $\big(\varphi_1(0), \varphi_1'(0)\big) = (1, 0)$ et $\big(\varphi_2(0), \varphi_2'(0)\big) = (0, 1)$.
  Autrement dit, on a $\varphi_1 = \psi^{-1}\big((1,0)\big)$ et $\varphi_2 = \psi^{-1}\big((0,1)\big)$, où ψ est l'isomorphisme :
  $$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathrm{E}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(0), \varphi'(0)\big). \end{array}$$
  Comme la famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il en résulte que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$, ce qui conclut la résolution de (E) :
  $$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

13.4 Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ est une fonction deux fois dérivable ne s'annulant pas, alors la fonction $\psi = \dfrac{\varphi}{\alpha}$ est deux fois dérivable si, et seulement si, φ l'est, et l'on a alors :
$$\varphi' = \alpha'\, \psi + \alpha\, \psi' \qquad \text{et} \qquad \varphi'' = \alpha''\, \psi + 2\, \alpha'\, \psi' + \alpha\, \psi''.$$
On obtient alors que φ est solution de (E) si, et seulement si, ψ vérifie :
$$\forall t \in I \quad \alpha(t)\psi''(t) + \big(2\alpha'(t) + p(t)\alpha(t)\big)\psi'(t) + \big(\alpha''(t) + p(t)\, \alpha'(t) + q(t)\alpha(t)\big)\psi(t) = 0.$$
Choisissons alors pour α une solution non nulle de l'équation d'ordre 1 :
$$y' + \frac{p(t)}{2} y = 0.$$

Une telle fonction α ne s'annule pas sur I et, puisque p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Alors, les solutions φ de l'équation :

$$(\mathrm{E}) : x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$$

sont toutes les fonctions $\varphi : t \mapsto \alpha(t)\psi(t)$ où ψ est solution de l'équation :

$$z'' + r(t)\,z = 0 \quad \text{avec} \quad r = \frac{\alpha'' + p\,\alpha' + q\,\alpha}{\alpha}\cdot$$

Comme p et q sont continues et α de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction r est continue.

13.5 1. L'espace des solutions de l'équation homogène $(\mathrm{E}_0) : y'' + y = 0$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\sin, \cos).$$

Considérons la fonction :

$$\varphi : t \mapsto \sin(t)\int_0^t \cos(u)g(u)\mathrm{d}u - \cos(t)\int_0^t \sin(u)g(u)\mathrm{d}u.$$

Si l'on montre que φ est solution de (E), alors on pourra affirmer que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \varphi + \mathrm{Vect}(\sin, \cos),$$

ce qui donnera l'expression souhaitée pour f.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \cos(t)\int_0^t \cos(u)g(u)\mathrm{d}u + \sin(t)\int_0^t \sin(u)g(u)\mathrm{d}u.$$

La fonction φ' est donc encore dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on obtient après simplification :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''(t) = -\varphi(t) + g(t),$$

ce qui prouve que φ est bien solution de (E).

2. Comme les fonctions sin et cos sont bornées sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\bigl|\varphi(t)\bigr| \leqslant \left|\int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\right|.$$

Pour conclure que φ est bornée, il suffit donc de prouver que les fonctions :

$$t \mapsto \int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u$$

le sont. Cela revient, en prenant les parties réelle et imaginaire, à prouver que la fonction suivante est bornée :

$$h : t \mapsto \int_0^t e^{iu}\,g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} h(t) &= \Bigl[-ie^{iu}\,g(u)\Bigr]_0^t + i\int_0^t e^{iu}\,g'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= ig(0) - ie^{it}\,g(t) + i\int_0^t e^{iu}\,g'(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Comme g est croissante, sa dérivée g' est à valeurs positives. Comme g est bornée, les fonctions :

$$x \mapsto \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = g(x) - g(0) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \int_x^0 g'(t)\mathrm{d}t = g(0) - g(x)$$

le sont aussi, et donc, comme elles sont respectivement croissante et décroissante, elles possèdent une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement. Il en résulte que la fonction g' est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, donc, comme elle est à valeurs positive, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto e^{it}\, g'(t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque de module égal à g', et donc la fonction :

$$t \mapsto \int_0^t e^{iu}\, g'(u)\mathrm{d}u$$

est bornée. Ainsi, l'expression obtenue précédemment pour $h(t)$ prouve que la fonction h est bornée.

13.6 Comme $f + f' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour obtenir les deux limites $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit d'en prouver une seule. Montrons que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notons $g = f + f'$. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y' + y = g.$$

En résolvant l'équation (E), on obtient l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \alpha\, e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^u\, g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\alpha e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il reste à prouver que $e^{-t} \displaystyle\int_0^t e^u\, g(u)\,\mathrm{d}u \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Notons $H(t)$ cette quantité et prouvons que $H \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ en revenant à la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \geqslant t_0 \quad \big|H(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $g \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que :

$$\forall u \geqslant t_1 \quad \big|g(u)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $t \geqslant t_1$, on a :

$$H(t) = \underbrace{e^{-t} \int_0^{t_1} e^u g(u)\mathrm{d}u}_{=H_1(t)} + \underbrace{e^{-t} \int_{t_1}^t e^u g(u)\mathrm{d}u}_{=H_2(t)}.$$

- Il est clair que $H_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, il existe $t_0 \geqslant t_1$ tel que :

$$\forall t \geqslant t_0 \quad |H_1(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Pour $t \geqslant t_0$, on a *a fortiori* $t \geqslant t_1$, donc :
$$\forall u \in [t_1, t] \quad \left|e^u g(u)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, e^u$$
puis, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :
$$\left|\int_{t_1}^{t} e^u g(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{t_1}^{t} \left|e^u g(u)\right|\mathrm{d}u = \int_{t_1}^{t} \frac{\varepsilon}{2}\, e^u \mathrm{d}u = \frac{\varepsilon}{2}\,(e^t - 1)$$
et donc $\left|H_2(t)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$

Il en résulte que pour tout $t \geqslant t_0$:
$$|H(t)| \leqslant |H_1(t)| + |H_2(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
D'où le résultat.

13.7 1. L'expression obtenue pour la dérivée du wronskien de (φ_1, φ_2) est :
$$W'_{\varphi_1,\varphi_2} = \varphi_1\, \varphi_2'' - \varphi_1''\, \varphi_2,$$
et donc, puisque φ_1 et φ_2 sont solutions de (E_0) :
$$\begin{aligned} W'_{\varphi_1,\varphi_2} &= \varphi_1 \big(- a_1\, \varphi_2' - a_0\, \varphi_2\big) - \big(- a_1\, \varphi_1' - a_0\, \varphi_1\big)\, \varphi_2 \\ &= -a_1 \big(\varphi_1\, \varphi_2' - \varphi_1'\, \varphi_2\big) \\ &= -a_1\, W_{\varphi_1,\varphi_2}, \end{aligned}$$
et donc W_{φ_1,φ_2} est solution de l'équation $x' + a_1(t)\, x = 0$.

2.
- $(iii) \implies (ii)$. Évident.
- $(ii) \implies (i)$. Par la contraposée. Supposons que (φ_1, φ_2) ne soit pas une base de $\mathcal{S}_0$. Comme $\mathcal{S}_0$ est de dimension 2, cela entraîne que φ_1 et φ_2 forment une famille liée.
  Les applications $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ forment alors elles aussi une famille liée, et l'on obtient la négation de l'assertion (ii) :
$$\forall t \in I \quad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = 0.$$
- $(i) \implies (iii)$. Supposons que (φ_1, φ_2) soit une base de $\mathcal{S}_0$. Soit $t_0 \in I$.
  Par le théorème de Cauchy linéaire, on sait que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe une solution ψ de (E_0) vérifiant :
$$\begin{pmatrix} \psi(t_0) \\ \psi'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
  Comme (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$, on peut écrire $\psi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, ce qui donne, en évaluant en t_0 :
$$\lambda \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice et donc une base de $\mathbb{K}^2$.

Le déterminant de cette famille, qui n'est rien d'autre que $W(t_0)$, est donc non nul.

3. Si une telle équation différentielle existait, alors les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto t$, puisqu'elles ne sont pas proportionnelles, formeraient une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions. Et alors, d'après la question précédente, leur wronskien W ne s'annulerait pas sur $\mathbb{R}$. Or ce wronskien est donné par :
$$W(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t) = \cos t + t\,\sin t,$$
et le théorème des valeurs intermédiaires assure que W s'annule en au moins un point de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ puisque $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ et $W(\pi) = -1 < 0$.

13.8 1. Soit $t_0 \in Z_u$. Comme $u(t_0) = 0$ et que u n'est pas l'application nulle (car sinon la famille (u, v) serait liée), on a $u'(t_0) \neq 0$. En effet, si $u'(t_0)$ était nul, alors u et l'application nulle seraient solutions du même problème de Cauchy :
$$y'' + q(t)\,y = 0 \qquad \text{et} \qquad \big(y(t_0), y'(t_0)\big) = (0, 0)$$
et alors la partie « unicité » du théorème de Cauchy linéaire donnerait $u = 0$.

Comme la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier au point t_0, d'où :
$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \underset{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}}{\longrightarrow} u'(t_0)$$
autrement dit, comme $u(t_0) = 0$:
$$\frac{u(t)}{t - t_0} \underset{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}}{\longrightarrow} u'(t_0).$$
Comme $u'(t_0) \neq 0$, la limite précédente assure qu'il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \cap [t_0 - r, t_0 + r] \setminus \{t_0\} \quad u(t) \neq 0.$$
Cela prouve le résultat souhaité car un tel $r > 0$ vérifie :
$$Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}.$$

2. Notons A l'ensemble des points d'annulation de u sur $]t_0, +\infty[$:
$$A = Z_u \cap \,]t_0, +\infty[.$$
Montrons que A admet un plus petit élément. L'ensemble A est une partie non vide (car u s'annule sur $]t_0, +\infty[$) et minorée (par t_0) de $\mathbb{R}$, donc possède une borne inférieure.

Notons $t_1 = \inf(A)$ et montrons que $t_1 \in A$. Pour cela, il suffit de justifier que A est une partie fermée de $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on peut considérer $r > 0$ tel que $Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}$. On a alors :
$$A = Z_u \cap [t_0 + r, +\infty[.$$
Puisque $Z_u = u^{-1}(\{0\})$ et que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, Z_u est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Comme l'intervalle $[t_0 + r, +\infty[$ est également une partie fermée de $\mathbb{R}$, A apparaît comme l'intersection de deux parties fermées de $\mathbb{R}$, donc l'est également.

3. (a) • La question 1 de l'exercice 13.7 de la page 784, dans le cas de l'équation différentielle (E) considérée ici, donne $W' = 0$. Comme on travaille sur un intervalle, il en résulte que l'application W est constante.
- Comme les solutions u et v sont linéairement indépendantes, elles forment une base de l'espace des solutions de l'équation homogène (E), la question 2 de l'exercice 13.7 de la page 784 assure que l'application W ne s'annule pas, et donc n'est pas l'application nulle.

(b) Montrons que la fonction v possède un et un seul point d'annulation sur l'intervalle $]t_0, t_1[$.

- **Existence** D'après la question précédente, la fonction $W = u\,v' - u'\,v$ est constante et n'est pas l'application nulle, donc il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t)\,v'(t) - u'(t)\,v(t) = k. \qquad (\star)$$
Comme $u(t_0) = 0$, et u n'étant pas la fonction nulle, on a $u'(t_0) \neq 0$.
De même, comme $u(t_1) = 0$, on a $u'(t_1) \neq 0$. D'autre part, u ne s'annulant pas sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, elle y garde un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
On est donc dans l'une des deux situations suivantes :
  * *Premier cas :* $\forall t \in]t_0, t_1[\quad u(t) > 0$. On a alors :
$$\forall t \in]t_0, t_1[\quad \frac{u(t)}{t - t_0} > 0$$
puis, comme $u'(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{u(t)}{t - t_0}$, on a $u'(t_0) \geqslant 0$ et donc $u'(t_0) > 0$ car $u'(t_0) \neq 0$.
De la même manière, on obtient $u'(t_1) < 0$.
  * *Deuxième cas :* $\forall t \in]t_0, t_1[\quad u(t) < 0$. Alors, de même que précédemment, on obtient $u'(t_0) < 0$ et $u'(t_1) > 0$.

Dans les deux cas, la relation $(\star)$, évaluée en t_0 et en t_1, impose d'avoir :
$$v(t_0)\,v(t_1) < 0.$$
Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que la fonction v s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]t_0, t_1[$.
- **Unicité.** À ce stade de l'exercice, on peut affirmer qu'entre deux zéros consécutifs de u la fonction v s'annule au moins une fois. Les rôles de u et v étant symétriques, on en déduit qu'entre deux zéros consécutifs de v la fonction u s'annule au moins une fois. Donc, si v possédait plusieurs points d'annulation sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, alors la fonction u devrait aussi s'y annuler, ce qui est contradictoire avec la définition de t_1.

13.9 1. (a) Pour $t \in I$, notons :
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

et considérons le système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$(\mathrm{S}) \ : \ X' = A(t)\, X.$$

Soit Φ une application de I dans $\mathbb{K}^n$. Notons $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$.

L'application Φ est dérivable et solution du système différentiel (S) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \varphi_1' & = & \varphi_2 \\ \varphi_2' & = & \varphi_3 \\ & \vdots & \\ \varphi_{n-1}' & = & \varphi_n \\ \varphi_n' & = & -a_0(t)\,\varphi_1 - \cdots - a_{n-1}(t)\,\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

ce qui équivaut au fait que φ_1 est n fois dérivable, avec :

$$\forall k \in [\![2, n]\!] \quad \varphi_k = \varphi_1^{(k)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1^{(n)} + a_{n-1}(t)\,\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)\,\varphi_1 = 0.$$

Autrement dit les solutions du système différentiel (S) sont les applications de la forme $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ avec φ solution de (E).

(b) Notons $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ les ensembles des solutions de (E) et (S) respectivement. On sait d'après le cours que $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ est un espace vectoriel de dimension n.

- L'espace $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel car il contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires (le caractère linéaire de l'équation permet d'obtenir que toute combinaison linéaire de deux solutions de (E) est encore solution).
- En notant Φ l'application $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix}$, il résulte de la question précédente que l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathrm{E}} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{\mathrm{S}} \\ \varphi & \longmapsto & \Phi \end{array}$ est bien définie et bijective. On en déduit que les deux espaces $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ ont même dimension, et donc $\dim \mathcal{S}_{\mathrm{E}} = n$.

2. (a) L'équivalence cherchée vient du fait que pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad f_\lambda^{(k)}(t) = \lambda^k\, e^{\lambda t}$$

et donc :

$$f_\lambda^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_\lambda^{(k)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \lambda^k\, e^{\lambda t} = P(\lambda)\, \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}.$$

(b) Supposons que P possède n racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- Il la été vu à la question 1b que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension n.
- D'après la question précédente, toutes les fonctions $f_{\lambda_k} : t \mapsto e^{\lambda_k t}$ sont solutions de (E_0). On a donc :

$$\operatorname{Vect}\left(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\right) \subset \mathcal{S}_0.$$

Comme $\dim \mathcal{S}_0 = n$, pour prouver que l'inclusion précédente est une égalité, il suffit de prouver la liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$.

Si l'on considère une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_{\lambda_k}$ égale à l'application nulle, alors, en dérivant p fois et en évaluant en 0 pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, il vient :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p \, \alpha_k = 0$$

Il apparaît un système homogène de Vandermonde et, puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde associée est inversible, ce qui assure $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
D'où la liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$.

13.10
- L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est évidente.
- $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons (ii). Soit $t_0 \in I$ tel que la famille $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. En évaluant en t_0 une relation du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t_0) = 0$ et donc, par liberté de la famille $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

  Par suite, la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre. Comme c'est une famille à n éléments et que $\dim \mathcal{S}_0 = n$, c'est une base de $\mathcal{S}_0$.
- $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ soit une base de $\mathcal{S}_0$. Fixons $t \in I$ et montrons que $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Comme $\dim \mathcal{S}_0 = n$, il suffit de prouver le caractère générateur. Soit $a \in \mathbb{K}^n$. Le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence (et l'unicité) d'une solution φ de (E_0) vérifiant la condition initiale $\varphi(t) = a$. Comme $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$, cette solution φ s'écrit $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \varphi_k$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On a alors :

$$a = \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \varphi_k(t).$$

  D'où le caractère générateur de la famille $\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$.

13.11 Le système différentiel (S) s'écrit matriciellement, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$X' = A\,X + B(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de A prouve que A est diagonalisable et que :

$$A = P\,D\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

En notant $Y = P^{-1}\,X$, on a alors :

$$\begin{aligned} X' = A\,X + B(t) &\iff X' = P\,D\,P^{-1}\,X + B(t) \\ &\iff P^{-1}\,X' = D\,P^{-1}\,X + P^{-1}\,B(t) \\ &\iff Y' = D\,Y + P^{-1}\,B(t). \end{aligned}$$

Si l'on trouve les solutions Y du dernier système différentiel ci-dessus, alors, via la relation $X = P\,Y$, on en déduira les solutions du système initial. On a :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}\,B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t}{4} \\ -\dfrac{e^t}{4} \end{pmatrix}.$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, le système différentiel $Y' = D\,Y + P^{-1}\,B(t)$ s'écrit :

$$\begin{cases} y_1' = 5\,y_1 + \dfrac{e^t}{4} \\ y_2' = -3\,y_2 - \dfrac{e^t}{4} \end{cases}$$

Ce système est constitué de deux équations linéaires d'ordre 1 que l'on sait résoudre. Les solutions obtenues sont :

$$Y : t \mapsto -\frac{e^t}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1\,e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\,e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathrm{IR}^2,$$

ce qui donne les solutions du système initial :

$$X : t \mapsto -\frac{e^t}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1\,e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\,e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathrm{IR}^2.$$

13.12 • **Première méthode.** Le système différentiel (S) se traduit matriciellement :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de A montre que :

* $\mathrm{sp}(A) = \{1, j, \overline{j}\}$ (avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) ;

$*$ une base de vecteurs propres associée à $(1, j, \overline{\jmath})$ est $(V_1, V_2, \overline{V_2})$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \overline{\jmath} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ des solutions complexes de (S) est $\big(X_1, X_2, \overline{X_2}\big)$ avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t\, V_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 : t \mapsto e^{jt}\, V_2$$

et une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des solutions réelles est $\big(X_1, \mathrm{Re}(X_2), \mathrm{Im}(X_2)\big)$.
Explicitons $\mathrm{Re}(X_2)$ et $\mathrm{Im}(X_2)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$X_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{-2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ e^{i\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e^{i\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\mathrm{Re}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

- **Deuxième méthode.** Sans traduire matriciellement le système (S), on peut remarquer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution de (S) si, et seulement si :

$$x''' = x \;; \quad y = x' \quad \text{et} \quad z = x''.$$

Autrement dit, les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ avec x vérifiant $x''' = x$.

Reste alors à résoudre l'équation $x''' = x$. Commençons par la résoudre dans $\mathbb{C}$ (il restera alors à prendre les parties réelles des solutions complexes pour obtenir les solutions réelles).
Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3 homogène, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 3 (*cf.* exercice 13.9).
Remarquons que les trois applications :

$$\varphi_1 : t \mapsto e^t \;; \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{j\,t} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto e^{\overline{\jmath}\,t}$$

sont solutions. Il suffit alors de prouver la liberté de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ pour pouvoir affirmer que c'est une base de l'espace des solutions complexes.
Liberté de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Remarquons que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sont des vecteurs propres pour l'application dérivation :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

associés respectivement aux trois valeurs propres deux à deux distinctes 1, j et $\overline{\jmath}$. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donc libre.

13.13 • *Analyse.* Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une solution de (S).
On constate que la fonction $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$ vérifie :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = (1+it)\,\psi(t) + t\,e^t.$$
En résolvant l'équation scalaire d'ordre 1 (résolution de l'équation homogène puis recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante) :
$$z' = (1+it)\,z + t\,e^t,$$
on obtient l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = \alpha \exp\left(t + i\frac{t^2}{2}\right) + i\,e^t.$$
Puisque $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\psi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\psi)$, on obtient (en écrivant α sous forme algébrique $\alpha = a + ib$) :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + ae^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

• *Synthèse.* De la partie « analyse » du raisonnement il résulte que :
$$\mathcal{S} \subset \varphi_P + \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$
avec
$$\varphi_P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$
Comme on sait que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de dimension 2, il en résulte que l'inclusion précédente est une égalité.

13.14 Il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :
$$(E) : y''' - y = e^{pt}$$
dont le caractère linéaire assure que sa résolution revient à la résolution de l'équation homogène et l'obtention d'une solution particulière.

• *Résolution de l'équation homogène* (E_0) : $y''' - y = 0$.
En notant $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$, l'équation (E_0) se traduit matriciellement (*cf.* exercice 13.9 de la page 785) :
$$(\mathrm{EM}) : X' = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Le polynôme caractéristique de la matrice A vaut :
$$\chi_A = X^3 - 1 = (X-1)(X-\jmath)(X-\overline{\jmath}).$$
Par suite, la matrice A est diagonalisable, avec $\mathrm{sp}(A) = \{1, \jmath, \overline{\jmath}\}$. Une base de vecteurs propres est donnée par :
$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_\jmath = \begin{pmatrix} 1 \\ \jmath \\ \overline{\jmath} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{\overline{\jmath}} = \overline{U_\jmath} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\jmath} \\ \jmath \end{pmatrix}.$$

Par suite, une base de l'espace des solutions complexes de l'équation (EM) est la famille $(X_1, X_2, \overline{X_2})$ avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t U_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 : t \mapsto e^{jt} U_j.$$

En appliquant la technique exposée page 751, on obtient alors une base de l'espace des solutions réelles de l'équation (EM) : $\big(X_1, \mathrm{Re}(X_2), \mathrm{Im}(X_2)\big)$. En considérant les premières composantes de ces fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on obtient finalement une base de l'espace des solutions de l'équation (E_0) : $\mathcal{S}_{E_0} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_1 : t \mapsto e^t, \quad f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad f_3 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right).$$

- *Obtention d'une solution particulière.* Cherchons une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto g(t)e^{pt}$ avec g une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
  La formule de Leibniz donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(t) = \big(g^{(3)}(t) + 3pg''(t) + 3p^2 g'(t) + p^3 g(t)\big)\, e^{pt}.$$

  On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt} \Longleftrightarrow g^{(3)}(t) + 3pg''(t) + 3p^2 g'(t) + (p^3 - 1)g(t) = 1. \qquad (\star)$$

  * *Cas* $p \neq 1$. On peut alors prendre pour g la fonction constante égale à $\dfrac{1}{p^3 - 1}$, ce qui nous fournit comme solution particulière $f : t \mapsto \dfrac{e^{pt}}{p^3 - 1}\cdot$
  * *Cas* $p = 1$. La relation $(\star)$ s'écrit alors :

$$f^{(3)}(t) - f(t) = e^t \Longleftrightarrow g^{(3)}(t) + 3g''(t) + 3g'(t) = 1.$$

    On constate que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t}{3}$ convient, ce qui donne comme solution particulière $f : t \mapsto \dfrac{t\,e^t}{3}\cdot$

13.15 Comme A est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(V_1, \ldots, V_n)$ de vecteurs propres de A. Comme $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, les valeurs propres associées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont toutes strictement positives.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons :

$$X_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k. \end{array}$$

La famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est alors une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de $X' = AX$.
Il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, puisque $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\|\varphi(t)\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \, e^{2\lambda_k t}.$$

Les α_k n'étant pas tous nuls et les λ_k étant strictement positifs, la fonction $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.
Puisque la fonction $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$ est de plus continue, elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En composant par la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$, bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on obtient le résultat souhaité.

13.16 Considérons l'application Ψ qui à une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ associe la fonction :

$$\Psi(X) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & X(t+T) \end{array}$$

Comme A est T-périodique, si X est solution de (S), alors $\Psi(X)$ l'est aussi car pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Psi(X)'(t) = X'(t+T) &= A(t+T)\,X(t+T) \\ &= A(t)\,X(t+T) && (T\text{-périodicité de } A) \\ &= A(t)\,\Psi(X)(t) && (\text{par définition de } \Psi) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application Ψ induit un endomorphisme Φ de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (S). Comme $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie (il est de dimension n), cet endomorphisme induit Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Un vecteur propre associé à cette valeur propre λ est une solution non nulle φ de (S) vérifiant :

$$\Psi(\varphi) = \lambda\,\varphi, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+T) = \lambda\,\varphi(t).$$

13.17 1. L'équation différentielle (E) est une équation linéaire du second ordre, à coefficients continus, et apparaissant sous forme résolue. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de Cauchy linéaire assure alors qu'il existe une unique fonction solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

2. • En écrivant :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} - \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}$$

et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)^2}$ est continue, il apparaît que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{f(x)^2}\cdot$

Ainsi, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} - \frac{1}{f(x)}\cdot$$

- À nouveau par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = f''(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}.$$
Comme f est solution de l'équation différentielle (E), on obtient finalement :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = x^4 f(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} = x^4 g(x),$$
ce qui prouve que g est aussi solution de (E).

3. - Commençons par prouver que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
Raisonnons par l'absurde en supposant le contraire. Notons :
$$a = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) = 0\}.$$
Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (x_n) de points d'annulation de f tendant vers a. Par continuité de f, on a alors :
$$f(a) = \lim f(x_n) \quad i.e. \quad f(a) = 0.$$
Par définition de a, la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, a[$.
Comme $f(0) = 1$ et par continuité de f, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que :
$$\forall x \in [0, a[\quad f(x) > 0.$$
Alors, comme f est solution de (E), on obtient : $\forall x \in]0, a[\quad f''(x) > 0$.
La fonction f' est donc croissante sur l'intervalle $[0, a]$ et donc :
$$\forall x \in [0, a] \quad f'(x) \geqslant f'(0) = 1 > 0.$$
La fonction f est donc à son tour croissante sur $[0, a]$, ce qui est contradictoire avec le fait que $f(0) = 1$ et $f(a) = 0$. Nous avons donc prouvé que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, ce qui assure que la fonction $\dfrac{1}{f^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

   - Montrons maintenant que $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
     * Puisque f est continue, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $f(0) = 1 > 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) > 0.$$
Alors, comme f est solution de (E), on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) > 0$, donc la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \geqslant f'(0) = 1.$$
     * L'inégalité des accroissements finis donne alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \geqslant f(0) + x = 1 + x.$$
On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \dfrac{1}{f(x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
L'équivalent $\dfrac{1}{(1+x)^2} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ prouve que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, la fonction $\dfrac{1}{f^2}$ l'est donc aussi.

13.18 1. Soit $x > 0$.

- Les fonctions $u : t \mapsto -\cos t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ et, puisque $uv \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, le crochet $\big[uv\big]_x^{+\infty}$ converge. Par suite, le théorème d'intégration par parties assure que les intégrales :

$$\int_x^{+\infty} u'v = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} uv' = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$$

sont de même nature. Pour tout $t \in [x, +\infty[$, on a $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann, la seconde intégrale est absolument convergente, donc convergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.

- La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$ se montre de la même manière.

2. • Considérons l'application $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}. \end{array}$

  * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'on a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\, e^{-tx}}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\, e^{-tx}}{1+t^2}\cdot$$

  * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto h(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux. On a de plus, par croissances comparées (car $x > 0$) :

$$h(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

  ce qui assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ des fonctions $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.

  * *Hypothèse de domination sur tout segment pour* $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2\, e^{-ta}}{1+t^2}\cdot$$

  La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2\, e^{-ta}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, par croissances comparées (car $a > 0$), $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui assure son intégrabilité.

Par suite, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre assure que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'on a, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\, e^{-tx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

On constate alors que, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$

- En écrivant :

$$\forall x > 0 \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue, on constate que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{\sin x}{x}\cdot$ De même, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{x}\cdot$
Ainsi, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a, pour tout $x > 0$ (après simplification de deux termes) :

$$g'(x) = -\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\sin x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right)\cos x.$$

De même, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a, pour tout $x > 0$:

$$g''(x) = -g(x) + \frac{1}{x},$$

ce qui prouve que g est aussi solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$

3. - Comme f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$, leur différence est solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$.
   On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - g(x) = a\cos x + b\sin x. \qquad (\star)$$

   - Prouvons que f et g tendent vers 0 en $+\infty$.
     * Pour f, on constate que pour tout $x > 0$ on a :

$$\forall t > 0 \quad 0 \leqslant \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant e^{-tx} \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$$

     On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
     * Pour g, puisque les fonctions sin et cos sont bornées, il suffit de montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

       ⋆ La première limite s'obtient en écrivant :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

car par convergence de l'intégrable $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$, on a :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

⋆ La seconde limite s'obtient de la même manière.

- Puisque f et g tendent vers 0 en $+\infty$, la relation $(\star)$ donne :

$$a\cos x + b\sin x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si le couple (a,b) est différent de $(0,0)$, alors on peut écrire :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

avec φ vérifiant $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot$ En évaluant cela aux points $x_n = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2n\pi$, on constate que cette quantité ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
On en déduit que $a=b=0$, et donc les fonctions f et g sont égales.

- Les fonctions f et g étant égales, on a en particulier $\lim\limits_0 f = \lim\limits_0 g$.

∗ Montrons, par caractérisation séquentielle, que $\displaystyle\lim_0 f = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\cdot$
Soit (x_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ tendant que 0. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad h_n(t) = \frac{e^{-tx_n}}{1+t^2}\cdot$$

⋆ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
⋆ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $h_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+t^2}$, donc la suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction $t\mapsto \frac{1}{1+t^2}\cdot$
⋆ Enfin, on a :

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^* \quad |h_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, cela nous fournit l'hypothèse de domination, et permet de conclure que $\displaystyle f(x_n) \to \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\cdot$

∗ Comme d'autre part $\displaystyle\lim_0 g = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrale faussement impropre en 0 et dont la convergence résulte donc de la question 1), on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Chapitre 14 : Calcul différentiel

Calcul différentiel



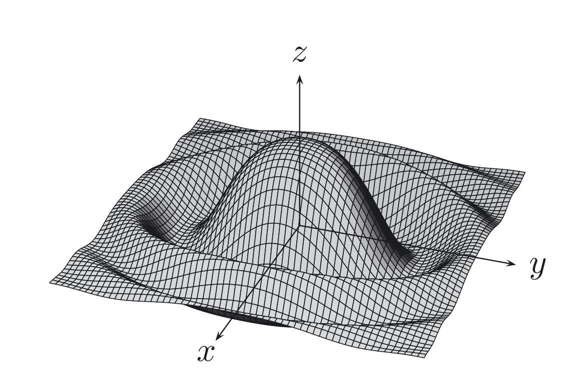
Dans ce chapitre, p est un entier naturel non nul. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni d'une norme, notée en général $\| \ \|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Enfin, U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.
Ce chapitre et le suivant ont pour but d'étendre si possible aux fonctions de plusieurs variables réelles, c'est-à-dire aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^p$, certains concepts de l'analyse des fonctions de la variable réelle : continuité, dérivabilité, tangente, étude d'extrema, etc. La continuité a déjà été, pour l'essentiel, étudiée au chapitre 5. Ce chapitre est consacré aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$. Le chapitre suivant, lui, sera dédié aux applications du calcul différentiel.

Introduction informelle

Considérons une fonction f à valeurs réelles définie sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^2$. Son graphe :

$$G = \Big\{(x, y, f(x, y))\ ;\ (x, y) \in U\Big\}$$

est alors une surface de $\mathbb{R}^3$.



Pour étudier f, il est naturel de chercher à s'appuyer sur nos connaissances concernant les fonctions de la variable réelle.
Le plus simple est sans doute d'étudier les applications partielles, c'est-à-dire les applications $f_x : y \mapsto f(x, y)$ et $g_y : x \mapsto f(x, y)$. D'ailleurs, la représentation des applications partielles est l'un des points de vue adoptés par certains logiciels informatiques, pour représenter les surfaces.

Continuité

La démarche qui consiste à étudier les applications partielles est instructive, mais non exempte de pièges. Par exemple, il est facile de vérifier que si f est une fonction continue, alors toutes ses applications partielles sont continues, et l'on pourrait facilement penser que la réciproque est vraie. Mais il n'en n'est rien.

p.832

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Démontrer que si f est continue, alors toutes ses applications partielles sont continues.
2. En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   démontrer que la réciproque est fausse.
   Indication. Considérer $x \mapsto f(x,x)$.

De manière générale, pour les limites et la continuité on se reportera au chapitre 5. De plus, dans certains cas, on peut considérer la méthode ci-dessous.

Point méthode

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $f : U \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour établir l'existence d'une limite en $(0,0)$, il est parfois utile d'évaluer $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

p.832

Exercice 2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?

Dérivées partielles

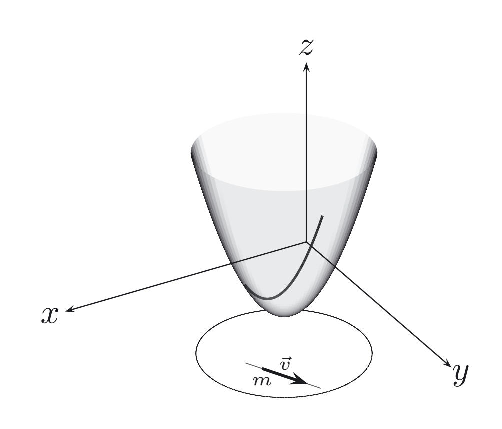
Pour appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (a,b), il est là encore naturel de s'intéresser aux variations de ses applications partielles. Cela conduit à calculer les dérivées de ses applications partielles. Si elles existent, ce sont les dérivées partielles de f, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, que le lecteur aura déjà rencontrées au cours de ses études dans d'autres disciplines.

Les dérivées partielles constituent un outil pratique, mais à elles seules elles ne permettent pas de généraliser la notion de fonction dérivable de manière satisfaisante. L'exercice suivant permet de comprendre pourquoi.

p.832

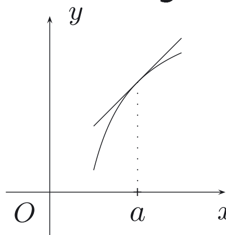
Exercice 3 En prenant l'exemple de l'exercice 1 de la page précédente, montrer qu'une fonction peut avoir des dérivées partielles en $(0,0)$, c'est-à-dire que les applications $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont dérivables en 0, et pourtant ne pas être continue en ce point.

Étude dans une direction



Plus généralement, toujours dans l'optique d'appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point $m \in U$, on peut s'intéresser à f dans une direction donnée. Cela signifie étudier au voisinage de 0 la fonction $t \mapsto f(m+tv)$, où $v \in \mathbb{R}^2$. Pour que cela soit pertinent, il faut pouvoir faire l'étude suivant toutes les directions. C'est possible puisqu'on ne s'intéresse qu'à des fonctions définies sur des ouverts.

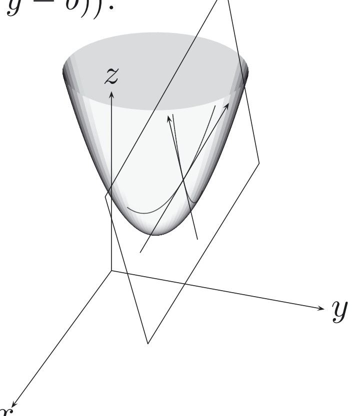
Plans tangents



Nous savons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Ce développement limité implique que parmi toutes les droites passant par $(a, f(a))$, la tangente, qui est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, est celle qui approche le mieux le graphe de f en a.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, notion qui sera précisée plus loin. Si $(a,b) \in U$, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en (a,b), c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'au voisinage de (a,b) on ait, en notant $c = f(a,b)$:

$$f(x,y) = c + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \mathrm{o}\big((x-a, y-b)\big).$$



Cela signifie *grosso modo* que parmi tous les plans de l'espace (tels que vus en terminale), le plan d'équation

$$z = c + \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

est celui qui approche le mieux le graphe de f en (a,b). C'est le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S d'équation $z = f(x,y)$.

Par ailleurs, si Γ est un arc tracé sur S, il est alors intuitif que la tangente au point (a,b,c) de paramètre t_0 à Γ sera incluse dans le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S.

I Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1 Dérivées partielles

Définition 1

Soit $j \in [\![1,p]\!]$.

- Pour toute fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la **j-ème application partielle en $a = (a_1, \ldots, a_p)$** est l'application de la variable réelle :
$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_p).$$
- La **j-ème dérivée partielle de f en a** est, si elle existe, la dérivée en 0 de la j-ème application partielle de f en a, que l'on note :
$$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Si f admet une j-ème dérivée partielle en tout point, l'application définie sur U par $x \mapsto \partial_j f(x)$ est la **j-ème dérivée partielle de f**.

Remarques

- Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, les applications partielles sont définies au voisinage de 0.
- La j-ème dérivée partielle de $f : U \to \mathbb{R}$ est définie en $a \in U$ si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_p)$, qui est définie au voisinage de a_j, est dérivable en a_j.
- Lorsqu'une fonction de plusieurs variables est définie par une expression du type $f(x,y,z,\ldots)$, alors on peut noter la première dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la deuxième $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, la troisième $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, etc. Cela est cohérent avec l'ordre usuel sur les lettres de l'alphabet.
Plus généralement, si $f : U \to \mathbb{R}$ est définie par une expression où les variables sont notées u_1, …, u_p (ou toutes autres lettres), on pourra noter $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial u_p}$ les dérivées partielles.

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \ln\big(x^2+y^2+1\big)$; fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par opérations sur les fonctions dérivables, l'application $t \mapsto \ln(t^2+y^2+1)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto \dfrac{2t}{t^2+y^2+1}$, donc $\partial_1 f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1}\cdot$

2. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 2x^4y^3 + 5y$, alors les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 8x^3y^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^4y^2 + 5.$$
3. Si f est l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ par :
$$f(x_1,\ldots,x_p) = x_1^1 x_2^2 \cdots x_p^p,$$
alors la j-ème dérivée partielle en $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p$ est :
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_p) = j\, x_1^1 \cdots x_{j-1}^{j-1} x_j^{j-1} x_{j+1}^{j+1} \cdots x_p^p.$$

p.832 **Exercice 4** Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{R}^p$. En considérant les applications partielles de $\mathcal{N}$ en 0, montrer que les dérivées partielles de $\mathcal{N}$ ne sont pas définies en 0.

Exploitation des symétries

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ stable par l'application $(x,y) \mapsto (y,x)$ et vérifie :
$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = f(y,x),$$
alors $\partial_2 f(x,y)$ est définie si, et seulement si, $\partial_1 f(y,x)$ l'est et :
$$\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x).$$
Soit $(x,y) \in U$. Pour tout t tel que $(t,y) \in U$, on a $f(t,y) = f(y,t)$, donc $t \mapsto f(t,y)$ est dérivable en x si, et seulement si, $t \mapsto f(y,t)$ est dérivable en x et leurs dérivées sont alors égales, ce qui donne $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x)$, que l'on peut également écrire :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$
On obtient de la même façon, dans le cas où $\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = -f(y,x)$, l'égalité $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}\cdot$

Un calcul simple donne :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2}\cdot$$
Puisque $f(x,y) = -f(y,x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{y^2 - 2xy - x^2 - 1}{(x^2+y^2+1)^2}\cdot$$

Calcul de dérivées partielles

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $j \in [\![1, p]\!]$ et $a \in U$. On suppose que les j-ème dérivées partielles de f et g sont définies en a. Les règles de dérivation des fonctions de la variable réelle donnent facilement les propriétés ci-dessous.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$ et λf ont une j-ème dérivée partielle en a, avec :
$$\partial_j(f+g)(a) = \partial_j f(a) + \partial_j g(a) \qquad \text{et} \qquad \partial_j(\lambda f)(a) = \lambda\, \partial_j f(a).$$
- La fonction fg admet une j-ème dérivée partielle en a et :
$$\partial_j(fg)(a) = \partial_j f(a)\, g(a) + f(a)\, \partial_j g(a).$$
- Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et si $f(U) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ admet une j-ème dérivée partielle en a et :
$$\partial_j(\varphi \circ f)(a) = \varphi'\big(f(a)\big)\, \partial_j f(a).$$
- Si la fonction f ne s'annule pas, alors la fonction $1/f$ admet une j-ème dérivée partielle en a et :
$$\partial_j(1/f)(a) = -\frac{\partial_j f(a)}{f^2(a)}\cdot$$

2 La classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de **classe $\mathcal{C}^1$** si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Notation $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U et à valeurs réelles.

Exemples

1. Une fonction constante est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, il est immédiat que toutes les dérivées partielles d'une telle fonction existent et sont nulles. La fonction nulle étant continue, la conclusion suit.
2. Cas d'une projection. Soit $i \in [\![1, p]\!]$; notons $\pi_i : x \mapsto x_i$, qui est l'application qui donne la i-ème composante d'un élément de $\mathbb{R}^p$. Le calcul donne aisément :
$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \quad \partial_j \pi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit que les fonctions $\partial_j \pi_i$ sont définies sur $\mathbb{R}^p$ et constantes. Les fonctions constantes étant continues, π_i est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Plus généralement, le cas d'une application linéaire. Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et :
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p. \end{array}$$
Le calcul donne immédiatement que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a $\partial_j u = a_j$. Les dérivées partielles de u sont donc définies sur $\mathbb{R}^p$ et constantes. Là encore en remarquant que les applications constantes sont continues, il vient que u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarques

- Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si $V \subset U$ est un ouvert non vide, alors la restriction $f_{|V}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Contrairement aux fonctions de la variable réelle, pour lesquelles la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ s'applique aux fonctions définies sur un intervalle d'intérieur non vide non nécessairement ouvert, ou plus généralement sur une réunion d'intervalles d'intérieur non vide, la notion de classe $\mathcal{C}^1$ pour les fonctions de plusieurs variables ne s'applique exclusivement qu'à des fonctions définies sur des ouverts.
- On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** si toutes ses applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.

p.833

Exercice 5

1. Démontrer que $\mathcal{N}_2 : x \mapsto \|x\|_2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
2. La fonction $\mathcal{N}_2$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$?

p.833

Exercice 6

Les fonctions $\mathcal{N}_1 : x \mapsto \|x\|_1$ et $\mathcal{N}_\infty : x \mapsto \|x\|_\infty$ sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Indication. Considérer $t \mapsto \mathcal{N}_1(1,t)$ *et* $t \mapsto \mathcal{N}_\infty(1,t)$.

3 Théorème fondamental

Lemme 1

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; supposons que $0 \in U$.
Si $f(0) = \partial_1 f(0) = \cdots = \partial_p f(0) = 0$, alors on a au voisinage de 0 :

$$f(h) = \mathrm{o}(h).$$

Démonstration (non exigible) page 833

Théorème 2 (« Théorème fondamental du calcul différentiel »)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.
Alors au voisinage de 0 on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + \mathrm{o}(h).$$

Principe de démonstration.

Démonstration page 834

Appliquer le lemme précédent à la fonction :

$$g : h \mapsto f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j \, \partial_j f(a).$$

Rappelons que nous avons déjà remarqué qu'une fonction peut avoir des dérivées partielles en tout point sans pour autant être continue (*cf.* exercice 1 de la page 809). Cependant, le corollaire suivant montre que si toutes les dérivées partielles sont continues, alors la fonction est elle-même continue.

Corollaire 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR})$. La fonction f est alors continue.

Démonstration. Soit $a \in U$. D'après le théorème 2 de la page précédente, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + \mathrm{o}(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a).$$

Cela prouve que f est continue en a. Il s'ensuit donc que f est une fonction continue. □

4 Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Combinaisons linéaires

Proposition 4

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR})$ et $\lambda \in \mathrm{IR}$.
Les fonctions $f + g$ et λf sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 834

Corollaire 5

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \mathrm{IR})$.

Démonstration. Le corollaire 3 donne l'inclusion $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR}) \subset \mathcal{C}(U, \mathrm{IR})$.
La fonction nulle, qui est constante, est de classe $\mathcal{C}^1$ (*cf.* page 813).
Par ailleurs, d'après la proposition 4, l'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR})$ est stable par combinaisons linéaires.
La conclusion suit. □

Produit

Proposition 6

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{IR})$. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 834

Corollaire 7

Toute fonction polynomiale sur IR^p est classe $\mathcal{C}^1$.

Principe de démonstration. Démontrer que les fonctions $\begin{array}{ccc} \mathrm{IR}^p & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p} \end{array}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{IN}^p$.

Démonstration page 835

Remarque En particulier la restriction à un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ d'une fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$.

Composition par une fonction de la variable réelle

Proposition 8 (Composition)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(U) \subset I$, où I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.
La fonction $\varphi \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 835

Exemple Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x^2 + xy + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque La conclusion de la proposition 8 reste vraie si l'on suppose seulement que I est une réunion d'intervalles d'intérieur non vide. C'est en particulier le cas lorsque I est ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Corollaire 9 (Inverse)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas.
La fonction $1/f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Avec la remarque précédente, il s'agit du cas particulier de la proposition 8 avec la fonction $\varphi : x \mapsto 1/x$ définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. □

Corollaire 10 (Quotient)

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, la fonction g ne s'annulant pas.
La fonction f/g est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire précédent et de la proposition 6 de la page précédente. □

Exemples

1. Toute fonction rationnelle sur U, c'est-à-dire toute fonction définie sur U qui est le quotient de deux fonctions polynomiales, est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction $(x,y) \mapsto f\left(\frac{x-y}{x^2+y^2+1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que composée de f et d'une fonction rationnelle, donc de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulations des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
- si ceux-ci ne s'appliquent pas, on peut chercher à montrer que toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.

Exemple Par les théorèmes généraux, la fonction $f : (x, y) \mapsto e^x \ln\left(x^2 + 2y^2 + 1\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 + 1$ et $(x, y) \mapsto x$ sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque les fonctions exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$, par composition et produit, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

p.835

Exercice 7 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}. \end{array}$

1. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Démontrer que f admet un prolongement à $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

II Différentielle

Retour sur le théorème fondamental

Développement limité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ainsi que a un point de I et $g : I \to \mathbb{R}$. Rappelons que dire que g a un développement limité à l'ordre 1 en a, signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de 0 on ait :

$$g(a + h) = g(a) + h\,\alpha + \mathrm{o}(h).$$

En se rappelant que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les applications de la forme $h \mapsto h\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a signifie donc qu'il existe $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'au voisinage de 0 on ait :

$$g(a + h) = g(a) + v(h) + \mathrm{o}(h).$$

Réécriture du théorème fondamental

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Le théorème « fondamental » de la page 814 affirme qu'au voisinage de 0 on a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j\,\partial_j f(a) + \mathrm{o}(h). \qquad (*)$$

Afin d'écrire la propriété $(*)$ de manière plus condensée, définissons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j\, \partial_j f(a). \end{array}$$

Dans ces conditions, la propriété $(*)$ se traduit par : au voisinage de 0 l'on a :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$

Il est facile de vérifier que l'application u est linéaire.

Les considérations ci-dessus mènent à dire que le théorème « fondamental » de la page 814 implique qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point.

1 Différentielle en un point

Définition 3

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.
La **différentielle de f en a** est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a).$$

Notations

- La différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a)$.
- La valeur en $h \in \mathbb{R}^p$ de la différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.
  Cette notation, qui désigne $(\mathrm{d}f(a))(h)$, est utilisée pour alléger les écritures.

Remarques

- Le théorème « fondamental » de la page 814 peut donc s'énoncer comme suit. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$, alors au voisinage de 0 l'on a :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

- Lorsque $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f: & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

  est la **différentielle de f**.

Exemples

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction constante. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et toutes ses dérivées partielles sont nulles. Il s'ensuit que $\mathrm{d}f = 0$.
2. Soit $i \in [\![1,p]\!]$ et $\pi_i : x \mapsto x_i$ l'application qui donne la i-ème composante d'un élément de $\mathbb{R}^p$. D'après l'exemple 2 de la page 813, π_i est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \quad \partial_j \pi_i(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } i = j\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad \forall h \in \mathbb{R}^p \quad \mathrm{d}\pi_i(x) \cdot h = h_i = \pi_i(h).$$
3. Cas d'une application linéaire. Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et :
$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p. \end{array}$$
D'après l'exemple 3 de la page 813, l'application u est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad \forall h \in \mathbb{R}^p \quad \mathrm{d}u(x) \cdot h = a_1 h_1 + \cdots + a_p h_p = u(h).$$
4. Soit $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et :
$$q : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & a_1 x_1^2 + \cdots + a_p x_p^2. \end{array}$$
L'application polynomiale q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^p \quad \forall h \in \mathbb{R}^p \quad \mathrm{d}q(x) \cdot h = 2a_1 x_1 h_1 + \cdots + 2a_p x_p h_p.$$

Calcul de différentielles

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que $a \in U$. La définition de différentielle en un point, les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et les règles de calcul de dérivées partielles données page 813 permettent aisément d'établir les formules suivantes.

Différentielle d'une combinaison linéaire. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a).$$

Différentielle d'un produit :
$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\, \mathrm{d}f(a) + f(a)\, \mathrm{d}g(a).$$

Différentielle d'une composée.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f(U) \subset I$, alors :
$$\mathrm{d}(\varphi \circ f)(a) = \varphi'\big(f(a)\big)\, \mathrm{d}f(a).$$

Différentielle de l'inverse. Si la fonction f ne s'annule pas :
$$\mathrm{d}(1/f)(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f^2(a)}.$$

2 Dérivation le long d'un arc

Dans cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 11

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : I \to U$.
Si γ est dérivable en $t_0 \in I$, alors, en notant $a = \gamma(t_0)$, la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma'(t_0).$$

Principe de démonstration. En notant $g = f \circ \gamma$, évaluer la limite de $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$ lorsque t tend vers t_0 à l'aide du « théorème fondamental ». Démonstration page 836

On peut traduire le théorème 11 de la manière suivante. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si $t \mapsto \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$ est une fonction dérivable sur un intervalle d'intérieur non vide I à valeurs dans U, alors la fonction $g : t \mapsto f\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$ est dérivable et, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)\, x_j'(t).$$

Notons que la commutativité de la multiplication, on a également :

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big).$$

Cette deuxième formule, moins « naturelle », est néanmoins utile lorsque l'on cherche à calculer des dérivées partielles successives. Dans la suite de ce livre, nous privilégierons l'une ou l'autre expression selon le contexte.

Exemple Considérons une quantité physique qui dépend du temps et de l'espace. Cela peut être modélisé en introduisant une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & f\big(x, y, z, t\big). \end{array}$

La position dans l'espace d'un point matériel au cours du temps est donnée par une fonction $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Posons $h : t \mapsto f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et γ dérivable, alors la fonction h est dérivable et :

$$h'(t) = x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t), t\big) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t), t\big) + z'(t)\,\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t), t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(\gamma(t), t\big).$$

On écrit de manière plus simple, en omettant le point en lequel les dérivées partielles de f sont évaluées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x(t), y(t), z(t), t\big) = x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} + z'(t)\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Corollaire 12

Soit $\gamma : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction $f \circ \gamma$ est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 837

Interprétation de $\mathrm{d}f(a) \cdot h$

Nous l'avons déjà remarqué, pour appréhender le comportement de $f : U \to \mathbb{R}$ en a, il est souvent intéressant d'étudier f en a dans toutes les directions, c'est-à-dire considérer les fonctions $t \mapsto f(a + th)$.

Fixons $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Puisque U est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et donc l'application :

$$\gamma : t \mapsto a + th$$

est définie sur $I = \left]-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right[$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors, d'après le théorème 11 de la page ci-contre, la fonction $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(a) \cdot h.$$

Ainsi, de manière imagée « $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ est la dérivée de f en a dans la direction donnée par h ».

Remarque Même si f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$, il est possible que la fonction $t \mapsto f(a + th)$ soit dérivable en 0. Dans ce cas, sa dérivée en 0 est appelée **dérivée de f en a selon h** et notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h$.

p.837 **Exercice 8** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\mathrm{d}f(0, 0)$.
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, calculer $\mathrm{D}_{(a,b)} f(0, 0)$.
3. Conclusion ?

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ n'est *pas* de classe $\mathcal{C}^1$, il peut être utile :

- soit de trouver h tel que $t \mapsto f(a + th)$ ne soit pas dérivable en 0,
- soit de raisonner par l'absurde en exploitant les dérivées en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + th)$, pour certaines valeurs de $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$.

L'exercice 8 illustre ce point méthode. Cependant, l'étude dans toutes les directions n'est pas toujours suffisante pour conclure (*cf.* l'exercice 14.4 de la page 845).

3 Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe

Proposition 13

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que $(a,h) \in U \times \mathbb{R}^p$ tel que le segment $[a, a+h] \subset U$. On a :

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a+th) \cdot h \,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Puisque $[a, a+h] \subset U$, l'application $\gamma : t \mapsto a+th$ est définie sur $[0,1]$ à valeurs dans U. La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\gamma' = h$. D'après le théorème 11 de la page 820, la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(a+th)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g'(t) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi :

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(a+th) \cdot h \,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Théorème 14

Supposons que U soit un ouvert convexe non vide.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f = 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 838

Utiliser la proposition 13 pour le sens non trivial.

Attention Le résultat précédent ne s'étend pas à un ouvert U quelconque. Par exemple, la fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = 1$ si $x > 0$ et $f(x,y) = -1$ sinon, est non constante alors que $\mathrm{d}f = 0$.

4 Règle de la chaîne

Théorème 15 (Dérivation en chaîne)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit également V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^q$ et :

$$g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_1, \ldots, u_q) & \longmapsto & \big(x_1(u_1, \ldots, u_q), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_q)\big). \end{array}$$

Si les fonctions x_1, …, x_p sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si $g(V) \subset U$, alors $h = f \circ g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $a \in V$, en notant $b = g(a)$, on a alors pour tout $i \in [\![1, q]\!]$:

$$\partial_i h(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_i x_j(a)\, \partial_j f(b).$$

Principe de démonstration. À l'aide du théorème 11 de la page 820, calculer pour $i \in [\![1, q]\!]$ la dérivée en a_i de l'application $t \mapsto f\big(x_1(a_1, \ldots, t, \ldots, a_q), \ldots, x_p(a_1, \ldots, t, \ldots, a_q)\big)$.

Démonstration page 838

Exemple Commençons par traiter un cas particulier.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit également x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, telles que $g(V) \subset U$, où l'on a posé $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Le théorème 15 de la page ci-contre donne que la fonction $h : (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $(u,v) \in V$:

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)$$
$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big).$$

En omettant les points où sont évaluées les dérivées partielles, on peut réécrire ces relations de manière très condensée :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot$$

Remarques

- Plus généralement, le théorème 15 de la page précédente s'écrit de façon plus agréable avec la notation $\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot$

  En effet, avec les hypothèses du théorème 15 de la page ci-contre :
  $$\frac{\partial h}{\partial u_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(a)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(b)\cdot \qquad (*)$$

- On retient la relation $(*)$, dite **règle de la chaîne**, sous la forme concise ci-dessous, où les points où sont évaluées les dérivées partielles sont sous-entendus :
  $$\boxed{\frac{\partial h}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\frac{\partial h}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\cdot}$$

  Cette notation est certes abusive, mais elle est très efficace. Il faut simplement ne pas perdre de vue, pour chaque dérivée partielle, le point où elle est évaluée.

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les applications $(r,\cos\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $(r,\cos\theta) \mapsto r\sin\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(u,v) = f(au+bv, cu+dv).$$

Les applications $(u,v) \mapsto au+bv$ et $(u,v) \mapsto cu+dv$ sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par suite la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = a\,\frac{\partial f}{\partial x} + c\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = b\,\frac{\partial f}{\partial x} + d\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

p.839 **Exercice 9** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(u,v) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On pose $g : (x,y) \mapsto f(x+y\,,\,xy)$. Calculer en tout point (x,y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

5 Gradient

Dans cette section, $\mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\,.\,|\,.\,)$.

Définition 4

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.
Le **gradient de f en a**, noté $\nabla f(a)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$\nabla f(a) = \big(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a)\big).$$

Proposition 16

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. Alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \quad \mathrm{d}f(a)\cdot h = (\,\nabla f(a) \mid h\,).$$

Démonstration. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$(\,\nabla f(a) \mid h\,) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, h_i = \mathrm{d}f(a)\cdot h. \qquad \square$$

On peut ainsi traduire le « théorème fondamental » de la page 814 en termes de gradient de la manière suivante. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$, alors, au voisinage de 0 l'on a :

$$f(a+h) = f(a) + (\,\nabla f(a) \mid h\,) + \mathrm{o}(h).$$

De même, le théorème 11 de la page 820 peut se traduire en termes de gradient de la manière suivante. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans U, alors, pour $t_0 \in I$, on a en posant $a = \gamma(t_0)$:

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = \big(\,\nabla f(a) \mid \gamma'(t_0)\,\big).$$

Exemple Un certain nombre de lois physiques s'expriment en termes de gradient. C'est par exemple le cas de la loi d'Ohm dans sa forme locale, de la première loi de Fourier sur la conduction thermique ou encore de la première loi de Fick.

Remarque Lorsque f et g sont des fonctions définies sur un ouvert et φ une fonction réelle de la variable réelle, toutes de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient les relations suivantes, qui ne sont que des reformulations des calculs de différentielle :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla(\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla f + \mu \nabla g \\ \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g \\ \nabla(\varphi \circ f) &= (\varphi' \circ f) \nabla f \\ \nabla\left(\frac{1}{f}\right) &= -\frac{\nabla f}{f^2}. \end{aligned}}$$

Utilisation en physique

Un certain nombre de lois physiques s'expriment en termes de gradient. Rappelons quelques exemples.

Forme locale de la loi d'Ohm Une modélisation possible d'un matériau conducteur soumis à un champ électrostatique, consiste à donner une partie $A \subset \mathbb{R}^3$ et deux fonctions $V : A \to \mathbb{R}$ (le potentiel électrostatique) et $\gamma : A \to \mathbb{R}_+$ (la conductivité électrique). La forme locale de la loi d'Ohm lie, sous certaines conditions, le vecteur densité de courant $\mathbf{j} : A \to \mathbb{R}^3$ et le gradient du potentiel par la relation :

$$\mathbf{j} = \gamma\, \mathbf{E} = -\gamma \nabla V.$$

Conduction thermique Pour étudier, dans un matériau continu, le flux thermique à travers une surface quelconque à un instant donné, on introduit le vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j}_Q : A \to \mathbb{R}^3$. Si le matériau est soumis à un champ de température $T : A \to \mathbb{R}$, la première loi de Fourier affirme :

$$\mathbf{j}_Q = -\lambda \nabla T,$$

où $\lambda : A \to \mathbb{R}_+$ est la conductivité thermique.

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

1 Dérivées partielles d'ordre 2

Les dérivées partielles d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, lorsqu'elles existent en tout point de U sont des applications de U dans $\mathbb{R}$. On peut donc s'intéresser à leurs dérivées partielles éventuelles.

Définition 5

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.
Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_i(\partial_j f)$ est appelée **dérivée partielle de f selon les indices (i,j)** et notée $\partial^2_{i,j} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

On appelle **dérivée partielle d'ordre 2**, une dérivée partielle par rapport à un couple d'indices.

Remarque Pour éviter des confusions, on dit parfois qu'une dérivée partielle au sens de la définition 1 de la page 811 est une **dérivée partielle d'ordre 1**.

2 La classe $\mathcal{C}^2$

Définition 6

Une application $f : U \to \mathbb{R}$ est de **classe $\mathcal{C}^2$** si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- En d'autres termes, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$.
- On convient que les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues. Dans ce contexte, on peut noter $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur U à valeurs réelles.
- Il est clair que la restriction à un ouvert $V \subset U$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est également de classe $\mathcal{C}^2$.
- La définition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ coïncide avec celle donnée en première année pour les fonctions de la variable réelle définies sur un intervalle ouvert et, par extension, aux fonctions de la variable réelle définies sur une réunion d'intervalles ouverts.

Exemples

1. Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^2$. En effet, toutes leurs dérivées partielles sont nulles, donc de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Le **laplacien** d'une application $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}.$$

   Une application est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et si son laplacien est nul.

Il vient de la définition et du théorème fondamental le résultat suivant.

Proposition 17

Si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 839

p.839

Exercice 10 *(Approfondissement)*

Soit $D = [0,1] \times \mathbb{R}_+$. On dit que la fonction $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ est solution du problème :

$$(\mathcal{P}) : \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad f(0,t) = f(1,t) = 0,$$

si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D} =]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$ et si elle vérifie :

$$\forall (x,t) \in \overset{\circ}{D} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(0,t) = f(1,t) = 0.$$

Déterminer les solutions non nulles du problème $(\mathcal{P})$ qui sont de la forme :

$$f : (x,t) \mapsto \varphi(x)\psi(t).$$

Remarque Le problème traité à l'exercice précédent est un cas particulier de recherche de solutions d'une équation aux dérivées partielles, dite équation de diffusion.
Pour plus d'informations sur ce problème, voir l'exercice 15.19 de la page 904.

3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Les théorèmes opératoires sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ se généralisent sans difficulté aux applications de classe $\mathcal{C}^2$.

Proposition 18

Soit f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration page 840

Remarque Il s'ensuit que $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Proposition 19

Soit f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

L'application fg est alors de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration page 840

Proposition 20

Les applications polynomiales sur $\mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les dérivées partielles d'une application polynomiale sont elles-mêmes des fonctions polynomiales. □

Théorème 21

Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^q$ et :

$$\begin{array}{rccl} g : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & (u_1,\dots,u_q) & \longmapsto & (g_1(u_1,\dots,u_q),\dots,g_p(u_1,\dots,u_q)). \end{array}$$

Si les fonctions g_1, …, g_p sont de classe $\mathcal{C}^2$ et si $g(U) \subset V$, alors $f \circ g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration page 841

Exemple Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. L'application $g : (x,y) \mapsto f(x+y\,,\,xy)$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$.

Corollaire 22

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, où V est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit également U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^q$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(U) \subset V$, alors $f \circ g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration.
Il s'agit du cas particulier du théorème le théorème 21 dans le cas $p = 1$. □

Proposition 23

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas.

La fonction $1/f$ est également de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration.
C'est un cas particulier du corollaire 22, en considérant $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$. □

Exemples

1. La fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2+1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Toute fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert où elle est définie.

4 Théorème de Schwarz

Théorème 24

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration (non exigible) page 841

L'existence de dérivées partielles « croisées » ne suffit pas pour démontrer qu'elles sont égales.

p.842 **Exercice 11** Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Un exemple : champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Supposons de plus $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique.

Un **champ de vecteurs** sur U est une application de U dans $\mathbb{R}^p$. Le gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs réelles est un exemple de champ de vecteurs.

On dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ sur U **dérive d'un potentiel** s'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \nabla f$. La fonction f est alors un **potentiel** de $\overrightarrow{V}$.

Dans le cas où $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que ces applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, et dérive d'un potentiel, on a d'après le théorème de Schwarz, en notant $(V_1, \ldots, V_p)$ les composantes de $\overrightarrow{V}$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \qquad (\star)$$

p.843 **Exercice 12** Le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (xy^2, -xy)$ dérive-t-il d'un potentiel ?

p.843 **Exercice 13** Déterminer un potentiel pour le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = (2xy\,,\, x^2 + y).$$

Le théorème de Schwarz fournit simplement une condition nécessaire pour qu'un champ de vecteurs dérive d'un potentiel. Les exercices 14.13 et 14.14 (page 847) montrent que la réciproque est vraie dans le cas où $U = \mathbb{R}^2$, mais fausse en général.

Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 de fonctions composées

Considérons des fonctions $x_j : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $j \in [\![1, p]\!]$, définies sur un ouvert V de $\mathbb{R}^q$, telles que l'application $\Phi : u \mapsto \big(x_1(u), \ldots, x_p(u)\big)$ soit à valeurs dans un ouvert U.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, par composition, la fonction $g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $i \in [\![1, q]\!]$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

où l'on garde les conventions données lors de l'introduction de la règle de la chaîne (*cf.* page 823). Cette expression étant valable pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, elle permet, par itération, de calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g = f \circ \Phi$, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque La notation :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

est simple et efficace. Pour l'utiliser correctement, il ne faut cependant pas perdre de vue qu'elle signifie qu'en posant $g : u \mapsto f\big(x_1(u), \ldots, x_p(u)\big)$, on a :

$$\forall u \in V \quad \forall i \in [\![1, q]\!] \quad \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u) \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(u), \ldots, x_p(u)\big).$$

Exemple Soit $x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$ et $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & uv. \end{array}$

Les applications x et y sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, et donc de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(u,v) = f(u+v, uv)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

Ainsi, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, compte tenu du théorème de Schwarz, pour

tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + u\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} + u\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\end{aligned}$$

p.843

Exercice 14 Le **laplacien** d'une fonction f définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ est $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (voir page 826). Soit $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}\big)$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.
2. Exprimer $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $y \mapsto (x, y)$ est continue, car les applications composantes sont une application constante et l'identité. Par composition, la fonction $f_x : y \mapsto f(x, y)$ donc est continue. On démontre de même, pour $y \in \mathbb{R}$, que l'application f_y est continue.
2. Dans ce cas, si $x \neq 0$, la fonction $f_x : y \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ est continue. De plus, f_0 est l'application nulle. Par suite, les fonctions f_x sont continues. Par symétrie, il en est de même des fonctions f_y.
   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x, x) = \frac{1}{2}$ et donc :
   $$f(x, x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Si f était continue en $(0, 0)$, on aurait $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x, x) = f(0, 0) = 0$. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 2

En tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. On a :

$$\left|f(x, y)\right| = \left|\frac{r^3 \cos^3\theta + r^3 \sin^3\theta}{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}\right| = r \left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leqslant 2r.$$

Puisque $r = \left\|(x, y)\right\|_2$, il s'ensuit par encadrement que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Par suite, la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widehat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\ ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continue.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. À l'exercice 1 il a été démontré que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x, 0) = 0$. De plus, $f(0, 0) = 0$. Ainsi f admet une dérivée partielle en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Exercice 4 Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. La j-ème application partielle de $\mathcal{N}$ en $(0, \ldots, 0)$ est l'application f_j définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_j(t) = \mathcal{N}\big(te_j\big).$$

Puisque la fonction $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_j(t) = |t|\,\mathcal{N}\big(e_j\big)$, il vient que f_j n'est pas dérivable en 0 (car $\mathcal{N}(e_j) \neq 0$).

Par définition, $\mathcal{N}$ n'a pas de j-ème dérivée partielle en 0.

Exercice 5 Rappelons que pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}$.

1. Fixons $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et $j \in [\![1, p]\!]$. Par opération sur les fonctions dérivables, l'application $t \mapsto \left\|(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_p\right\|_2$ est dérivable en x_j. Cela implique que $\partial_j \mathcal{N}_2$ est définie en x et :
$$\partial_j \mathcal{N}_2(x) = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}} = \frac{x_j}{\|x\|_2}.$$
Ainsi, par opérations sur les fonctions continues, l'application $x \mapsto \partial_j \mathcal{N}_2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Il s'ensuit que $\mathcal{N}_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
2. D'après l'exercice 4 de la page 812, les dérivées partielles de $\mathcal{N}_2$ ne sont pas définies en 0. *A fortiori* l'application $\mathcal{N}_2$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 6

- L'application $t \mapsto \mathcal{N}_1(1, t) = 1 + |t|$ n'est pas dérivable en 0, donc $\partial_2 \mathcal{N}_1(1, 0)$ n'est pas définie. *A fortiori*, $\mathcal{N}_1$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\mathcal{N}_\infty(1, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1\ ; \\ t & \text{si } t > 1. \end{cases}$$
Il s'ensuit que l'application $t \mapsto \mathcal{N}_\infty(1, t)$ a une dérivée à gauche en 1 qui vaut 0 et une dérivée à droite en 1 qui vaut 0. Par suite cette fonction n'est pas dérivable en 1 et $\partial_2 \mathcal{N}_\infty(1, 1)$ n'est pas définie. *A fortiori*, la fonction $\mathcal{N}_\infty$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lemme 1 On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme $\| \ \|_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B_F(0, \eta)$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on ait $\|\partial_j f(x)\| \leqslant \varepsilon / p$. Fixons un tel η ; soit $h \in B_F(0, \eta)$.
On note $s_k = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)$ pour $k \in [\![0, p]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $t \in [0, 1]$, on a $(h_1, \ldots, h_{k-1}, th_k, 0, \ldots, 0) \in B_F(0, \eta)$. Par conséquent, pour $k \in [\![1, p]\!]$, la fonction g_k définie sur $[0, 1]$ par :
$$g_k(t) = f\big(h_1, \ldots, h_{k-1}, th_k, 0, \ldots, 0\big)$$
étant de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $g_k'(t) = h_k \partial_k f\big(h_1, \ldots, h_{k-1}, th_k, 0, \ldots, 0\big)$, on a :
$$\begin{aligned} \big|f(s_k) - f(s_{k-1})\big| &= \big|g_k(1) - g_k(0)\big| \\ &= \left|\int_0^1 h_k \partial_k f\big(h_1, \ldots, h_{k-1}, th_k, 0, \ldots, 0\big)\, \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant |h_k| \int_0^1 \big|\partial_k f\big(h_1, \ldots, h_{k-1}, th_k, 0, \ldots, 0\big)\big|\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant |h_k| \frac{\varepsilon}{p} \leqslant \|h\| \frac{\varepsilon}{p}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\left|f(h)\right| = \left|f(h)-f(0)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{p}\big(f(s_k)-f(s_{k-1})\big)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p}\left|f(s_k)-f(s_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p}\|h\|\,\frac{\varepsilon}{p} = \|h\|\varepsilon.\end{aligned}$$

Par suite, $f(h) = \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0.

Théorème 2 Fixons $a \in U$.

- Posons $g : h \mapsto f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{j=1}^{p} h_j\,\partial_j f(a)$.

  Cette application est définie sur :

  $$U' = (-a) + U = \{h \in \mathrm{IR}^p \mid a+h \in U\}.$$

  Il est clair que U' est un ouvert de IR^p et que $0 \in U'$.
  Il est de plus immédiat que g admet des dérivées partielles en tout point et :

  $$\partial_j g(h) = \partial_j f(a+h) - \partial_j f(a)$$

  pour tout $h \in U'$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Il s'ensuit que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
  De plus, $g(0) = \partial_1 g(0) = \cdots = \partial_p g(0) = 0$.
- D'après le lemme 1 de la page 814, on a au voisinage de 0 :

  $$g(h) = \mathrm{o}(h),$$

  c'est-à-dire :

  $$f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) = g(a) + \mathrm{o}(h),$$

  ce qui achève la démonstration.

Proposition 4

- Démontrons que $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
  Les règles de calcul de dérivées partielles donnent que toutes les dérivées partielles de $f+g$ sont définies (*cf.* page 813). De plus :

  $$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \partial_j(f+g) = \partial_j f + \partial_j g.$$

  Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque $\partial_j f$ et $\partial_j g$ sont des fonctions continues, la fonction $\partial_j f + \partial_j g$ est continue et donc $\partial_j(f+g)$ est une application continue.
  Par suite, toutes les dérivées partielles de $f+g$ sont continues. Ainsi, la fonction $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- On démontre de la même manière que la fonction λf est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 6 Les règles de calcul de dérivées partielles donnent que les dérivées partielles de fg sont toutes définies (*cf.* page 813). De plus :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \partial_j(fg) = g\,\partial_j f + f\,\partial_j g.$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue. Par définition, la fonction $\partial_j f$ est continue. En tant que produit de fonctions continues, la fonction $g\,\partial_j f$ est continue. De même, la fonction $f\,\partial_j g$ est continue. Par conséquent, en tant que somme de deux fonctions continues, la fonction $\partial_j(fg)$ est continue.
Par suite, toutes les dérivées partielles de fg sont continues. Ainsi, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 7 Pour $j \in [\![1, p]\!]$, notons π_j la j-ème projection, c'est-à-dire :

$$\pi_j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_j. \end{array}$$

Les fonctions π_j sont de classe $\mathcal{C}^1$ (*cf.* page 813). Puisqu'un produit d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, l'application $\mu_\alpha = \pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_p^{\alpha_p}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On conclut en remarquant que toute fonction polynomiale est une combinaison linéaire de fonctions μ_α, donc une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 8 Les règles de calcul de dérivées partielles donnent que les dérivées partielles de $\varphi \circ f$ sont toutes définies (*cf.* page 813). De plus :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \partial_j(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \times \partial_j f.$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue et, par composition, la fonction $\varphi' \circ f$ est continue. Par définition la fonction $\partial_j f$ est continue. En tant que produit de fonctions continues, $\partial_j(\varphi \circ f)$ est continue.
Par suite, toutes les dérivées partielles de $\varphi \circ f$ sont continues. Ainsi, la fonction $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Soit g un prolongement de f à $\mathbb{R}^2$.
   - Déterminons les valeurs possibles de $g(0,0)$ pour que g soit continue. Si g est continue en 0, on a alors par composition :
   $$g(x, 0) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} g(0,0).$$
   Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x,0) = x^2$, et donc :
   $$g(x, 0) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0.$$

   Nous considérons par la suite le prolongement g tel que $g(0,0) = 0$.
   - Démontrons que les dérivées partielles de g sont définies en 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :
   $$\frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} = x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   Il s'ensuit que la première dérivée partielle de g existe et est nulle en $(0,0)$.De même $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les règles de dérivations donnent :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$
Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Il vient :
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| = r\left|2\cos^5(\theta) + 4\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^4(\theta)\right| \leqslant 8r.$$
Par conséquent $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 8\|(x,y)\|_2$. Du fait que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$, on en déduit :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 8\|(x,y)\|_2.$$
Il est alors immédiat que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$. La fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est donc continue en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
- Il est clair que $g(x,y) = g(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\partial_2 g$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\frac{\partial g}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 11

- Soit $a = \gamma(t_0)$ et g la fonction définie sur $I \setminus \{t_0\}$ par $g(t) = \dfrac{f\big(\gamma(t)\big) - f\big(\gamma(t_0)\big)}{t - t_0}$.
D'après le théorème 2 de la page 814, il existe une fonction $\varepsilon : U' \to \mathbb{R}$, où l'on a posé $U' = (-a) + U$, telle que $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et :
$$\forall h \in U' \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + \|h\|\,\varepsilon(h).$$
- Pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a donc, en notant γ_j les applications composantes de γ :
$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0}\,\partial_j f(a) \pm \left\|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\right\|\,\varepsilon\big(\gamma(t) - \gamma(t_0)\big).$$
- Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, du fait que γ est dérivable en t_0, on a :
$$\frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \gamma_j'(t_0).$$
Par conséquent :
$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0}\,\partial_j f(a) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{p} \gamma_j'(t_0)\,\partial_j f(a).$$

- Puisque $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \gamma'(t_0)$, par continuité de la norme, $\left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\| \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \|\gamma'(t_0)\|$ et donc la fonction $t \mapsto \left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\|$ est bornée au voisinage en t_0.

  Par ailleurs, par continuité, on a $\gamma(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \gamma(t_0)$, et donc $\varepsilon\big(\gamma(t)-\gamma(t_0)\big) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\| \varepsilon\big(\gamma(t)-\gamma(t_0)\big) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

- Il s'ensuit donc :

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_j(t)-\gamma_j(t_0)}{t-t_0}\,\partial_j f(a) \pm \left\|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right\| \varepsilon\big(\gamma(t)-\gamma(t_0)\big) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{p} \gamma_j'(t_0)\,\partial_j f(a),$$

  c'est-à-dire :

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{p} \gamma_j'(t_0)\,\partial_j f(a),$$

  ce qui démontre le résultat souhaité.

Corollaire 12 D'après le théorème 11 de la page 820, on a :

$$(f\circ\gamma)' = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j' \times \big((\partial_j f)\circ\gamma\big)$$

- Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Par définition la fonction $\partial_j f$ est continue et, par composition, il en est de même de $(\partial_j f)\circ\gamma$, car γ étant une application de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue.
- Par opérations sur les fonctions continues, les fonctions :

$$\gamma_j' \times \big((\partial_j f)\circ\gamma\big) \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{p} \gamma_j' \times \big((\partial_j f)\circ\gamma\big)$$

  sont continues.

Par suite, la fonction $f\circ\gamma$ est classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,0)=x$. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est définie et vaut 1. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ est définie et vaut 1. Par conséquent, si f était de classe $\mathcal{C}^1$, on aurait :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}f(0,0)\cdot(h,k) = h+k.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non nul. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(ta,tb) = t f(a,b).$$

   Par suite, $\mathrm{D}_{(a,b)} f(0,0) = f(a,b)$. Cette relation est encore vérifiée si $(a,b)=(0,0)$.

3. Toujours si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a d'après la première question :

$$D_{(a,b)} f(0,0) = \mathrm{d}f(0,0)\cdot(a,b) = a+b.$$

D'après la deuxième question, $\mathrm{D}_{(a,b)}f(0,0) = f(a,b)$. On a ainsi :

$$\mathrm{D}_{(1,1)}f(0,0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{(1,1)}f(0,0) = 1,$$

ce qui est absurde. La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (alors que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ l'est, d'après les théorèmes généraux).

Théorème 14

- Il a déjà été remarqué, en exemple à la page 813, qu'une fonction constante est de classe $\mathcal{C}^1$ et que toutes ses dérivées partielles sont nulles. Ainsi $\mathrm{d}f(a) = 0$ pour tout $a \in U$ et donc $\mathrm{d}f = 0$.
- Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\mathrm{d}f = 0$.
  Fixons $a \in U$.
  Par convexité, pour tout $b \in U$, le segment $[a,b]$ est inclus dans U. D'après la proposition 13 de la page 822, on a :

  $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(a + t(b-a)\big) \cdot (b-a)\,\mathrm{d}t = 0.$$

  On en conclut que la fonction f est constante.

Théorème 15

- Soit $a = (a_1, \ldots, a_q) \in V$. Fixons $i \in [\![1,q]\!]$.
  Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ la fonction x_j est de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'ensuit que les applications :

  $$\gamma_{i,j} : t \mapsto x_j\big(a_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème position}}}{t}, \ldots a_q\big)$$

  sont de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème 11 de la page 820, la fonction :

  $$t \mapsto f\big(x_1(a_1, \ldots, t, \ldots, a_q), \ldots, x_p(a_1, \ldots, t, \ldots, a_q)\big)$$

  est dérivable en a_i et sa dérivée, qui est par définition $\partial_i h(a)$, vaut :

  $$\sum_{j=1}^{p} \gamma'_{i,j}(a_i)\,\partial_j f\big(g(a)\big).$$

  En d'autres termes :

  $$\partial_i h(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_i x_j(a)\,\partial_j f\big(g(a)\big).$$

- Ainsi, toutes les fonctions $\partial_i h$ sont définies sur U. Par ailleurs, les fonctions x_1, ..., x_p sont continues, donc g est une fonction continue. Par composition, somme et produit de fonctions continues, pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, la fonction :

  $$\partial_i h = \sum_{j=1}^{p} \partial_i x_j \times (\partial_j f \circ g)$$

  est continue. Ainsi, par définition, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 9 Les applications polynomiales $u : (x,y) \mapsto x+y$ et $v : (x,y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

D'après la règle de la chaîne, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} + x\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Proposition 17 Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, toutes les dérivées partielles $\partial_j f$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Ainsi, d'après le corollaire 3 de la page 815, les fonctions $\partial_j f$ sont continues. Ainsi, par définition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 10

- Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

$$f : (x,t) \mapsto \varphi(x)\psi(t)$$

soit une solution non nulle du problème $(\mathcal{P})$.

  * Puisque $f \neq 0$, on a $\varphi \neq 0$ et $\psi \neq 0$. Il existe alors $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in [0,1]$ tels que $\varphi(x_0) \neq 0$ et $\psi(t_0) \neq 0$. Fixons un tel couple (x_0, t_0).
  Puisque $f(x_0,t_0) = \varphi(x_0)\psi(t_0) \neq 0$, on a $x_0 \notin \{0,1\}$, *i.e.* $x_0 \in]0,1[$.
  Par hypothèse, la fonction f est continue, donc $t \mapsto \varphi(x_0)\psi(t)$ est une fonction continue sur D. Du fait que $\varphi(x_0) \neq 0$, la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Par continuité de ψ, on peut donc supposer $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
  * Puisque l'application $t \mapsto f(x_0,t) = \varphi(x_0)\psi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de ψ, car $\varphi(x_0) \neq 0$.
  De la même manière, φ est une fonction continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$.
  * Par conséquent, pour tout $]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi''(x)\psi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \varphi(x)\psi'(t). \qquad (*)$$

  En considérant $(*)$ avec $t = t_0$, il vient que φ est une solution non nulle sur $]0,1[$ de l'équation différentielle :

$$\psi(t_0)z''(x) = \psi'(t_0)z(x), \qquad (\mathcal{E})$$

  de limite nulle en 0 et 1. Puisque cette dernière équation est une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène et à coefficients réels, trois cas se présentent.

    ⋆ Il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda \neq \mu$ tel que (u,v) soit une base de solutions de $(\mathcal{E})$, où l'on a posé $u : t \mapsto e^{\lambda t}$ et $v : t \mapsto e^{\mu t}$. Puisque φ est une solution non nulle de $(\mathcal{E})$, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\psi = \alpha u + \beta v$ et, d'après la condition aux limites en 0 et 1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{\lambda} + \beta e^{\mu} = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système étant $e^{\mu} - e^{\lambda} \neq 0$, l'unique solution du système est $(0,0)$, ce qui est exclu.

- ⋆ Même analyse lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que (u,v) soit une base de solutions de l'équation $(\mathcal{E})$, où $u : t \mapsto e^{\lambda t}$ et $v : t \mapsto t\, e^{\lambda t}$.
- ⋆ Il existe $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$, avec $\omega \neq 0$ tel que (u,v) soit une base de solutions de $(\mathcal{E})$, où l'on a posé $u : t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t)$ et $v : t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t)$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\psi = \alpha u + \beta v$ et :

$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ \alpha e^{\lambda}\cos\omega + \beta e^{\lambda}\sin\omega & = 0. \end{cases}$$

Cela implique $\alpha = 0$, donc $\beta \neq 0$, puis $\omega \in \pi\mathbb{Z}$.
Par conséquent, il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \varphi(x) = a\sin(k\pi x).$$

∗ Dans ces conditions, $(*)$ se traduit, sachant que $a \neq 0$, par :

$$\forall (x,t) \in \left]0,1\right[\times \mathbb{R}_+^* \quad -k^2\pi^2 \sin(k\pi x)\, \psi(t) = \sin(k\pi x)\, \psi'(t),$$

ce qui implique :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad -k^2\pi^2\psi(t) = \psi'(t).$$

Ainsi, par continuité de f, il existe $(A,k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \quad f(x,t) = Ae^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x)$$

- Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions définies par :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \quad f(x,t) = Ae^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x) \quad \text{avec} \quad (A,k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Z}$$

sont solutions du problème.

Proposition 18 Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$.
D'après la proposition 4 de la page 815, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après les règles de dérivations (*cf.* page 813), on a :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \partial_j(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial_j f + \mu \partial_j g.$$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$, les fonctions $\partial_j f$ et $\partial_j g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc $\lambda\partial_j f + \mu\partial_j g$ également. Par suite, $\partial_j(\lambda f + \mu g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque $\partial_j(\lambda f + \mu g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Proposition 19 Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$.
D'après la proposition 6 de la page 815, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après les règles de dérivations (*cf.* page 813), on a :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \partial_j(f\, g) = g\, \partial_j f + f\, \partial_j g.$$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$, les fonctions $\partial_j f$ et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc $g\,\partial_j f$ également. De même l'application $f\,\partial_j g$ est également de classe $\mathcal{C}^1$. Par combinaison linéaire, il vient que $\partial_j(f\, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque $\partial_j(f\, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 21 Puisque les fonctions f, g_1, ..., g_p sont des classe $\mathcal{C}^2$, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le théorème 15 de la page 822, la fonction $h = f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, on a :

$$\partial_i h = \sum_{j=1}^{p} \partial_i g_j \times \big((\partial_j f) \circ g\big).$$

Soit $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque $\partial_j f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car f est de classe $\mathcal{C}^2$) et que les fonctions g_1, ..., g_p sont de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème 15 de la page 822 donne que $(\partial_j f) \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, puisque g_j est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $\partial_i g_j$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par produit, la fonction $\partial_i g_j \times \big((\partial_j f) \circ g\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela étant vrai pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, il vient par somme que $\partial_i h$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi, puisque toutes les fonctions $\partial_i h$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui achève la preuve.

Théorème 24 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$; munissons $\mathbb{R}^p$ de la norme $\| \ \|_\infty$.

Le résultat à démonter est évident si $i = j$. On suppose désormais $i \neq j$ et donc $p > 1$.

Soit $a \in U$. Puisque U est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $B_F(a, r_0) \subset U$.

Pour tout $0 \leqslant r \leqslant r_0$, posons :

$$C_{i,j}(r) = f(a + re_i + re_j) - f(a + re_i) - f(a + re_j) + f(a).$$

- Fixons un réel r vérifiant $0 < r \leqslant r_0$.
  - ∗ Considérons l'application g définie sur $[0,1]$ par :

    $$g(t) = f(a + re_i + tre_j) - f(a + tre_j).$$

    Par composition, l'application g est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

    $$\forall t \in [0,1] \quad g'(t) = r\big(\partial_j f(a + re_i + tre_j) - \partial_j f(a + tre_j)\big).$$

    Par conséquent :

    $$C_{i,j}(r) = g(1) - g(0) = r \int_0^1 \big(\partial_j f(a + re_i + tre_j) - \partial_j f(a + tre_j)\big)\,\mathrm{d}t.$$

  - ∗ Fixons $t \in [0,1]$ et posons h l'application définie sur $[0,1]$ par :

    $$h(s) = \partial_j f(a + sre_i + tre_j).$$

    Par composition, l'application h est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

    $$\forall s \in [0,1] \quad h'(t) = r\,\partial^2_{i,j} f(a + sre_i + tre_j).$$

  - ∗ Par conséquent :

    $$C_{i,j}(r) = r^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \partial^2_{i,j} f(a + sre_i + tre_j)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t.$$

- Montrons que $\dfrac{C_{i,j}(r)}{r^2} = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \partial^2_{i,j} f(a + sre_i + tre_j)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \partial^2_{i,j} f(a)$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $\partial^2_{i,j} f$ en a, il existe un réel strictement positif $r_1 \leqslant r_0$ tel que :

  $$\forall h \in B_F(0, r_1) \quad \big|\partial^2_{i,j} f(a+h) - \partial^2_{i,j} f(a)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel r_1 ; soit $0 < r \leqslant r_1$.
Pour tous $(t,s) \in [0,1]^2$, on a $sre_i + tre_j \in B_F(0,r_1)$ et donc :

$$\left|\partial^2_{i,j} f(a + tre_i + sre_j) - \partial^2_{i,j} f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\left|\frac{C_{i,j}(r)}{r^2} - \partial^2_{i,j} f(a)\right| &= \left|\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\partial^2_{i,j} f(a + sre_i + tre_j) - \partial^2_{i,j} f(a)\right) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|\partial^2_{i,j} f(a + sre_i + tre_j) - \partial^2_{i,j} f(a)\right| \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \varepsilon \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t = \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\dfrac{C_{i,j}(r)}{r^2} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \partial^2_{i,j} f(a)$.

- Ainsi, on a :

$$\frac{C_{i,j}(r)}{r^2} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \partial^2_{i,j} f(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{C_{j,i}(r)}{r^2} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \partial^2_{j,i} f(a),$$

or $C_{i,j} = C_{j,i}$. Il vient alors de l'unicité de la limite que $\partial^2_{i,j} f(a) = \partial^2_{j,i} f(a)$, ce qui termine la preuve.

Exercice 11

1. - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car elle est rationnelle. Le calcul donne, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

et puisque $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

   - Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = r\left|\sin\theta\left(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\,\sin^2\theta - \sin^4\theta\right)\right| \leqslant 6r = 6\|(x,y)\|_2.$$

Cette dernière inégalité est encore valable pour $(x,y) = (0,0)$. On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par suite, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = -f(y,x)$, et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ sur $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction f a toutes ses dérivées partielles continues et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

Cette dernière expression est encore valable lorsque $y = 0$. Par suite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,x) = x$, et donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Comme le montre cet exercice, l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^2$ est importante dans l'énoncé du théorème de Schwarz.

Exercice 12 Notons $V(x,y) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big)$.

Le calcul donne $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = -y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque $\frac{\partial V_1}{\partial y} \neq \frac{\partial V_2}{\partial x}$, le champ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 13 On a $\frac{\partial \overrightarrow{V_1}}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial \overrightarrow{V_2}}{\partial x}(x,y)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La condition nécessaire de Schwarz pour que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel est donc vérifiée.

Si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En fixant un $y \in \mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe alors une constante $\varphi(y)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2 y + \varphi(y).$$

Puisque f est classe $\mathcal{C}^1$, il vient que la fonction φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$, car $\varphi(y) = f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, nécessairement $x^2 + \varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique qu'il existe une constante β telle que :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2} + \beta.$$

Il est alors facile de vérifier que $\overrightarrow{V} = \nabla f$, où $f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2}\cdot$

Exercice 14 Les fonctions $(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto r\sin\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Il s'ensuit que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a, par la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \quad \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \quad \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ce qui signifie, rappelons le :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \tag{2}$$

2. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc on peut lui appliquer la relation (1).

   Il vient ainsi, en notant $h : (r,\theta) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, que pour tout (r,θ) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta).$$

   Compte tenu de la relation (1) et du théorème de Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\\ &\qquad + \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}.\end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\\ &\qquad - \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}.\end{aligned}$$

   Par conséquent, en additionnant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2},$$

   ce qui signifie que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a :

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

S'entraîner et approfondir

14.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

14.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

1. À quelle condition sur α la fonction f est-elle continue ?
2. Lorsque f est continue, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   À quelle condition la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

14.3 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$.
On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \ell.$$

On note alors $f'(z_0)$ cette limite.
En posant $P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ et $Q(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, montrer que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable et f' continue si, et seulement si, les fonctions P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot$$

Ces relations sont connues sous de le nom d'*équations de Cauchy-Riemann.*

14.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pour $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$, on note $D_h f(a)$ la dérivée en 0, si elle existe, de l'application $f : t \mapsto f(a+th)$.

1. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\mathrm{D}_{(u,v)} f\,(0,0)$.
2. Trouver une fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que $f\big(x, g(x)\big)$ soit constante non nulle. La fonction f est-elle continue ?

14.5 Démontrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$ ont un prolongement sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{e^y - e^x}{y-x}$
2. $f(x,y) = \dfrac{\sin(y) - \sin(x)}{y-x}$

Indication. Dans les deux cas, exprimer $f(x,y)$ à l'aide de $g(y-x)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆ **14.6** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x}\cdot$$

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $G(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'\big(x + s(y-x)\big)\,\mathrm{d}s$ est un prolongement de F.
2. Démontrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Indication. Pour démontrer la continuité des dérivées partielles de G, on utilisera la caractérisation séquentielle, ainsi que le théorème de convergence dominée.

14.7 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

14.8 On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un **cône positif** si pour tout $x \in C$ et $t > 0$ on a $tx \in C$.

Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est **homogène de degré $\boldsymbol{\alpha}$**, ou encore **$\boldsymbol{\alpha}$-homogène**, si :

$$\forall (x,t) \in C \times \mathbb{R}_+^* \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On suppose dans la suite que C est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C,\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si la fonction f est homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α si, et seulement si :

$$\forall x \in C \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha\, f(x). \qquad \textit{(relation d'Euler)}$$

⋆ **14.9** On note $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n\cos(ny)}{\sqrt{n}}\cdot$

Démontrer que f définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

Indication. On pourra exprimer les dérivées partielles de f en fonction de la somme de la série entière $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}z^n$.

⋆ **14.10** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t,y)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

1. Calculer les dérivées partielles de g.
2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

   Indication. Pour démontrer la continuité de $\frac{\partial g}{\partial y}$, on utilisera la caractérisation séquentielle, ainsi que le théorème de convergence dominée.

14.11 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que deux fonctions $\alpha:I\to\mathbb{R}$ et $\beta:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

En utilisant l'exercice 14.10, démontrer que $F:x\mapsto\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F'.

⋆ **14.12** Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soit $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans U et telle que $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$. Montrer que l'on a :

$$f(b)-f(a)=\int_0^1\big(\nabla f\big(\gamma(t)\big)\ \big|\ \gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose $\nabla f=0$ et $U=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid r<\big\|(x,y)\big\|_2<R\big\}$, où $0<r<R$. Démontrer que la fonction f est constante.

14.13 Montrer que le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par :

$$V(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

vérifie $\dfrac{\partial V_1}{\partial y}=\dfrac{\partial V_2}{\partial x}$, mais ne dérive pas d'un potentiel (voir page 829).

Indication. Considérer l'arc paramétré par $t\mapsto(\cos t,\sin t)$ et utiliser la première question de l'exercice 14.12.

⋆ **14.14 Théorème de Poincaré**

Soit P et Q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Démontrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\nabla f = (P, Q).$$

Indication. Si f existe, alors $f(x,y) - f(0,0) = \int_0^1 \nabla f(tx,ty) \cdot (x,y)\,\mathrm{d}t$.

⋆ **14.15** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, c'est-à-dire une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Démontrer que l'application $r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

Indication. On pourra utiliser l'exercice 14.14

⋆ **14.16** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$ tels que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(tx,ty) = t^k f(x,y) \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (\star)$$

1. Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y), \qquad (1)$$

et

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = k(k-1)f(x,y). \qquad (2)$$

2. Soit $h : \theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$. Vérifier que $h'' + k^2 h = 0$.
3. En déduire que f est une fonction polynomiale.
4. Expliciter f.

Solution des exercices

14.1 1. Par les théorèmes généraux, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :

$$\left|f(x,y)\right| = r\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\right| \leqslant r.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left|f(x,y)\right| \leqslant \left\|(x,y)\right\|_2.$$

La continuité de f en $(0,0)$ est alors immédiate.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,0) = 0$. On a également $f(0,0) = 0$. Par conséquent, f admet une première dérivée partielle en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. Si f était de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(t,t)$ serait dérivable en 0, ce qui n'est pas le cas puisque $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t,t) = |t|$. Donc que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

14.2 1. • Pour que f soit continue, il est nécessaire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x,x) = 0$.

On a, pour $x > 0$:

$$f(x,x) = \frac{x^{2(1-\alpha)}}{2^\alpha}.$$

Il s'ensuit que $\alpha < 1$ est une condition nécessaire pour que f soit continue.

• Supposons $\alpha < 1$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :

$$\left|f(x,y)\right| = r^{2(1-\alpha)}\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\right| \leqslant r^{2(1-\alpha)}.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left|f(x,y)\right| \leqslant \left\|(x,y)\right\|_2^{2(1-\alpha)}.$$

La continuité de f en $(0,0)$ est alors immédiate.

En conclusion, f est continue si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2. • Soit $\alpha < 1$. Puisque $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f admet une première dérivée partielle nulle en $(0,0)$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

D'après le théorème fondamental, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\mathrm{d}f(0,0)$ est nulle. Par ailleurs, la fonction $\varphi : t \mapsto f\big(t(1,1)\big)$ est dérivable et sa dérivée en 0 est $\mathrm{d}f(0,0) \cdot (1,1) = 0$. En particulier, au voisinage de 0, on a $|\varphi(t)| = \mathrm{o}(t)$. Cependant, $\left|\varphi(t)\right| = |t|^{2(1-\alpha)} \frac{1}{2^\alpha}$. Par conséquent, au voisinage de 0, on a $|\varphi(t)| = \mathrm{o}(t)$ si, et seulement si, $\alpha < 1/2$.

• Supposons $\alpha < 1/2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 + (1-2\alpha)x^2 y}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}.$$

En majorant $|x|$ et $|y|$ par $\|(x,y)\|_2$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2(1-\alpha)\frac{\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^{2\alpha+2}} = 2(1-\alpha)\|(x,y)\|^{1-2\alpha}$$

Cette inégalité est valable pour $(x,y)=(0,0)$. On en déduit la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. De même, par symétrie, on la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, $\alpha < 1/2$.

14.3 • Supposons que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Par définition $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$.

Pour h réel non nul, on a au voisinage de 0 :

$$\frac{P(x_0+h,y_0)-P(x_0,y_0)}{h} + i\,\frac{Q(x_0+h,y_0)-Q(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(z_0).$$

Puisqu'une fonction à valeurs complexes n'a de limite que si les parties réelle et imaginaire ont des limites finies, il vient que les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont définies en (x_0,y_0) et :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = f'(z_0).$$

De même, pour h réel non nul, on a au voisinage de 0 :

$$\frac{Q(x_0,y_0+h)-Q(x_0,y_0)}{h} - i\,\frac{P(x_0,y_0+h)-P(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(z_0).$$

On en conclut de même que les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en (x_0,y_0) et :

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = f'(z_0).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire des deux expressions de $f'(z_0)$, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(y_0,z_0). \qquad (\star)$$

• Si de plus f' est continue sur U, alors d'après ce qui précède :

$$\frac{\partial P}{\partial x} : (x,y) \mapsto \operatorname{Re} f'(x+iy)$$

est continue. On démontre de même que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ est continue. Les relations $(\star)$ donnent que $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ le sont également. Ainsi, les fonctions P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$.

- Supposons que les fonctions P et Q soient de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient les relations $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

  Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Pour $h = k + i\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$, on a voisinage de 0 d'après le théorème fondamental :

$$P(x_0+k, y_0+\ell) = P(x_0+k, y_0+\ell) + k\,\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + \ell\,\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + \mathrm{o}\big((k,\ell)\big)$$

$$Q(x_0+k, y_0+\ell) = Q(x_0+k, y_0+\ell) + k\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + \ell\,\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + \mathrm{o}\big((k,\ell)\big).$$

  En multipliant la seconde relation par i et en l'ajoutant à la première, il vient :

$$f(z_0+h) = f(z_0) + k\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(x_0,y_0) + \ell\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)(x_0,y_0) + \mathrm{o}\big((k,\ell)\big).$$

  Compte tenu des relations $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, on obtient au voisinage de 0 :

$$f(z_0+h) = f(z_0) + (k+i\ell)\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(x_0,y_0) + \mathrm{o}\big((k,\ell)\big),$$

  c'est-à-dire :

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(x_0,y_0) + \mathrm{o}(h).$$

  On en déduit, lorsque $h \neq 0$:

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(x_0,y_0).$$

  Il s'ensuit que f est $\mathbb{C}$-dérivable et $f'(z_0) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$.

  Enfin, de l'expression :

$$\forall z \in U \quad f'(z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$$

  on obtient par composition et le fait que P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$, que f' est continue.

14.4 1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Il est immédiat que $D_{(0,0)}f(0,0) = 0$.

Si $v = 0$ et $u \neq 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(tu,tv) = 0$. Ainsi, par définition, on a $D_{(u,0)}f(0,0) = 0$.

Si $v \neq 0$, on a pour tout $t \neq 0$: $\dfrac{f(tu,tv)}{t} = \dfrac{u^2 v}{t^2u^4 + v^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{u^2}{v}\cdot$

Par suite, $D_{(u,v)}f(0,0)$ est définie et vaut $\frac{u^2}{v}\cdot$

En conclusion, $D_{(u,v)}f(0,0)$ existe pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

$$f\left(x,x^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

et donc que f n'est pas continue en 0.

14.5 1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :

$$f(x,y) = e^x \frac{e^{y-x} - 1}{y - x} = e^x\,\varphi(y-x),$$

où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction φ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{t^n}{(n+1)!}$, et donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, les fonctions $(x,y) \mapsto e^x$ et $(x,y) \mapsto \varphi(y-x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{f}(x,y) = e^x \varphi(y-x)$$

définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ de f à $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :

$$f(x,y) = 2\cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{y-x} = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\psi\left(\frac{y-x}{2}\right),$$

où ψ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ψ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,t^{2n}$, donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, les fonctions $(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$ et $(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{f}(x,y) = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ de f à $\mathbb{R}^2$.

14.6 1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = (y-x)\int_0^1 f'\big(x + s(y-x)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Donc, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$G(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + s(y-x)\big)\,\mathrm{d}s.$$

est un prolongement de F.
Lorsque $x = y$:

$$G(x,y) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}s = f'(x).$$

2. Démontrons que G est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Démontrons que $\frac{\partial G}{\partial x}$ est définie. Pour cela fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons la fonction $h : (x,s) \mapsto f'\big(x+s(y-x)\big)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $s \mapsto f'\big(x+s(y-x)\big)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
  - ∗ Pour tout $s \in [0,1]$, l'application $x \mapsto f(x,s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,s) = (1-s)\, f''\big(x+s(y-x)\big).$$
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $s \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,s)$ est continue.
  Soit $a > |y|$. La fonction continue $|f''|$ est majorée par une constante M sur le segment $[-a,a]$ contenant y et, si $|x| \leqslant a$, tous les $x+s(y-x)$, pour $s \in [0,1]$. Il s'ensuit que :
  $$\forall x \in [-a,a] \quad \forall s \in [0,1] \quad \Big|(1-s)f''\big(x+s(y-x)\big)\Big| \leqslant (1-s)\, M \leqslant M.$$
  La fonction constante M étant intégrable sur le segment $[0,1]$, nous avons une condition de domination sur tout segment.

  En conclusion, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre nous donne la dérivabilité de l'application $x \mapsto G(x,y)$, c'est-à-dire l'existence de $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 (1-s)\, f''\big(x+s(y-x)\big)\, \mathrm{d}s.$$
  Par symétrie, $\frac{\partial G}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(y,x)$.
- Démontrons la continuité de l'application $\frac{\partial G}{\partial x}$.
  Nous ne pouvons pas utiliser le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre, puisque ce dernier, dans la forme qui est au programme, suppose que le paramètre soit dans un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous allons nous inspirer de la démonstration du dit théorème.
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour démontrer la continuité de $\frac{\partial G}{\partial x}$ en (x,y), utilisons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tendant vers (x,y). Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{array}{rccl} g_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & (1-s)f''\big(x_n+s(y_n-x_n)\big). \end{array}$$
  - ∗ Puisque f'' est une fonction continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue, par opérations sur les fonctions continues.
  - ∗ Pour tout $s \in [0,1]$, par continuité de f'' et par l'hypothèse de convergence de la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
  $$g_n(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-s)f''\big(x+s(y-x)\big) = g(s).$$
  Là encore par opérations sur les fonctions continues, il vient que la fonction g est continue.

- $*$ Puisque la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. Il existe donc un réel $a\geqslant 0$ tel qu'elle soit à valeurs dans $[-a,a]^2$. La fonction continue f'' est bornée sur le segment $[-a,a]$. Notons M un majorant de $|f''|$ sur $[-a,a]$. Par convexité de $[-a,a]$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $s\in[0,1]$, on a $x_n+s(y_n-x_n)\in[-a,a]$. Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall s\in[0,1]\quad \big|g_n(t)\big|\leqslant(1-s)\big|f''\big(x_n+s(y_n-x_n)\big)\big|\leqslant M.$$

  On a donc une domination par la fonction constante M, qui est intégrable sur le segment $[0,1]$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées. Par suite :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_n,y_n)=\int_{[0,1]} g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{[0,1]} g=\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\cdot$$

On en déduit que la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (x,y). Cela étant vrai pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue.

Par symétrie, $\frac{\partial g}{\partial y}$ est également une fonction continue. En conclusion, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

14.7

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $x\mapsto f(x,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc $x\mapsto|x|^{2(\alpha-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela impose $2\alpha-2>1$, c'est-à-dire $\alpha>3/2$.
- Si $\alpha>3/2$, alors la fonction $\varphi : x\mapsto|x|^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x)=\varepsilon(x)\alpha|x|^{\alpha-1}$, où $\varepsilon(x)=1$ si $x\geqslant 0$ et $\varepsilon(x)=-1$ sinon. Il s'ensuit, du fait que $f(x,y)=\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x^2+y^2}$, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\varphi(y)\,\frac{\varphi'(x)(x^2+y^2)-2x\varphi(x)}{(x^2+y^2)^2}\cdot$$

  En posant $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, il vient que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=r^{2\alpha-3}|\sin\theta|^\alpha\big(\varepsilon(x)\alpha|\cos\theta|^{\alpha-1}-2|\cos\theta|^\alpha\cos\theta\big)$$

  et donc :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant r^{2\alpha-3}(\alpha+2).$$

  Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$. Par ailleurs, la fonction $x\mapsto f(x,0)$ est nulle, donc, par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en 0.

  Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en 0.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, $\alpha>3/2$.

14.8 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$ une fonction α-homogène et $t > 0$. Considérons $h : x \mapsto f(tx)$. Pour tout $x \in C$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

Si de plus f est α-homogène, on a $h(x) = t^\alpha f(x)$ et :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

2. • Supposons que f soit α-homogène.
Soit $x \in C$. En dérivant par rapport à t la relation $f(tx) = t^\alpha f(x)$, il vient :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

En particulier, pour $t = 1$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$

• Supposons que f vérifie la relation d'Euler. Soit $x \in C$; posons $g : t \mapsto f(tx)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, car C est un cône, et de classe $\mathcal{C}^1$ par composition. Ainsi :

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

D'après la relation d'Euler, $tg'(t) = \alpha g(t)$ pour tout $t > 0$. L'intégration de l'équation différentielle $ty' - \alpha y = 0$ est immédiate :

$$\forall t > 0 \quad f(tx) = g(t) = t^\alpha g(1) = t^\alpha f(x).$$

Par suite, la fonction f est α-homogène.

14.9 • Il est clair que $U =]-1, 1[\times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(y) = \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}\cdot$$

∗ Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\bigl|u_n(y)\bigr| \leqslant \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \leqslant |x|^n.$$

La série géométrique $\sum |x|^n$ étant convergente, car $|x| < 1$, on en déduit par comparaison la convergence simple de la série $\sum u_n$. Cela prouve également que f est bien définie sur U.

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad u_n'(y) = -\sqrt{n}\, x^n \sin(ny).$$
Par croissances comparées, on a $n^2\sqrt{n}|x|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi par comparaison aux exemples de Riemann, la série $\sum \sqrt{n}\,|x|^n$ est convergente. Comme :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \big|u_n'(y)\big| \leqslant \sqrt{n}\,|x|^n,$$
on peut conclure quant à la convergence normale, donc uniforme, de la série $\sum u_n'$.

* Il vient donc que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie en (x,y) pour tout $y \in \mathbb{R}$ et :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \sin(ny).$$

• Il vient du point précédent que :
$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{Im}\Big(g\big(x\,e^{iy}\big)\Big),$$
où g est la fonction définie sur le disque $D_O(0,1)$ de $\mathbb{C}$ par :
$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} z^n.$$
Cela provient du fait que le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n} z^n$ est supérieur ou égal à 1, car la série $\sum \sqrt{n}|z|^n$ est convergente pour tout z vérifiant $|z| < 1$ comme nous l'avons déjà été remarqué plus haut.
Puisque l'application :
$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x\,e^{iy} \end{array}$$
est à valeurs dans le disque ouvert D_O de centre 0 et de rayon 1, et comme g, somme d'une série entière, est continue sur D_O, on en déduit par composition que l'application $(x,y) \mapsto g\big(xe^{iy}\big)$ est continue sur U. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est une fonction continue sur U.

• Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $x \in]-1,1[$ la série $\sum \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$ converge, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}\, x^n$ est supérieur ou égal à 1. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie en (x,y) pour tout $x \in]-1,1[$ et :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \cos(ny) = \operatorname{Re}\Big(g\big(xe^{iy}\big)\Big).$$
On démontre la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur U de la même manière que pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Nous avons ainsi prouvé que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

14.10 1. Calculons les dérivées partielles de g. Il est immédiat que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$$

Comme $g(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\forall y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,y) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $I = [0,x]$ si $x > 0$ et $I = [x,0]$ sinon.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t,y)$ est continue ;
- Pour tout $t \in I$, l'application $y \mapsto f(t,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- Si M est un majorant de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ sur $I \times [-a,a]$, (il en existe un car la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est continue sur $I \times [-a,a]$, qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$), on a :

$$\forall (t,y) \in I \times [-a,a] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant M$$

et la fonction constante M est intégrable sur le segment I.

On en déduit, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, que la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t,y)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc dérivable et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

2. Démontrons la continuité des dérivées partielles. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Par ailleurs, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en posant le changement de variable $t = xu$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u.$$

Pour prouver que $\frac{\partial g}{\partial y}$ est continue, montrons que $\Phi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u$ est continue. Nous ne pouvons pas utiliser le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre, puisque ce dernier, dans la forme qui est au programme, suppose que le paramètre soit dans un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous allons nous inspirer de la démonstration du dit théorème.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour démontrer la continuité de Φ en (x,y), nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Soit donc $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, convergeant vers (x,y). Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x_n u, y_n). \end{array}$$

Puisque la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. Il existe donc un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite soit à valeurs dans $K = [-a,a]^2$. Fixons un tel a.

Par continuité, la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est majorée par une constante M sur K, car K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_n u, y_n)$ est continue sur $[0,1]$ par continuité de l'application $\frac{\partial f}{\partial y}$ et par composition des applications continues ;
- toujours par continuité de l'application $\frac{\partial f}{\partial y}$ et par composition des limites, pour tout $u \in [0,1]$, on a :

$$f_n(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n u, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y),$$

  et l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y)$ est continue sur $[0,1]$;
- enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0,1]$, on a $(x_n u, y_n) \in K$ et par conséquent :

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N} \times [0,1] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n u, y_n)\right| \leqslant M.$$

Ainsi, puisque la fonction constante M est intégrable sur le segment $[0,1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée. Il s'ensuit :

$$\Phi(x_n, y_n) = \int_0^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y)\,\mathrm{d}u = \Phi(x,y).$$

La conclusion annoncée en découle.

14.11 On conserve les notations de l'exercice 14.10.

- Puisque g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et que la fonction β est de classe $\mathcal{C}^1$, en vertu du corollaire 12 de la page 821, l'application F_1 définie par :

$$F_1(x) = g\big(\beta(x), x\big)$$

  est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in I$, on a, à l'aide de l'exercice précité :

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \beta'(x)\,\partial_1 g\big(\beta(x), x\big) + \partial_2 g\big(\beta(x), x\big) \\ &= \beta'(x)\, f\big(\beta(x), x\big) + \int_0^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

- De même, l'application $F_2 : x \mapsto g\big(\alpha(x), x\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :

$$F_2'(x) = \alpha'(x)\, f\big(\alpha(x), x\big) + \int_0^{\alpha(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t.$$

- Par conséquent, la fonction $F = F_1 - F_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :

$$F'(x) = \beta'(x)\, f\big(\beta(x), x\big) - \alpha'(x)\, f\big(\alpha(x), x\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t.$$

14.12 1. Puisque f et γ sont de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le corollaire 12 de la page 821 et, d'après le théorème 11 de la page 820, on a :

$$\varphi'(t) = \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t) \big) \,.$$

Par suite :

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t) \big)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t) \big)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas explicitement de γ, mais seulement $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$.

2. Vérifions que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, en notant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \big\|(x,y)\big\|_2 - r \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & R - \big\|(x,y)\big\|_2, \end{array}$$

qui sont des applications continues sur $\mathbb{R}^2$, du fait que U est l'intersection de $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\psi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, qui sont par théorème des ouverts, il vient que U est un ouvert.

Soit $a_0 = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ et $a_1 = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1)$, avec $(r_0, r_1) \in \,]r, R[^2$, deux points de U.

Considérons une fonction quelconque $\rho : [0,1] \to \,]r,R[$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\rho(0) = r_0$ et $\rho(1) = r_1$. On peut par exemple prendre $\rho : t \mapsto (1-t)r_0 + tr_1$. Considérons également une fonction $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta(1) = \theta_1$. On peut par exemple prendre $\theta : t \mapsto (1-t)\theta_0 + t\theta_1$.

La fonction $\gamma : t \mapsto \big(\rho \cos(\theta(t)), \rho \sin(\theta(t))\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs U, car, pour $t \in [0,1]$, on a $\big\|\gamma(t)\big\|_2 = \rho(t) \in \,]r,R[$. D'après la première question, puisque $\gamma(0) = a_0$ et $\gamma(1) = a_1$, on a :

$$f(a_1) - f(a_0) = \int_0^1 \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t) \big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La conclusion est alors immédiate.

14.13 Notons pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$V(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big).$$

Le calcul donne :

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y)$$

et donc f vérifie la propriété demandée.

Supposons que V dérive d'un potentiel f. D'après l'exercice 14.12 de la page 847, on aurait :

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} \nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t = -1.$$

Il s'ensuit que

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} -1\,\mathrm{d}t = -2\pi,$$

ce qui est impossible. Par suite f ne dérive pas d'un potentiel.

14.14 On peut chercher une fonction f telle que $f(0,0) = 0$.

- Supposons disposer d'une telle fonction. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) = \int_0^1 \nabla f(tx,ty) \cdot (x,y)\,\mathrm{d}t,$$

(voir par exemple, l'exercice 14.12 de la page 847) et donc par hypothèse :

$$f(x,y) = \int_0^1 \big(x\,P(tx,ty) + y\,Q(tx,ty)\big)\,\mathrm{d}t.$$

- Cela nous mène à poser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x\int_0^1 P(tx,ty)\,\mathrm{d}t + y\int_0^1 Q(tx,ty)\,\mathrm{d}t.$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(tx,ty)\,\mathrm{d}t$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

  Pour cela posons $F(x,t) = P(xt, yt)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

  * Puisque P est continue, par opérations sur les fonctions continues, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$ que l'application $t \mapsto P(tx,ty)$ est continue. En particulier, l'application $t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur le segment $[0,1]$.
  * Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $t \in [0,1]$ l'application $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = t\,\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty).$$

  L'application $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est, à l'aide des hypothèses, continue.
  * Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\frac{\partial P}{\partial x}$ est continue sur $K = [-a,a] \times [-|y|,|y|]$, et puisque K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|$ est majorée par une constante M sur K. Par suite :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \forall t \in [0,1] \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|t\,\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)\right| \leqslant \left|\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)\right| \leqslant M.$$

  La fonction constante égale à M étant intégrable sur le segment $[0,1]$, on a donc une domination sur tout segment de $\frac{\partial F}{\partial x}$ par une fonction intégrable.

Par théorème, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \int_0^1 t\,\frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty)\,\mathrm{d}t.$$

- On démontre de la même manière que $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 Q(tx, ty)\,\mathrm{d}t$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Psi'(x) = \int_0^1 t\,\frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{hypothèse}}}{=} \int_0^1 t\,\frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty)\,\mathrm{d}t.$$

- Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 P(tx, ty)\,\mathrm{d}t + x\int_0^1 t\,\frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty)\,\mathrm{d}t + y\int_0^1 t\,\frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \underbrace{P(tx, ty)}_{g(t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,\underbrace{\left(x\,\frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) + y\,\frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty)\right)}_{g'(t)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \big(g(t) + tg'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \Big[t\,g(t)\Big]_0^1 = P(x, y).\end{aligned}$$

- De même $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Du fait que P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et elle répond au problème.

14.15 Soit f une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que l'application :

$$F : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, avec la règle de la chaîne :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad F'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right)\mathrm{d}t. \quad (*)$$

Démontrons que la fonction F est constante.

- **Première méthode**
  Puisque :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

  il existe en vertu de l'exercice 14.14, une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot \qquad (\star)$$

Compte tenu des relations $(\star)$, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \int_0^{2\pi} \Big(\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\cos(t)\,\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos t, r\sin t) - \sin(t)\,\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \underbrace{\Big(r\cos(t)\,\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos t, r\sin t) - r\sin(t)\,\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\Big)}_{h'(t)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

où $h : t \mapsto g\big(r\cos t, r\sin t\big)$. Il s'ensuit que :

$$F'(r) = \frac{1}{r}\Big[g\big(r\cos t, r\sin t\big)\Big]_0^{2\pi} = 0.$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent elle est constante sur $[0, +\infty[$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

- **Seconde méthode**

  On peut démonter que F est constante sans faire appel à l'exercice 14.14. Pour cela, une intégration par parties qui est facile à justifier donne, à l'aide de la règle de la chaîne, pour $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t = &\underbrace{\Big[\sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\Big]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ par } 2\pi\text{-périodicité}} \\
&+ r\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&- r\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\cos(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t = &\underbrace{\Big[-\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\Big]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ par } 2\pi\text{-périodicité}} \\
&- r\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&+ r\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant, on obtient :

$$\begin{aligned}
F'(r) = r\int_0^{2\pi} \bigg(&\sin^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos t, r\sin t) \\
&-2\cos(t)\,\sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos t, r\sin t) + \cos^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos t, r\sin t)\bigg)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir de l'expression $(*)$ de F', le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$F''(r) = \int_0^{2\pi} \Bigg(\cos^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos t, r\sin t) + 2\cos(t)\,\sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos t, r\sin t) + \sin^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos t, r\sin t)\Bigg)\,\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\Delta f = 0$, on obtient, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$$rF''(r) + F'(r) = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy'' + y' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\mathcal{S} = \big\{x \mapsto \alpha \ln x + \beta\,;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(r) = \alpha \ln r + \beta$ pour tout $r > 0$. Du fait que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\alpha = 0$. Compte tenu de $F(0) = 2\pi f(0,0)$, on obtient :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad F(r) = 2\pi f(0,0).$$

14.16 Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, qui vérifie :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

est *harmonique*, (*cf.* l'exemple 2 de la page 826 et l'exercice 14.15 de la page 848). Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ et k-*homogène* (*cf.* l'exercice 14.8 de la page 846), si :

$$\forall x \in U \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad tx \in U \quad \text{et} \quad f(tx) = t^k f(x).$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2$ et $k > 0$, elle est k-homogène si, et seulement si, l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(tx) = t^k f(x).$$

Le but de l'exercice est donc de déterminer les fonctions de $\mathbb{R}^2$ qui sont à la fois k-homogènes et harmoniques.

1. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et introduisons $g : t \mapsto f\big(tx, ty\big)$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

   - La fonction $t \mapsto (tx, ty)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car ses fonctions composantes sont polynomiales. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème de dérivation en chaîne. Il s'ensuit :

     $$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty). \qquad (*)$$

     Par ailleurs, puisque $g(t) = t^k f(x, y)$, on a :

     $$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g'(t) = kt^{k-1} f(x, y). \qquad (**)$$

     En particulier :

     $$g'(1) = kf(x, y) \qquad \text{et} \qquad g'(1) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

     ce qui établit la première égalité.

- À partir de la relation $(*)$, la dérivation en chaîne donne, en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g''(t) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty).$$

De la relation $(**)$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g''(t) = \begin{cases} k(k-1)t^{k-2} f(x,y) & \text{si } k \geqslant 2\ ; \\ 0 & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

En particulier :

$$g''(1) = k(k-1) f(x,y) \quad \text{et} \quad g''(1) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

ce qui établit la seconde égalité.

2. Notons $\gamma : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$, définie sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $h = f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Par dérivation en chaîne il vient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad h'(\theta) = -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(\theta)\big) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(\theta)\big).$$

En dérivant à nouveau, ce qui est possible car f est de classe $\mathcal{C}^2$, il vient, en utilisant le théorème de Schwarz, que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad h''(\theta) = -\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(\theta)\big) - \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(\theta)\big)$$
$$+ \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(\theta)\big) - 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(\gamma(\theta)\big) + \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(\theta)\big)$$

Par la relation $(*)$, il vient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad -\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(\theta)\big) - \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(\theta)\big) = -k\, h(\theta).$$

De plus, puisque $\Delta f = 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(\theta)\big) - 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(\gamma(\theta)\big) + \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(\theta)\big) \\
&\quad = \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(\theta)\big) - 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(\gamma(\theta)\big) + \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(\theta)\big) - \Delta f\big(\gamma(\theta)\big) \\
&\quad = -\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(\theta)\big) - 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(\gamma(\theta)\big) - \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(\theta)\big) \\
&\quad = -k(k-1)\, h(\theta),
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence de la relation (2).
Par suite, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$h''(\theta) = -k(k-1)\, h(\theta) - k\, h(\theta) = -k^2 h(\theta)$$

3. • Puisque h est solution de l'équation différentielle $y'' + k^2 y = 0$ (équation linéaire homogène, du second ordre, à coefficients constants), il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad h(\theta) = \alpha\cos(k\theta) + \beta\sin(k\theta).$$

• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $(x,y) = t(\cos\theta, \sin\theta)$ et donc par homogénéité $f(x,y) = t^k h(\theta)$. D'après l'expression trouvée plus haut :

$$f(x,y) = \alpha t^k \cos(k\theta) + \beta t^k \sin(k\theta).$$

Par ailleurs :

$$(x+iy)^k = \left(te^{i\theta}\right)^k = t^k\cos(k\theta) + it^k\sin(k\theta),$$

ce qui donne en séparant parties réelles et imaginaires :

$$t^k\cos(k\theta) = P_k(x,y) \quad \text{et} \quad t^k\sin(k\theta) = Q_k(x,y),$$

où

$$P_k(x,y) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^k\big) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j}(-1)^j x^{k-2j} y^{2j}$$

$$Q_k(x,y) = \operatorname{Im}\big((x+iy)^k\big) = \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k}{2j+1}(-1)^j x^{k-2j-1} y^{2j+1}.$$

• En conclusion, $f = \alpha P_k + \beta Q_k$. Les fonctions P_k et Q_k étant clairement polynomiales, la fonction f est polynomiale.

4. Il est clair que l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions vérifiant $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrons que $\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\{P_k, Q_k\}$.
D'après la question précédente, $\mathcal{S} \subset \operatorname{Vect}\{P_k, Q_k\}$. Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de vérifier que P_k et Q_k sont des solutions de $(\star)$.

• Les fonctions P_k et Q_k étant polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^2$.
• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\big(t(x+iy)\big)^k = t^k(x+iy)^n = t^k\big(P_k(x,y) + iQ_k(x,y)\big)$$

$$\big(t(x+iy)\big)^k = \big(tx+ity\big)^k = P_k(tx,ty) + iQ_k(tx,ty),$$

et donc :

$$P_k(tx,ty) = t^k P_k(x,y) \qquad \text{et} \qquad Q_k(tx,ty) = t^k Q_k(x,y).$$

Cela montre que les fonctions P_k et Q_k sont k-homogènes.

- En posant $g : (x,y) \mapsto (x+iy)^k$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

  $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = k(k-1)(x+iy)^{k-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -k(k-1)(x+iy)^{k-2}$$

  et puisque $g = P_k + iQ_k$:

  $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 Q_k}{\partial x^2}(x,y)$$
  $$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 P_k}{\partial y^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 Q_k}{\partial y^2}(x,y).$$

  Ainsi, $0 = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \Delta P_k(x,y) + i\Delta Q_k(x,y)$, ce qui prouve que P_k et Q_k sont harmoniques.

En conclusion, P_k et Q_k vérifient $(*)$. L'égalité $\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\big(P_k, Q_k\big)$ en découle.

Chapitre 15 : Applications du calcul différentiel

Applications du calcul différentiel



Dans ce chapitre, p est un entier naturel non nul et U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

I Extrema

1 Généralités

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

- La fonction f admet un **maximum (global)** en a si :
$$\forall x \in A \quad f(x) \leqslant f(a).$$
- La fonction f admet un **minimum (global)** en a si :
$$\forall x \in A \quad f(x) \geqslant f(a).$$
- La fonction f admet un **extremum (global)** en a si f admet un maximum ou un minimum en a.

Définition 2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.

- La fonction f admet un **maximum local** en a s'il existe un ouvert V contenant a tel que $f_{|A\cap V}$ admette un maximum en a.
- La fonction f admet un **minimum local** en a s'il existe un ouvert V contenant a tel que $f_{|A\cap V}$ admette un minimum en a.
- La fonction f admet un **extremum local** en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Remarques

- Il est clair si f admet un extremum (global) en a, alors elle admet un extremum local.

- Si $a \in A$, la fonction f admet un **minimum local dans la direction** $\boldsymbol{v} \in E \setminus \{0\}$ si la fonction de la variable réelle $t \mapsto f(a+tv)$ admet un minimum local en 0. Si f admet un minimum local en a, elle admet en a un minimum local dans toutes les directions. On définit de même un maximum et un extremum dans une direction donnée.

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet un minimum en $a \in A$, on cherche à démontrer que $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ est à valeurs positives sur A.

Remarque On adaptera *mutatis mutandis* pour démontrer que f admet un maximum en a.

p.892 **Exercice 1** La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2-x^3-x^2y^5$ admet-elle un extremum local (respectivement global) au point $(0,0)$?

2 Extrema sur un ouvert

Théorème 1

Soit une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en a, alors $\nabla f(a) = 0$.

Principe de démonstration. Remarquer que si f admet un extremum local en a, alors pour tout $h \in E$ la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto f(a+th)$ admet un extremum local en 0.

Démonstration page 892

Remarque Insistons sur le fait que le résultat précédent n'est vrai que pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un *ouvert*.

Définition 3

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le point $a \in U$ est un **point critique de f** si $\nabla f(a) = 0$.

Remarque Ainsi, les extrema d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert sont, s'ils existent, atteints en des points critiques de la fonction.

Attention Un point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum local.

Exemple Considérons la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f. Cependant, f n'admet pas d'extremum local en ce point. En effet, soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$. Il existe donc un réel $r>0$, tel que la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon r pour la norme euclidienne canonique soit incluse dans V. On a

$$f(0,0)=0<r^2=f(r,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0>-r^2=f(0,r),$$

Par suite, dans tout ouvert contenant $(0,0)$, il existe des points $(r,0)\in V$ tels que $f(r,0)>f(0,0)$ et donc f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$. De même, elle n'admet pas de minimum local en ce point.

3 Recherche d'extrema

Point méthode

Pour trouver les extrema d'une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'*ouvert* U :

1. on cherche les points critiques,
2. puis on étudie la nature de chacun des points critiques.

Il peut être utile, lorsque l'on étudie un point critique, de se ramener par translation à 0.

Exemple La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$ définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme quotient de fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est critique si, et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2(y^2-x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}=0.$$

On en déduit facilement que $(-1,0)$ et $(1,0)$ sont les seuls points critiques de f. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(1,0)-f(x,y)=1-f(x,y)=\frac{x^2+y^2+1-2x}{x^2+y^2+1}=\frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2+1}\geqslant 0.$$

On en déduit que f atteint son maximum en $(1,0)$ et que c'est le seul point où il est atteint. De même, f atteint son minimum en $(-1,0)$; ce que l'on montre soit en reprenant le raisonnement précédent, soit en remarquant que la fonction f est impaire par rapport à la première variable.

p.892 **Exercice 2** Étudier les extrema de $f:(x,y)\mapsto x^2y^2+x^2-2x$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Point méthode

Pour trouver les extrema d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathring{A}$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

1. on cherche les extrema de f atteints sur l'intérieur de A ; les points où ils sont atteints sont à chercher parmi les points critiques de $f_{|\mathring{A}}$;
2. on étudie les points de $A \setminus \mathring{A}$. Pour cela, on peut paramétrer cet ensemble.

Remarque La méthode précédente n'est évidemment à appliquer que dans le cas où A est d'intérieur non vide.

Exemple Considérons la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+xy+y^2$ définie sur $D = [1,+\infty[\times\mathbb{R}$. Il est clair que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{D} =]1,+\infty[\times\mathbb{R}$, en tant que fonction polynomiale.

Pour tout $(x,y) \in \mathring{D}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+2y.$$

Si (x,y) est un point critique de f restreinte à $\mathring{D}$, alors $x=y=0$, ce qui est impossible. Par suite, la restriction de f à $\mathring{D}$ n'a pas de point critique et les éventuels extrema ne sont pas atteint sur $\mathring{D}$.

Puisque $f(x,0) = x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la fonction f n'a pas de maximum.

Si f admet un minimum, celui-ci est atteint sur la frontière de D, car D est un fermé. Il s'agirait donc d'un minimum de la fonction $g : y \mapsto f(1,y) = y^2+y+1$ définie sur $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que g atteint son minimum une seule fois en $-1/2$.

Pour tout $(x,y) \in D$, en posant $x = 1+h$ et $y = -\frac{1}{2}+k$, on a $h \geqslant 0$ et :

$$f(x,y) - f\Big(1,-\frac{1}{2}\Big) = h^2+kh+k^2+\frac{3}{2}h = \Big(k+\frac{h}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}h(h+2) \geqslant 0.$$

Par conséquent, la fonction f atteint son minimum en $(1,-1/2)$.

Point méthode

Pour montrer que $f : A \to \mathbb{R}$ n'atteint pas un extremum en $a \in A$, on peut :

- chercher deux directions dans lesquelles f admette respectivement un minimum et un maximum en a,
- puis vérifier, en suivant ces deux directions, que dans toute boule de rayon strictement positif centrée en a la fonction f prend des valeurs strictement supérieures à $f(a)$ et des valeurs strictement inférieures à $f(a)$.

Attention Une fonction peut admettre en un point un minimum local dans toutes les directions, sans pour autant admettre un minimum local en ce point. L'exercice 4 donne un exemple d'une telle situation. Cela implique que la méthode précédente n'aboutit pas toujours.

p.893
Exercice 3 Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

p.893
Exercice 4 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (y - x^2)(y - 3x^2). \end{array}$

1. Visualiser sur un dessin (x en abscisse et y en ordonnée) les trois domaines de $\mathbb{R}^2$ où la fonction f est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la question précédente permet d'intuiter :
   - pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0 ;
   - pourtant, la fonction f ne présente pas de minimum local en 0.

4 Cas des fermés bornés

Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$, les raisonnements sont souvent allégés par le fait que l'on sait *a priori* qu'il y a un maximum et un minimum.

Exemple Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et déterminons les extrema de la fonction définie sur D par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2.$$

La fonction polynomiale f est continue sur D. Il est clair que la restriction de f à $V = \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque D est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f est continue, on en conclut que f est bornée et atteint ses bornes.
Cherchons les éventuels extrema qui seraient atteints sur l'intérieur de D. Pour cela étudions les points critiques de $f_{|V}$. Ils sont caractérisés par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y = 0. \end{cases}$$

Ce système ayant comme unique solution $x = y = 0$, il vient que $f_{|V}$ a un seul point critique $(0, 0)$.
Étudions $(0, 0)$. Pour tout $(x, y) \in D$, on a $f(x, y) = (x + y/2)^2 + 3y^3/4 \geqslant 0$. Puisque f est à valeurs positives et $f(0, 0) = 0$, la fonction f admet un minimum en $(0, 0)$.

Il est également clair que $f(x,y) = (x+y/2)^2 + 3y^3/4 > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Cela implique le minimum de f est atteint uniquement en $(0,0)$.
Le maximum de f ne peut pas être atteint sur l'intérieur de D, sinon il serait atteint au point critique $(0,0)$, ce qui est impossible car f prend des valeurs strictement positives. Par conséquent, f atteint son maximum uniquement en des points de $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 \mid x^2+y^2 = 1\right\}$ et il s'agit du maximum de $f_{|C}$.
Remarquons que C est le support de l'arc $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ défini sur $[-\pi,\pi]$. Cela conduit à considérer la fonction $g : \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ t & \longmapsto & f(\cos t, \sin t). \end{array}$

Puisque, pour $t \in [-\pi,\pi]$:

$$g(t) = \cos^2(t) + \cos(t)\,\sin(t) + \sin^2(t) = 1 + \frac{\sin(2t)}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

et $g(t) = 3/2$ si, et seulement si, $2t = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, le maximum de g vaut $3/2$ et il est atteint uniquement en $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.
En conclusion, le maximum de f est atteint exactement aux points $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

p.894

Exercice 5 Déterminer les extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ (x,y) & \longmapsto & xy\,(1-x-y)\,, \end{array}$$

où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\right\}$.

La propriété des fermés bornés peut parfois être utilisée pour établir l'existence d'extrema même lorsque la fonction est définie sur un ouvert.

p.895

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur IR^2 par :

$$f(x,y) = \frac{e^{2(x^2+y^2)}}{1+(x+y)^2}.$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$.
2. Montrer *sans calcul* que f admet un minimum.
   Indication. Introduire $r > 0$ tel que $f(m) \geqslant f(0)$ pour tout $m \in \mathrm{IR}^2 \setminus B$, où B est la boule $B_F(0,r)$. Considérer ensuite les restrictions de f à B et à $\mathrm{IR}^2 \setminus B$.
3. Étudier les extrema de f

II Applications à la géométrie

Dans cette section, $\mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée.
Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^p$ est définie par l'**équation cartésienne** $f(x_1,\dots,x_p)=0$ si $f:A\to\mathbb{R}$ est une fonction, où $A\subset\mathbb{R}^p$ et :

$$\mathcal{X}=\big\{(x_1,\dots,x_p)\in A \mid f(x_1,\dots,x_p)=0\big\}.$$

On étudie principalement dans cette section des propriétés géométriques de parties définies par une équation cartésienne.

1 Interprétations géométriques du gradient

Gradient et courbes tracées sur une partie

En physique, il est connu pour un champ dérivant d'un potentiel (champ gravitationnel, champ électrostatique, etc.), qu'en tout point, le champ est orthogonal aux lignes ou surfaces équipotentielles.
La proposition suivante précise cela.

Proposition 2

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}=\big\{x\in U \mid f(x)=0\big\}$.
Pour tout arc (I,γ) de classe $\mathcal{C}^1$ tracé sur $\mathcal{X}$, *i.e.* tel que $\gamma(I)\subset\mathcal{X}$, on a :

$$\forall t\in I\quad \big(\nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\big)=0.$$

Démonstration. D'après le théorème 11 de la page 820, la fonction $f\circ\gamma$ est dérivable et :

$$\forall t\in I\quad (f\circ\gamma)'(t)=\big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\big).$$

Par ailleurs, comme la fonction γ est à valeurs dans $\mathcal{X}$, la fonction $f\circ\gamma$ est constante, donc de dérivée nulle. La conclusion est alors immédiate. □

Remarque La propriété ci-dessus n'a évidemment d'intérêt que si le gradient au point n'est pas nul.

Le gradient « oriente dans le sens des valeurs croissantes de f »

Proposition 3

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a\in U$.
Si $\nabla f(a)\neq 0$, la fonction $t\mapsto f\big(a+t\nabla f(a)\big)$ est strictement croissante au voisinage de 0.

Démonstration. Il est immédiat que la fonction $\gamma:t\mapsto a+t\nabla f(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. L'application $t\mapsto f\big(a+t\nabla f(a)\big)$ est définie sur un intervalle ouvert centré en 0, du fait que U est un ouvert. Ainsi, d'après le théorème 11 de la page 820, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée en 0 :

$$(f\circ\gamma)'(0)=\big(\nabla f(a) \mid \nabla f(a)\big)=\big\|\nabla f(a)\big\|^2>0.$$

Ainsi, par continuité de la dérivée, l'application $t\mapsto f\big(a+t\nabla f(a)\big)$ a une dérivée à valeurs strictement positives sur un intervalle centré en 0. La conclusion est alors immédiate. □

Un exemple issu de la physique Considérons un milieu continu homogène soumis à un champ de température. On modélise cela en se donnant un ouvert $A \subset \mathbb{R}^3$ et $T : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (la température). Si l'on se place dans le cadre de la première loi de Fourier, on a :

$$\mathbf{j}_Q = -\lambda \nabla T,$$

où $\mathbf{j}_Q$ est le vecteur densité de flux thermique et λ est la conductance thermique. Ainsi, le vecteur densité de courant thermique est orthogonal aux surfaces isothermes et orienté dans le sens des températures décroissantes.

Encore une interprétation géométrique du gradient

Rappelons (voir page 809) que $(\nabla f(a) \mid h) = \mathrm{d}f(a)\cdot h$ indique les « variations de f en a dans la direction h ». De manière informelle, le gradient donne la direction dans laquelle cette variation est maximale. Précisons cela.

p.896

Exercice 7 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Si $\nabla f(a) \neq 0$, démontrer qu'alors la fonction $h \mapsto (\nabla f(a) \mid h)$ restreinte à la sphère unité admet un unique maximum. Celui-ci est le point de la sphère colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$.

2 Courbes définies par une équation

Dans toute cette section, $p = 2$.

Paramétrisation d'une courbe définie par une équation

Lorsque qu'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^2$ est définie par une équation $f(x,y) = 0$, on s'attend à ce que l'on « perde un degré de liberté », ce qui signifie, de manière informelle, qu'il existe une fonction γ d'une seule variable telle que $f(x,y) = 0$ si, et seulement s'il existe t tel que $(x,y) = \gamma(t)$. Cela n'est cependant pas toujours vrai.

Le théorème suivant donne une condition pour que la situation que nous venons de décrire soit vérifiée. Sa démonstration est hors-programme.

Théorème 4 (de paramétrisation)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, ainsi que $m_0 \in U$ et $\mathcal{X}$ l'ensemble d'équation $f(x,y) = 0$, où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si :

$$\begin{cases} f(m_0) & = & 0 \\ \nabla f(m_0) & \neq & 0, \end{cases}$$

alors il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, avec $m_0 \in V$ et $V \subset U$, ainsi qu'un arc paramétré régulier $\Gamma = (I, \gamma)$ de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, tels que l'intersection $\mathcal{X} \cap V$ est égale au support de Γ, c'est-à-dire $\gamma(I) \subset V$ et :

$$\forall (x,y) \in V \quad \big(f(x,y) = 0 \iff \exists t \in I \quad (x,y) = \gamma(t)\big).$$

Remarques

- Il n'y a pas unicité de la fonction γ. Par exemple, si V et γ vérifient la conclusion du théorème, alors V et $t \mapsto \gamma(2t)$ vérifient également la conclusion du théorème.
- Le résultat peut être affiné. On démontre qu'il existe une fonction γ vérifiant la conclusion du théorème 4 et qui est de l'une des deux formes suivantes :
$$t \mapsto \big(t, g(t)\big) \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \big(g(t), t\big),$$
avec $g : I \to \mathbb{R}$.
- Le lecteur trouvera des éléments de démonstration à l'exercice 15.12 de la page 902.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble d'équation $f(x, y) = \lambda$ est une **ligne de niveau**, ou **courbe de niveau** de f.
- Lorsque qu'un ensemble E vérifie $E = \operatorname{Im} g$, où g est une fonction quelconque, on dit que g est une **paramétrisation** de E.
- Le théorème 4 de la page précédente donne simplement l'existence d'une paramétrisation de l'ensemble d'équation $f(x, y) = 0$. Notons qu'il est rare que l'on sache expliciter une telle paramétrisation. Néanmoins, nous donnons ci-dessous quelques cas simples où cela est possible.

Exemples

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est une droite du plan.
   En effet, sachant que a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide. En fixant arbitrairement $m_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, on a, pour $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence :
$$m \in \mathcal{D} \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$
   Toujours du fait que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $ax + by = 0$ définit la droite vectorielle $\operatorname{Vect}\big((-b, a)\big)$ et donc :
$$m \in \mathcal{D} \iff m - m_0 \in \operatorname{Vect}\big((-b, a)\big).$$
   Ainsi, $\mathcal{D}$ est la droite du plan passant par m_0 et de vecteur directeur $(-b, a)$. En particulier, $t \mapsto m_0 + t(-b, a)$ est une paramétrisation de $\mathcal{D}$.
2. Le cercle de centre (a, b) et de rayon R est défini par l'équation :
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$
   Il est clair que $t \mapsto \big(a + R\cos t\,,\, b + R\sin t\big)$ définie sur $\mathbb{R}$ est une paramétrisation de ce cercle.

Le théorème de paramétrisation mène à la définition suivante.

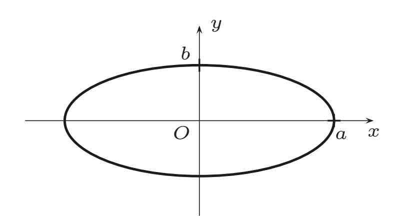
Définition 4

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$. Le point $a \in \mathcal{X}$ est un **point régulier de $\mathcal{X}$** si $\nabla f(a) \neq 0$.

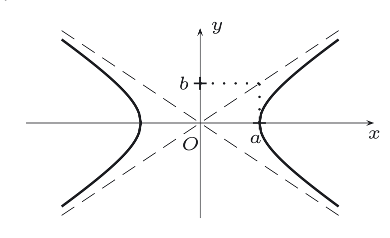
Remarques

- Le théorème 4 de la page 875 signifie qu'un ensemble défini par une équation cartésienne $f(x,y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, est, au voisinage de tout point régulier m_0, le support d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Ces arcs (ils ne sont pas uniques) ne sont pas globaux, ils dépendent de m_0.
- On dit souvent que l'ensemble d'équation $f(x,y) = 0$ est une **courbe implicite**, ou plus simplement **courbe**. Cela est en phase avec l'intuition de ce qu'est une « courbe », si tous les points de l'ensemble, à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre eux, sont réguliers.
- Une courbe implicite dont tous les points sont réguliers est une **courbe régulière**.
- Lorsque $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction nulle, l'ensemble d'équation $f(x,y) = 0$ est $\mathbb{R}^2$, ce qui ne correspond pas à notre intuition d'une « courbe ». L'hypothèse que m_0 soit un point régulier du théorème 4 de la page 875 est donc cruciale.
- Un point $a \in \mathcal{X}$, où $\mathcal{X}$ est défini par l'équation $f(x,y) = 0$, avec f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, est un **point critique de $\mathcal{X}$** si $\nabla f(a) = 0$.

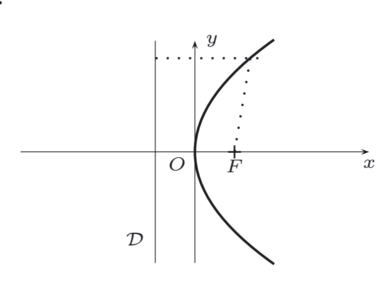
Exemples

1. La droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a,b) \neq (0,0)$ est une courbe régulière, car $\nabla f(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$.
2. Le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une courbe régulière. En effet, en tout point (x,y) de $\mathcal{C}$, on a $\nabla f(x,y) = 2(x,y)$. Puisque $(0,0) \notin \mathcal{C}$, pour tout point de $\mathcal{C}$ on a $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$.
3. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le graphe $\mathcal{G}$ de f, c'est-à-dire la courbe d'équation $g(x,y) = y - f(x) = 0$, est une courbe régulière, car pour tout $(x,y) \in \mathcal{G}$, on a $\nabla g(x,y) = \big(-f'(x), 1\big) \neq (0,0)$.
4. 

   Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ avec $a \geqslant b$.
   L'équation $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ définit une courbe régulière ; il s'agit d'une **ellipse** de centre $O = (0,0)$, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Dans le cas où $a = b$, il s'agit du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon a.
   Il est facile de vérifier que $t \mapsto (a\cos t\,,\, b\sin t)$ est une paramétrisation de cette ellipse.

5. 

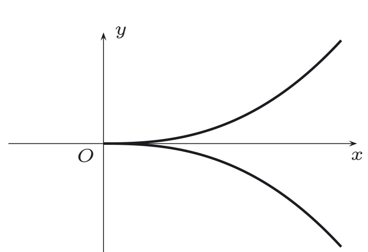
Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ avec $a \geqslant b$.
L'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ définit une courbe régulière $\mathcal{H}$. Cette courbe est une **hyperbole** de centre $O = (0,0)$, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Dans le cas où $a = b$ on parle d'hyperbole équilatère.
Il est facile de vérifier que $t \mapsto (a \operatorname{ch} t\,,\, b \operatorname{sh} t)$ est une paramétrisation de $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

6. 

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation $y^2 = 2px$ définit une courbe régulière $\mathcal{P}$; il s'agit d'une **parabole** de paramètre p.
Si l'on introduit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -p/2$ et le point $F = (p/2, 0)$, il est alors facile de vérifier que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M = (x,y)$ tels que $d(M,\mathcal{D}) = d(M,F)$. En effet, le projeté orthogonal de $M = (x,y)$ sur $\mathcal{D}$ est le point $(-p/2, y)$. Par suite $\mathrm{d}(M,\mathcal{D}) = |x + p/2|$. Ainsi, pour tout $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$d(M,\mathcal{D})^2 = d(M,F)^2 \iff (x+p/2)^2 = (x-p/2)^2 + y^2 \iff 2px = y^2.$$

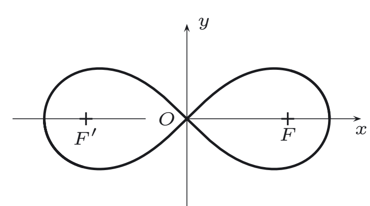
On conclut alors en remarquant que, du fait que les distances sont positives, la condition $d(M,\mathcal{D}) = d(M,F)$ est équivalente à $d(M,\mathcal{D})^2 = d(M,F)^2$.

7. 

L'équation $y^2 = x^5$ définit une courbe, qui est régulière en tout point sauf $(0,0)$. En effet, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 - x^5$, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = (-5x^4, 2y).$$

Il est clair que $(0,0)$ est l'unique point critique de f. On dispose de la paramétrisation $y \mapsto (\sqrt[5]{y^2}, y)$ définie sur $\mathbb{R}$ de cette courbe.

8. 

Soit $f > 0$.
En notant $F = (f,0)$ et $F'(-f,0)$ l'ensemble $\mathcal{C}$ défini par $\|\overrightarrow{FM}\|\,\|\overrightarrow{F'M}\| = f^2$, c'est-à-dire défini par l'équation cartésienne :

$$g(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 2(y^2 - x^2)f^2 = 0,$$

est une courbe régulière en tout point sauf $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-f^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2+f^2).$$

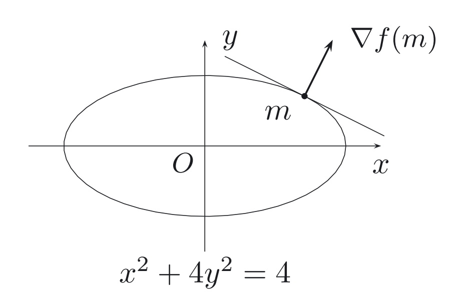
Ainsi, si (x,y) est un point critique de g, on a $4y(x^2+y^2+f^2) = 0$, et donc $y = 0$, car $x^2+y^2+f^2 > 0$. Il s'ensuit que $(0,0)$ et $(\pm f, 0)$ sont les seuls points critiques de g. La conclusion découle du fait que les points $(\pm f, 0)$ n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$ (ce qui se vérifie facilement).
La courbe d'équation $g(x,y) = 0$ est une *lemniscate* de foyers F et F'. On ne dispose pas de paramétrisation « simple » de cette courbe.

Tangente en un point régulier à une courbe implicite

Définition 5

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$.
Pour tout point *régulier* $m_0=(x_0,y_0)$ de $\mathcal{X}$, la **tangente à $\mathcal{X}$ en m_0** est la droite passant par m_0 et orthogonale à $\nabla f(m_0)$, c'est-à-dire la droite d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\,(y-y_0)=0.$$



Remarques

- L'ensemble d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\,(y-y_0)=0$ est effectivement une droite, du fait que $\nabla f(m_0)\neq 0$.
- Il n'est pas possible de définir « la » tangente en un point non régulier. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une lemniscate (*cf.* l'exemple 8 de la page ci-contre).

Nous avons rencontré jusqu'à présent deux types de tangentes : la tangente en un point de paramètre régulier d'un arc paramétré et la tangente en un point régulier à une courbe implicite. La proposition suivante établit le lien entre les deux notions.

Proposition 5

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ la courbe d'équation $f(x,y)=0$, ainsi que $m_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{X}$.
Soit également un arc paramétré $\Gamma=(I,\gamma)$ de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{X}$ et $t_0\in I$ tel que $\gamma(t_0)=m_0$.
Si t_0 est un paramètre régulier de Γ et si m_0 est un point régulier de $\mathcal{X}$, alors la tangente à Γ en t_0 et la tangente à $\mathcal{X}$ en m_0 coïncident.

Démonstration.

- Puisque t_0 est un paramètre régulier de Γ, la tangente à Γ en t_0 est bien définie. C'est l'unique droite passant par m_0 et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$.

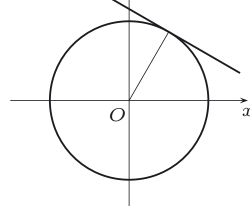
- D'après la proposition 2 de la page 874, on a :

$$\forall t \in I \quad \bigl(\nabla f\bigl(\gamma(t)\bigr) \bigm| \gamma'(t)\bigr) = 0.$$

En particulier $\nabla f(m_0)$ est orthogonal à $\gamma'(t_0)$. Il s'ensuit que la tangente à Γ en t_0 est la droite orthogonale à $\nabla f(m_0) \neq 0$ passant par m_0, c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{X}$ en m_0. □

Exemples

1. La tangente à une droite en un point de cette droite est elle-même.
2. La tangente à l'ensemble d'équation $y = f(x)$ en (x_0, y_0), où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Cela est cohérent avec les définitions antérieures.
3. La tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ au point $m_0 = (x_0, y_0)$ a pour équation :
$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0.$$
Compte tenu du fait que $m_0 \in \mathcal{E}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1.$$
On en déduit que la tangente à l'ellipse en m_0 a pour équation :
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$
4. En particulier, la tangente en $m_0 = (x_0, y_0)$ au cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon R est la droite d'équation :
$$x_0 x + y_0 y = R^2.$$
Il s'agit de la normale à la droite (Om_0) passant par m_0.



5. En procédant comme à l'exemple 3, une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ en $m_0 = (x_0, y_0)$ est :
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

p.896 **Exercice 8** Donner une équation de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ au point $m_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

p.896 **Exercice 9** Déterminer les points par lesquels passe une tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

3 Surfaces définies par une équation

Dans toute cette section, $p = 3$.

Paramétrisation d'une surface définie par une équation

Comme dans le cas des parties du plan définies par une équation cartésienne, lorsque qu'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par une équation $f(x,y,z) = 0$, on s'attend à ce que l'on « perde un degré de liberté », ce qui signifie ici, de manière informelle, qu'il existe une fonction φ de deux variables telle que $f(x,y,z) = 0$ si, et seulement s'il existe (u,v) tel que $(x,y,z) = \varphi(u,v)$. Cela n'est cependant pas toujours vrai.

À l'instar du cas du plan, le théorème suivant donne des conditions pour que la situation que nous venons de décrire soit vérifiée. Sa démonstration est hors programme.

Théorème 6 (de paramétrisation)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, ainsi que $m_0 \in U$ et $\mathcal{X}$ l'ensemble d'équation $f(x,y,z) = 0$, où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si :

$$\begin{cases} f(m_0) & = & 0 \\ \nabla f(m_0) & \neq & 0, \end{cases}$$

alors il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^3$, avec $m_0 \in V$ et $V \subset U$, ainsi qu'une fonction $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$, où W est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, tels que l'intersection $\mathcal{X} \cap V$ soit égale au graphe de φ, c'est-à-dire $\varphi(W) \subset V$ et :

$$\forall (x,y,z) \in V \quad \big(f(x,y,z) = 0 \iff \exists (u,v) \in W \quad (x,y,z) = \varphi(u,v)\big).$$

Le théorème précédent mène à la définition suivante.

Définition 6

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ la partie de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$. Le point $a \in \mathcal{X}$ est un **point régulier de $\mathcal{X}$** si $\nabla f(a) \neq 0$.

Remarques

- Le théorème 6 signifie qu'un ensemble défini par une équation $f(x,y,z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, est, au voisinage de tout point régulier, l'image d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
- Comme pour le théorème 4 de la page 875, le résultat peut être affiné. On démontre qu'il existe une fonction φ vérifiant la conclusion du théorème 6 et qui est de l'une des trois formes suivantes :

  $$(u,v) \mapsto (u,v,g(u,v)), \quad (u,v) \mapsto (u,g(u,v),v), \quad (u,v) \mapsto (g(u,v),u,v),$$

  avec $g : W \to \mathbb{R}$.

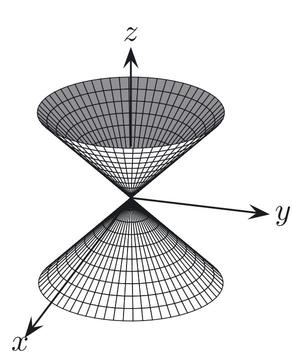
- On dit souvent que l'ensemble d'équation $f(x,y,z)=0$ est une **surface implicite**, ou plus simplement **surface**. Cela est en phase avec l'intuition de ce qu'est une « surface », si tous les points de l'ensemble, à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'entre eux, sont réguliers.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble d'équation $f(x,y,z)=\lambda$ est une **surface de niveau** de f.
- Une surface implicite dont tous les points sont réguliers est une **surface régulière**.
- Un point $a \in \mathcal{X}$ de ensemble défini par une équation $f(x,y,z)=0$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, est un **point critique de $\mathcal{X}$** si $\nabla f(a)=0$.

Exemples

1. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. L'équation :
$$ax+by+cz+d=0$$
définit une surface régulière $\mathcal{P}$. En effet, en tout point (x,y,z) de $\mathcal{P}$, on a
$$\nabla f(x,y,z)=(a,b,c) \neq (0,0,0).$$
L'ensemble $\mathcal{P}$ est un plan de l'espace. Précisons cela.
Les plans de l'espace ont été étudiés dans le secondaire. Ils peuvent être définis par un point $m_0 \in \mathbb{R}^3$ et deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$ ou, ce qui revient au même, par m_0 et un sous-espace vectoriel F de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Le plan est alors l'ensemble des $m \in \mathbb{R}^3$ tels que $m-m_0 \in F$.
Sachant que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, l'équation $ax+by+cz+d=0$ a au moins une solution et l'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide. En fixant arbitrairement $m_0=(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{P}$, on a, pour $m=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ l'équivalence :
$$m \in \mathcal{P} \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$
Toujours du fait que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, l'équation $ax+by+cz=0$ définit un plan vectoriel F et donc :
$$m \in \mathcal{P} \iff m-m_0 \in F.$$
Ainsi, $\mathcal{P}$ est un plan de l'espace. De plus, si (u,v) est une base de F, on dispose de la paramétrisation explicite $(s,t) \mapsto m_0+su+tv$ de $\mathcal{P}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit W un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $g : W \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le graphe $\mathcal{G}$ de g, *i.e.* la surface d'équation $f(x,y,z)=g(x,y)-z=0$, est une surface régulière.
En effet, $U=\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in W\big\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (*cf.* l'exercice 10 de la page 884) et f est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$. On conclut en remarquant que pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{G}$, on a :
$$\nabla f(x,y,z)=\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y), -1\Big) \neq (0,0,0).$$
Il est immédiat que $(x,y) \mapsto \big(x,y,g(x,y)\big)$, définie sur W, est une paramétrisation explicite de $\mathcal{G}$.

3. La sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est une surface régulière. En effet, en tout point (x, y, z) de $\mathcal{S}$, on a $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$. Puisque $(0, 0, 0) \notin \mathcal{S}$, pour tout point de $\mathcal{S}$ on a $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

4. L'équation $x^2 + y^2 = \alpha z^2$, avec $\alpha > 0$ définit une surface $\mathcal{S}$, régulière en tout point sauf $(0, 0, 0)$.



En effet, en notant $f : (x, y, z) \to x^2 + y^2 - \alpha z^2$, qui est une fonction polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\nabla f(x, y, z) = 2\big(x, y, -\alpha z\big).$$

Il s'ensuit que $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si, et seulement si, $(x, y, z) = (0, 0, 0) \in \mathcal{S}$. La surface $\mathcal{S}$ est un **cône**. Pour appréhender cette surface, on peut considérer l'intersection de celle-ci avec plusieurs plans. Par exemple, l'intersection du cône avec le plan d'équation $z = z_0$ a pour équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha z_0^2 \\ z = z_0. \end{cases}$$

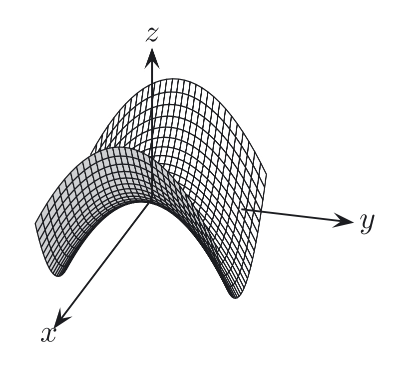
En identifiant le plan d'équation avec $\mathbb{R}^2$, il vient que cette intersection est un cercle de rayon $\sqrt{\alpha}|z_0|$.
L'intersection avec le plan d'équation $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$ a pour équation :

$$\begin{cases} x^2(1 + t^2) = \alpha z^2 \\ y = tx. \end{cases} \iff \begin{cases} \big(\sqrt{1 + t^2}x - \sqrt{\alpha}z\big)\big(\sqrt{1 + t^2}x - \sqrt{\alpha}z\big) = 0 \\ y = tx. \end{cases}$$

Il s'agit de la réunion de deux droites vectorielles engendrées par $\left(1, t, \sqrt{\frac{1+t^2}{\alpha}}\right)$ et $\left(1, t, -\sqrt{\frac{1+t^2}{\alpha}}\right)$. Intuitivement, le cône est obtenu en faisant tourner l'une de ces droites autour de l'axe (Oz).



5. L'équation $x^2 - y^2 = z$ définit une surface régulière.



En effet, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, -2y, -1) \neq (0, 0, 0).$$

On constate que l'intersection avec un plan d'équation $z = z_0$, avec $z_0 \neq 0$ correspond à une hyperbole, alors que l'intersection avec un plan d'équation $y = y_0$ correspond à une parabole.

Pour cela, cette surface est appelée un **paraboloïde hyperbolique** .

p.897

Exercice 10 Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

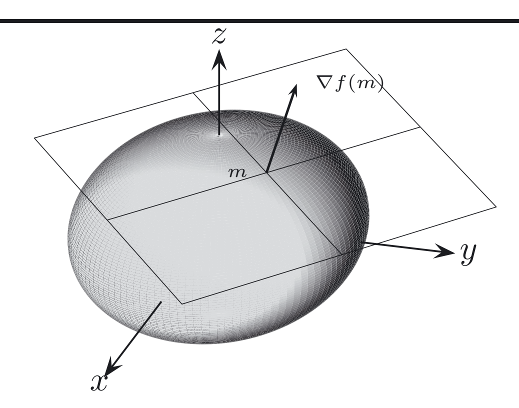
1. Démontrer que $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in V\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que si l'ensemble $\mathcal{C}_1$ d'équation $g(x,y) = 0$ est une courbe régulière du plan, alors l'équation $f(x,y,z) = g(x,y) = 0$ définit une surface régulière ; il s'agit du **cylindre** de base $\mathcal{C}$ et de direction (Oz).

Plan tangent en un point régulier à une surface implicite

Définition 7

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$. Pour tout point *régulier* $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{X}$, le **plan tangent à $\mathcal{X}$ en m_0** est le plan passant par m_0 et orthogonal à $\nabla f(m_0)$, c'est-à-dire le plan d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(m_0)\,(z - z_0) = 0.$$



Remarques

- L'ensemble d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\,(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(m_0)\,(z-z_0) = 0$ est effectivement un plan, du fait que $\nabla f(m_0) \neq 0$.
- Si (I,γ) est un arc tracé sur $\mathcal{X}$ et si (t_0, m_0) est un point régulier de l'arc, d'après la proposition 2 de la page 874, on a $\left(\nabla f(m_0) \mid \gamma'(t_0)\right) = 0$. Il s'ensuit que les tangentes en m_0 des arcs tracés sur $\mathcal{X}$ sont incluses dans le plan tangent à $\mathcal{X}$ en m_0.

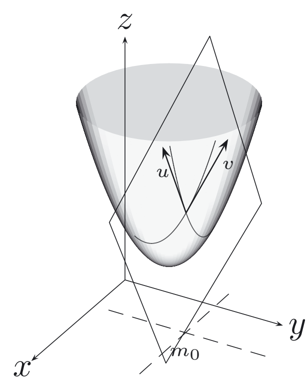
Proposition 7

Soit W un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $g : W \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La surface $\mathcal{X}$ d'équation $z = g(x,y)$ est régulière et pour $(x_0,y_0) \in W$, le plan tangent à $\mathcal{X}$ en $(x_0, y_0, g(x_0,y_0))$ a pour équation :

$$z = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(m_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(m_0)\,(y - y_0).$$

Démonstration. À l'exemple 2, nous avons montré que $\mathcal{X}$ est une surface régulière. L'équation donnée du plan est une conséquence immédiate de la définition. □

Remarque



Pour $m_0 = (x_0, y_0) \in V$, les **courbes coordonnées** en m_0 de la surface $\mathcal{X}$, c'est-à-dire les arcs définis par :

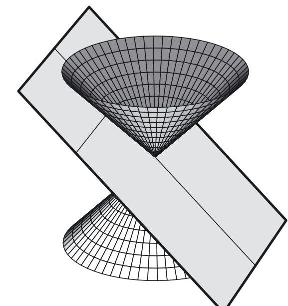
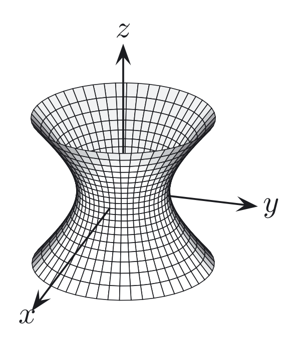
$$x \mapsto (x, y_0, g(x, y_0)) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto (x_0, y, g(x_0, y))$$

sont tracés sur la surface $\mathcal{X}$. En particulier leurs tangentes en x_0 et y_0, dirigées respectivement par les vecteurs :

$$u = (1, 0, \partial_1 g\,(m_0)) \qquad \text{et} \qquad v = (0, 1, \partial_2 g\,(m_0))$$

sont incluses dans le plan tangent à $\mathcal{X}$ en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Les vecteurs u et v étant linéairement indépendants, le plan tangent en M_0 est le plan défini par M_0 et $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Exemples

1. Le plan tangent à un plan en un point de ce plan est lui-même.
2. Le plan tangent à la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon R en $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation :
$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2.$$
Il s'agit du plan orthogonal à la droite (Om_0) passant par m_0.
3. 
Le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = \alpha z^2$, avec $\alpha > 0$ est une surface, régulière en tout point sauf $(0,0,0)$.
Pour tout $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0,0)\}$, le plan tangent à $\mathcal{C}$ en m_0 a pour équation :
$$x_0 x + y_0 y - \alpha z_0 z = 0.$$
On peut remarquer que tous les plans tangents passent par $(0,0,0)$.
Par ailleurs, si $m_0 \in \mathcal{C} \setminus \{(0,0,0)\}$, il est facile de vérifier que la droite vectoriel $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(m_0)$ est incluse dans $\mathcal{C}$. Pour tout point $m \in \mathcal{D} \setminus \{(0,0,0)\}$, on constate que le plan tangent à $\mathcal{C}$ en m est le plan tangent en m_0, et que ce plan contient $\mathcal{D}$.
4. 

Pour $(a, b, c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$, l'équation :
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$
définit une surface régulière $\mathcal{H}$ appelée **hyperboloïde à une nappe**.
Pour $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}$, le plan tangent en m_0 a pour équation :
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

p.897 **Exercice 11** Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $g(x,y) = 0$ définit une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$.
On rappelle qu'en notant $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in V\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = g(x,y)$, le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$ est une surface régulière (*cf.* l'exercice 10 de la page 884).
Donner une équation du plan tangent en un point $m_0 \in \mathcal{C}$.

III Exemples d'équations aux dérivées partielles

1 Deux exemples fondamentaux

Un premier exemple

Commençons par traiter un exemple simple, mais important.

Déterminons les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

- Considérons $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

  Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x,y)$ est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et a sa dérivée nulle. Par conséquent il existe une constante α, qui dépend *a priori* de y, telle que $f(x,y) = \alpha$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \varphi(y).$$
  La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $\varphi : y \mapsto f(0,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Réciproquement, lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il est facile de vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \varphi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :
$$\mathcal{S} = \{(x,y) \mapsto \varphi(y)\,;\ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

Remarque Les solutions du problème précédant peuvent être moins simples selon la « forme » du domaine de définition.
Voir par exemple l'exercice 15.18 de la page 903.

Un second exemple

L'exemple précédent permet de traiter l'exercice suivant.

p.898 **Exercice 12** Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

2 Changement de variables

Malheureusement tous les cas ne sont pas aussi simples que les deux qui viennent d'être traités. Il arrive toutefois que l'on puisse se ramener à ces cas très simples à l'aide d'un changement de variables.

Un exemple d'utilisation de changement de variables

On note V le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{$\star$}$$

Pour cela, introduisons :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & U & \longrightarrow & V \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta), \end{array}$$

où $U = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons le changement de variable polaire $(x,y) = \Phi(r,\theta)$, c'est-à-dire pour tout $(r,\theta) \in U$, on note $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$; posons $f(x,y) = g(r,\theta)$, c'est-à-dire que la fonction g est définie par $g = f \circ \Phi$.

Puisque les fonctions $(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto r\sin\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, par composition, g l'est également. D'après la dérivation des fonctions composées, pour tout $(r,\theta) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

et donc :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puisque Φ est surjective sur V, la fonction f est solutions de $(\star)$ si, et seulement si, g vérifie sur U :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 0. \tag{$\star\star$}$$

En d'autres termes l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \Phi \in \mathcal{S}'\right\},$$

où $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des solutions de $(\star\star)$. En raisonnant comme à l'exemple de la page 886 : $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ est solutions de $(\star)$ si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\forall (r,\theta) \in U \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \varphi(\theta).$$

Remarque Il est possible de poursuivre la résolution.
Si $(x,y) = \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in V$, alors $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$. En effet, on a $\tan\theta = \frac{y}{x}$ et, du fait que $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, il vient $\theta = \operatorname{Arctan}(\tan\theta)$, ce qui implique à son tour :

$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Il s'ensuit que si f est une solution, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad f(x,y) = \varphi\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

et la fonction Arctan étant de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad f(x,y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Il est aisé de vérifier que toute fonction de cette forme est effectivement une solution du problème, car dans ce cas :

$$\forall (x,y) \in V \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y}{x}\right) \ ; \ \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}.$$

Un second exemple : l'équation d'onde

Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tag{$\star$}$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'agit d'un cas particulier d'équation de propagation, dite aussi équation d'onde.

- Pour cela, considérons :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{array}$$

  avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Cette dernière condition s'impose du fait que l'on souhaite φ bijective. Posons le changement de variables :

$$(x,t) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

  ce qui signifie que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on note $x = \alpha u + \beta v$ et $t = \gamma u + \delta v$.

  Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons :

$$f(x,t) = g(u,v),$$

  c'est-à-dire que l'on définit g par $g = f \circ \varphi$.

- Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, par la règle de la chaîne, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\,\frac{\partial f}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\cdot \tag{1}$$
En itérant, la formule (1) étant valable pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et $g = f \circ \varphi$, il vient :
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right)\\ &= \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \gamma\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\end{aligned}$$
La dernière relation a été obtenue en utilisant le théorème de Schwarz. En prenant $\alpha = \beta = c$ et $\delta = -\gamma = 1$, on a $\alpha\delta - \beta\gamma = 2c \neq 0$ et ainsi :
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot$$

- Il vient de l'étude ci-dessus que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est solution de $(\star)$ si, et seulement si, $g = f \circ \varphi$ vérifie :
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \tag{$\star\star$}$$
D'après l'exercice 12 de la page 886, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est une solution de $(\star)$ si, et seulement s'il existe $(\Phi_1, \Psi_1) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que :
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad f\big(\varphi(u,v)\big) = \Phi_1(u) + \Psi_1(v)$$
L'application φ est bijective et :
$$\begin{array}{rccc}\varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-ct}{2c}, \dfrac{x+ct}{2c}\right)\cdot\end{array}$$
Il est de plus clair que les applications $(x,t) \mapsto \dfrac{x-ct}{2c}$ et $(x,t) \mapsto \dfrac{x-ct}{2c}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. En adaptant le raisonnement de la page ci-contre, l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$ est :
$$\mathcal{S} = \big\{(x,t) \mapsto \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big\}$$

Changements de variables

Les exemples précédents montrent qu'un changement de variables s'avère parfois utile pour résoudre une équation aux dérivées partielles.

Décrivons brièvement la méthode. Considérons l'équation aux dérivées partielles :
$$\mathcal{E}:\ F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x, y\right) = 0,$$

où l'inconnue f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$. Poser un changement de variables consiste à introduire une fonction $\Phi : U \to V$ surjective et de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire dont les applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$. On pose alors, lorsque $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque :

$$(x,y) = \Phi(u,v) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = g(u,v),$$

c'est-à-dire que g est la fonction définie sur U par $g = f \circ \Phi$. Par le calcul, on établit que si f est une solution de $\mathcal{E}$ sur V, alors g est solution sur U d'une équation :

$$\mathcal{E}' : \; G\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, u, v\right) = 0.$$

Si l'on peut résoudre cette dernière, on dispose alors d'une condition nécessaire sur les solutions de $\mathcal{E}$.

Remarques

- Si de plus Φ est bijective et Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$, alors on vérifie au cas par cas que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E}$ est :

  $$\mathcal{S} = \{g \circ \Phi^{-1} \,;\; g \in \mathcal{S}'\},$$

  où $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}'$.
- On pose parfois le changement de variables sous la forme $(u,v) = \Psi(x,y)$. On adaptera alors la méthode précédente.
- On peut généraliser la méthode précédente afin de traiter des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Changements de variables usuels

- **Changement de variables linéaire**

  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$ l'application :

  $$\begin{array}{rccl} \varphi : & V & \longrightarrow & U \\ & (u,v) & \longmapsto & (au+bv, cu+dv) \end{array}$$

  est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $V = \varphi^{-1}(U)$ sur U. L'expression de φ^{-1} s'obtient à l'aide de M^{-1}.
- **Changement de variables en polaire**

  L'application :

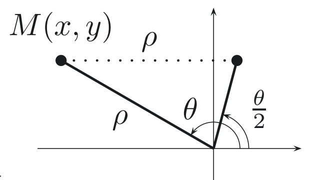
  $$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_-\} \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

  est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

Précisons l'application réciproque. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$; notons (ρ,θ) l'unique élément de $\mathbb{R}_+ \times \left]-\pi,\pi\right[$ tel que :

$$Z = x + iy = \rho\, e^{i\theta}.$$

On a :



$$(x+\rho) + iy = Z + \rho = \rho(e^{i\theta}+1) = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\rho\, e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Puisque $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arctan}\left(\tan(\frac{\theta}{2})\right) = \frac{\theta}{2}$ et donc :

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x+\rho},$$

ce qui implique :

$$\theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

On constate alors que l'application réciproque :

$$\begin{array}{rccl} \Psi^{-1}: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_-\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[\\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\, 2\operatorname{Arctan}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

est également de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque Lorsque l'on considère la restriction Φ de Ψ à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il existe une expression plus simple de Φ^{-1} (*cf.* page 888).

p.898

Exercice 13 À l'aide d'un changement de variables linéaire, déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ (*équation de transport*).

p.899

Exercice 14

1. Démontrer que $\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(y - \frac{x^2}{2}\,,\, y\right) \end{array}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U à préciser et que φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.
2. En posant $(u,v) = \varphi(x,y)$, résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = x^2(1-x-y^5) + y^2.$$
L'ensemble $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x-y^5 > 0\}$ est un ouvert (c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue $(x,y) \mapsto 1-x-y^5$), contenant $(0,0)$. Sur V, on a $f(x,y) \geqslant 0$. Par conséquent f admet minimum local en $(0,0)$.
- Puisque $f(x,0) = x^2 - x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, la fonction f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$ et donc elle n'admet pas de minimum global.

Théorème 1 Supposons que f admette un extremum local en a. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une maximum. Il existe donc un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant a tel que $f_{|U\cap V}$ admette un maximum en a. Puisque $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (c'est l'intersection de deux ouverts) et qu'il contient a, il existe $\eta > 0$ tel que $B_O(a,\eta) \subset U \cap V$ et donc $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B_O(a,\eta)$.

Soit $h \in E \setminus \{0\}$. L'application $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ est définie sur l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|}\right[$ et φ admet un maximum en 0. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = (\nabla f(a) \mid h)$. On sait que si une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert admet un maximum en un point où elle est dérivable, alors sa dérivée est nulle en ce point. Par conséquent :
$$(\nabla f(a) \mid h) = \varphi'(0) = 0.$$
Cette dernière relation étant vérifiée pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ (c'est immédiat si $h = 0$), on en déduit que $\nabla f(a) = 0$.

Exercice 2 Puisque $f(x,0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la fonction f n'admet pas de maximum.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont caractérisés par le système d'équations :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 = 0. \end{cases}$$
Il s'ensuit que $(1,0)$ est l'unique point critique de f.

Étudions le point $(1,0)$. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) - f(1,0) = x^2y^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2y^2 + (x-1)^2 \geqslant 0.$$
Ainsi, la fonction f admet un minimum en $(1,0)$.

Exercice 3

- La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla f(x,y) = \big(2x(2x^2-1)\,,\,2y(2y^2+1)\big).$$

Il est alors immédiat que les points critiques de f sont $(0,0)$ et $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

- Une rapide étude des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto f(x,0) = x^4 - x^2 \qquad \text{et} \qquad f_2 : y \mapsto f(0,y) = y^4 + y^2$$

donne les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(y)$		$-$	0	$+$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

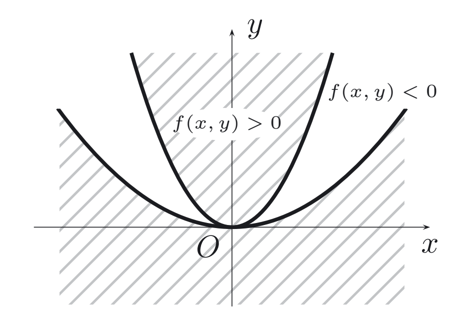
- Étudions les points critiques.
  * D'après l'étude précédente, la fonction $x \mapsto f(x,0) = f_1(x)$ prend des valeurs strictement négatives pour tout $x \in [-1,0[\,\cup\,]0,1[$, et donc f prend des valeurs strictement négatives dans toute boule centrée en $(0,0)$. De même, en considérant la fonction $y \mapsto f(0,y) = f_2(y)$, la fonction f prend dans toute boule centrée en $(0,0)$ des valeurs strictement positives. La fonction n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$
  * Les tableaux de variations de f_1 et f_2 donnent, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, que :

$$f(x,y) \geqslant f_1(1/\sqrt{2}) + f_2(0) = -1/4.$$

Ainsi la fonction f admet un minimum global en $(1/\sqrt{2},0)$.
Il en est de même pour le point $(-1/\sqrt{2},0)$.

Exercice 4

1. On obtient facilement la figure ci-dessous.



2. • Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(tu) = t^2(b - ta^2)(b - 3ta^2).$$
   * Si $b = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(tu) = 3t^4a^4 \geqslant 0 = f(0,0).$$
Il s'ensuit l'application $t \mapsto f(tu)$ a un minimum local en 0.
   * Si $b \neq 0$, alors au voisinage de 0, on a $f(tu) \underset{0}{\sim} t^2b^2$. Puisque la fonction $t \mapsto t^2b^2$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(tu)$ est à valeurs positives au voisinage de 0. Cette dernière fonction admet donc un minimum local en 0.

   • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$f\left(x, 2\,x^2\right) = -x^4 < 0 \quad \text{et} \quad f(0, x) = x^2 > 0$$
Ainsi, dans tout voisinage de 0, il existe un point (x, y) tel que $f(x, y) < 0$ et un point (x', y') tel que $f(x', y') > 0$. Par conséquent, la fonction f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 5

- La fonction f est continue car polynomiale et sa restriction à $\overset{\circ}{\Delta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'ensemble Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Il est en effet fermé, car c'est l'intersection de trois demi-plans fermés. De plus, pour tout $(x, y) \in \Delta$, on a :
$$0 \leqslant x \leqslant 1 - y \leqslant 1$$
et de même pour y. Par suite, $\Delta \subset [0,1]^2$ est borné.

- Il est clair que $\overset{\circ}{\Delta} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x + y < 1\right\}$. Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \Delta$, on a $f(x, y) \geqslant 0$.

Sur tout point de la frontière, on a $f(x, y) = 0$ et donc tous les points de la frontière sont des point où f atteint son minimum. Puisque f est à valeurs strictement positives sur l'intérieur de Δ, nous avons déterminé tous les minima de f.

- Par continuité et le caractère fermé borné de Δ, la fonction f admet des maxima et puisque que f n'est pas la fonction nulle, ces maxima sont atteints en des points de l'intérieur de Δ. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur, les maxima sont atteints en des points critiques.
- Pour tout $(x, y) \in \overset{\circ}{\Delta}$ on a :
$$\nabla f(x, y) = \big(y(1 - 2x - y)\,,\, x(1 - x - 2y)\big).$$
Par conséquent, (x, y) est un point critique si, et seulement si,
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1; \end{cases}$$
i.e. $x = y = 1/3$. Par suite, la fonction f a un seul point critique. Ainsi $(1/3, 1/3)$ est l'unique point où f atteint son maximum.

Exercice 6

1. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $2xy \leqslant x^2+y^2$ et :
$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leqslant 2(x^2+y^2).$$
   On en déduit, toujours pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = \frac{e^{2x^2+2y^2}}{1+(x+y)^2} \geqslant \frac{e^{2(x^2+y^2)}}{1+2(x^2+y^2)} = \varphi\big(\|(x,y)\|\big),$$
   où $\varphi(t) = \frac{e^{2t^2}}{1+2t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissances comparées, il vient que $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$.

2. Par définition de la limite, il existe un réel $r>0$ tel que $f(m) \geqslant f(0)$ pour tout m vérifiant $\|m\| \geqslant r$. Fixons un tel r.

   La boule $B = B_F(0,r)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, puisque la fonction f est continue, la restriction de f à B admet un minimum μ atteint en un point m_0. Du fait que $0 \in B$, on déduit $\mu \leqslant f(0)$.

   Soit $m \in \mathbb{R}^2$. Si $m \in B$, par définition de μ, on a $f(m) \geqslant \mu$. Si $m \notin B$, alors $\|m\| > r$, et donc $f(m) \geqslant f(0,0) \geqslant \mu$. Dans tous les cas :
$$f(m) \geqslant \mu = f(m_0),$$
   ce qui prouve que f admet un minimum.

3. La première question prouve $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$, ce qui implique que f n'a pas de maximum.

   D'après la question précédente, il existe un minimum ; déterminons-le. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient de fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x\big(1+(x+y)^2\big) - 2(x+y)}{\big(1+(x+y)^2\big)^2}\, e^{2(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y\big(1+(x+y)^2\big) - 2(x+y)}{\big(1+(x+y)^2\big)^2}\, e^{2(x^2+y^2)}$$
   Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique, alors :
$$4x\big(1+(x+y)^2\big) - 2(x+y) = 4y\big(1+(x+y)^2\big) - 2(x+y) = 0,$$
   ce qui implique $x=y$, car $1+(x+y)^2 \neq 0$, ce qui à son tour implique :
$$4x\big(1+(x+y)^2\big) - 2(x+y) = 4x\big(1+4x^2\big) - 4x = 16x^3 = 0.$$
   Par suite, $(0,0)$ est l'unique point critique. Sachant que la fonction f admet un minimum et qu'elle est définie sur un ouvert, celui-ci est atteint en un point critique. On en conclut que f admet un minimum et qu'il est atteint uniquement en $(0,0)$.

Exercice 7 Soit h un vecteur de norme 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a) \mid h) \leqslant \|\nabla f(a)\|. \tag{1}$$

De plus, on a l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1) si, et seulement si, h est $\mathbb{R}_+^*$-colinéaire à $\nabla f(a)$. Puisque h est normé, l'égalité est réalisée uniquement lorsque $h = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\cdot$

Remarque

Ainsi $\nabla f(m)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite au voisinage de m.

Considérons une surface S d'équation $z = f(x,y)$. On peut de manière informelle interpréter le résultat de cet exercice de la manière suivante : parmi toutes les droites tangentes à S en $(x_0,y_0,z_0)\in S$, il en existe une unique de « pente » maximale. Celle-ci est la tangente en 0 à l'arc paramétré par :

$$\gamma : t \mapsto \big(x_0+ta, y_0+tb, f(x_0+ta, y_0+tb)\big),$$

$\nabla f(m)$

où $m=(x_0,y_0)$, et $\nabla f(m) = (a,b)$.

Voici une façon ludique de résumer cela : en haut d'une pente de ski, pour dévaler la pente il vaut mieux positionner ses skis dans le sens opposé du gradient, du moins si l'on veut aller vite.

Exercice 8 La fonction $f : (x,y) \mapsto 2px - y^2$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla f(x,y) = 2(p,-y).$$

Par suite, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $f(x,y)=0$ est une courbe régulière et, en tout point $m_0=(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$, une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ est :

$$p(x-x_0) - y_0(y-y_0) = 0.$$

Compte tenu de la relation $y_0^2 = 2px_0$, on a l'équation :

$$yy_0 = p(x+x_0).$$

Exercice 9 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

- Supposons $y\neq 0$. Le point (x,y) appartient à une tangente à l'ellipse si, et seulement s'il existe $(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ tel que :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{$\star$}$$

(*cf.* l'exemple 3 de la page 880) c'est-à-dire si, et seulement s'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $\Big(x_0, \frac{b^2}{y}\big(1-\frac{xx_0}{a^2}\big)\Big)$ soit un point de ellipse, *i.e.* :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2}\left(1-\frac{xx_0}{a^2}\right)^2 = 1. \tag{$\star\star$}$$

Réciproquement, si cette équation d'inconnue x_0 a une solution réelle, (x,y) est sur la tangente à $\mathcal{E}$ en (x_0,y_0), où y_0 est donné par $(\star)$.

On peut réécrire $(\star\star)$ sous la forme :
$$\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y^2}\right)x_0^2-2\frac{b^2x}{a^2y^2}x_0+\frac{b^2}{y^2}-1=0,$$
soit encore :
$$(a^2y^2+b^2x^2)\,x_0^2-2a^2b^2x\,x_0+a^4(b^2-y^2)=0.$$
Ainsi, $(\star\star)$ a une solution réelle si, et seulement si, :
$$\Delta=4\big(a^4b^4x^2-a^4(b^2-y^2)(a^2y^2+b^2x^2)\big)\geqslant 0.$$
Le calcul donne :
$$\Delta=4a^4y^2\big(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2\big).$$
De $y\neq 0$, on en conclut que la condition nécessaire et suffisante recherchée est :
$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2\geqslant 0,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\geqslant 1.$$

- Si $y=0$ et $x\neq 0$, on trouve encore par symétrie que la condition nécessaire et suffisante est $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\geqslant 1$.
- Puisqu'une équation d'une tangente est $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$, aucune tangente ne passe par $(0,0)$. En conclusion, les points de $\mathbb{R}^2$ par lesquelles il passe une tangente à $\mathcal{E}$ sont exactement ceux qui vérifient $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\geqslant 1$ (il s'agit des points à l'extérieur de l'ellipse).

Exercice 10

1. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des normes $\|\ \|_\infty$. Soit $m=(x,y,z)\in V$. Montrons qu'il existe une boule ouverte centrée en m incluse dans U.
   Puisque $(x,y)\in V$ et que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $r>0$ tel que pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $\big\|(x,y)-(u,v)\big\|_\infty\leqslant r$, on ait $(u,v)\in V$. Par conséquent, pour tout $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant $\big\|(x,y,z)-(u,v,w)\big\|_\infty\leqslant r$, on a $\big\|(x,y)-(u,v)\big\|_\infty\leqslant r$ et donc $(u,v)\in V$, ce qui implique que $(u,v,w)\in U$.
   Par suite, l'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour tout $(x,y,z)\in U$, on a :
$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),0\right).$$
   Pour $m_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{C}$, on a $g(x_0,y_0)=0$ et donc, du fait que la courbe d'équation $g(x,y)=0$ est régulière, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\neq(0,0)$.
   Il s'ensuit que m_0 est régulier.

Exercice 11 Une équation du plan tangent en m_0 est :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

En particulier, ce plan contient la droite passant par m_0 et dirigée par $(0,0,1)$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\big\{(x,y,0)\,;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\big\}$, il vient que le plan tangent contient également la tangente à la courbe d'équation $g(x,y)=0$ en (x_0,y_0).

Exercice 12

- Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

  Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, l'exemple de la page 886 montre qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y).$$
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est φ, il existe une constante $\Psi(x)$ telle que :
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = \Phi(y) + \Psi(x),$$
  où Φ est une primitive de φ. En particulier, Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'application $\Psi : x \mapsto f(x,0) - \Phi(0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
- Réciproquement, si $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, il est alors facile de vérifier que la fonction $f : (x,y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :
$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\right\}.$$

Exercice 13 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons un changement de variables :
$$(x,t) = (\alpha u + \beta v\,,\, \gamma u + \delta v) \qquad \text{et} \qquad f(x,t) = g(u,v),$$
avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Le changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, d'après la règle de la chaîne :
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial f}{\partial t}\cdot$$
En prenant $\alpha = c$, $\gamma = 1$ et, par exemple, $\beta = -1$ et $\delta = c$, on a alors :
$$\alpha\delta - \beta\gamma = c^2 + 1 \neq 0$$
et le changement de variables est donc bijectif. Il s'ensuit que f est une solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$. D'après l'exemple de la page 886, la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une solution du problème si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u,v) = \varphi(v).$$
Puisque le changement de variables est bijectif et :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = \frac{cx + t}{1 + c^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{ct - x}{1 + c^2},$$
toute solution du problème est nécessairement de la forme $(x,y) \mapsto \Phi(x - ct)$, où Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Réciproquement, il est aisé de vérifier que toute fonction de cette forme est solution. En conclusion l'ensemble des solutions du problème est :
$$\mathcal{S} = \left\{(x,t) \mapsto \Phi\,(x - ct)\ ;\ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 14

1. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ (x,y) & \longmapsto & \left(y - \dfrac{x^2}{2}, y\right) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons à résoudre dans V l'équation :
$$\left\{ \begin{array}{l} u = y - x^2/2 \\ v = y. \end{array} \right.$$
   Ce système est équivalent à :
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2(v-u) \\ y = v. \end{array} \right.$$
   Ce dernier système n'a de solutions que si $v > u$, et cette solution est alors unique dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Par conséquent, φ définit une bijection de V sur $U = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > u\right\}$, qui est un ouvert et :
$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{2(v-u)}, v\right). \end{array}$$
   Par suite, l'application φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$, car l'application $(u,v) \mapsto 2(v-u)$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; posons $(u,v) = \varphi(x,y)$ et $f(x,y) = g(u,v)$. D'après la première question, $g = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la règle de la chaîne, on a sur V :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x\,\frac{\partial g}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot$$
   Par suite :
$$\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{\partial g}{\partial v}\cdot$$
   Puisque pour tout $(x,y) \in V$ on a $x \neq 0$, la fonction f est solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire en reprenant le raisonnement de l'exemple de la page 886, si, et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que :
$$\forall (u,v) \in U \quad g(u,v) = \Phi(u).$$
   En effet, pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble $\left\{v \in \mathbb{R} \mid (u,v) \in U\right\}$ est l'intervalle $]u, +\infty[$ sur lequel la fonction $v \mapsto g(u,v)$ est à dérivée nulle, donc constante. Ainsi, si f est solution de problème, il existe une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \Phi(y - x^2/2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction de cette forme est une solution du problème. En conclusion, l'ensemble des solutions du problème est :
$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \Phi\big(y - x^2/2\big) \;\middle|\; \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}.$$

S'entraîner et approfondir

15.1 Déterminer les extrema des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$;
2. $g(x,y) = (2x^2+3y^2)\exp(-(x^2+y^2))$.

15.2 Déterminer les extrema globaux et locaux de l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2-2xyz. \end{array}$$

15.3 Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Donner l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $A(1,0)$, $B(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ et $C(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$. On se restreindra au cas où $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$.
2. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1.

15.4 1. Démontrer que $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$ sont les côtés d'un triangle si, et seulement si :

$$a \leqslant b+c, \qquad b \leqslant a+c, \qquad c \leqslant a+b.$$

2. Démontrer que l'aire d'un triangle ABC de côtés a, b et c est

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre (*formule de Héron*).

3. Déterminer les triangles d'aire maximale parmi ceux de périmètre 1.

15.5 On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

1. Soit $v \in E$. Démontrer que $g : x \mapsto f(x) - (\,x \mid v\,)$ admet un minimum.
2. En déduire que l'application $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est surjective.

★ **15.6** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXAX + 2\,{}^tUX. \end{array}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Vérifier que ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ non nul.
3. Démontrer que $\nabla f(X) = 2(AX+U)$.
4. Déterminer les extrema de f.

⋆ **15.7** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = \lambda\right\}$ et :

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} A_\lambda & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i. \end{array}$$

1. Déterminer $m_\lambda = \inf_{x \in A_\lambda} f(x)$ et $M_\lambda = \sup_{x \in A_\lambda} f(x)$.

   Indications. On se ramènera au cas $\lambda = 1$ et pourra utiliser sans démonstration l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ valable pour tout $t > -1$.

2. Les valeurs m_λ et M_λ sont-elles atteintes ?

15.8 Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $S = \left\{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\|_2 = 1\right\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^p$, avec $p \geqslant 2$.

1. Montrer que $f_{|S}$ atteint son maximum en un point m_0.
2. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\nabla f(m_0) = \lambda\, m_0$.

   On se ramènera à une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{p-1}$.

⋆⋆ **15.9** Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, ainsi que $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que l'ensemble $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$ est une surface régulière non vide.

1. Montrer que si $g_{|\mathcal{S}}$ admet un extremum en $m_0 \in \mathcal{S}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(m_0) = \lambda \nabla f(m_0)$.

   On utilisera le théorème 6 de la page 881 et les remarques qui suivent.

2. Application. Soit $(a,b,c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$, avec $a < b < c$. Déterminer les extréma globaux de la fonction $(x,y,z) \mapsto ax^4 + by^4 + cz^4$ restreinte à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Application. Soit $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in {\mathbb{R}_+^*}^3 \mid x + y + z = 1\right\}$. Déterminer les extrema globaux de l'application $(x,y,z) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ restreinte à $\mathcal{S}$.

15.10 Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

1. Démontrer que $ux + vy + w = 0$, avec $(u,v) \neq (0,0)$ est l'équation d'une tangente à $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $u^2a^2 + b^2v^2 = w^2$.
2. Déterminer les points par lesquels il passe deux tangentes à $(\mathcal{E})$, orthogonales entres elles.

15.11 Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble d'équation cartésienne $f(x,y)=0$, où :

$$f(x,y)=x(x^2+y^2)-(x^2-y^2).$$

1. Soit $t\in\mathbb{R}$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{X}$ avec la droite d'équation $y=tx$.
2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{X}$ est le support d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et tracer $\mathcal{X}$.
3. Soit m_0 un point régulier de $\mathcal{X}$. Démontrer que $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{X}$ en m_0 si, et seulement si, 0 est une racine multiple du polynôme défini par $P(t)=f(m_0+tu)$.
4. En déduire que toutes les tangentes à $\mathcal{X}$, sauf une, recoupent $\mathcal{X}$ en un unique point.

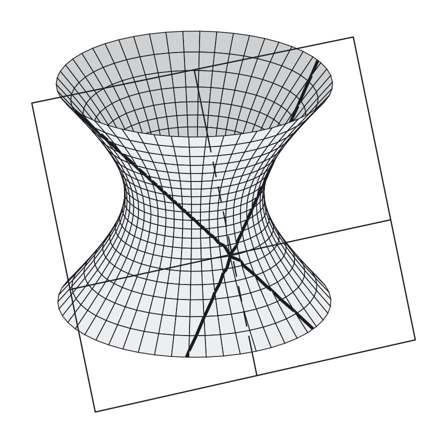
⋆ **15.12** Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{X}$ l'ensemble d'équation cartésienne $f(x,y)=0$. On suppose $(0,0)\in U$.

Montrer que si $f(0,0)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\neq 0$, alors il existe un couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^{*\,2}$ et une fonction $\varphi:\,]-\alpha,\alpha[\,\to\,]-\beta,\beta[$ tels que $V=\,]-\alpha,\alpha[\,\times\,]-\beta,\beta[$ soit inclus dans U et $V\cap\mathcal{X}$ soit le graphe de φ, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y)\in V\quad \big(f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)\big).$$

Indication. Commencer par montrer qu'il existe $\beta>0$ tel que pour tout $x\in\,]-\beta,\beta[$, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ soit strictement croissante sur $]-\beta,\beta[$.

15.13



L'illustration ci-contre semble indiquer que l'intersection de la surface $\mathcal{H}$ d'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

avec l'un quelconque de ses plans tangents est la réunion de deux droites distinctes. On cherche à démontrer ce résultat dans un cas particulier.

Soit $m_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ le plan tangent à $\mathcal{H}$ en m_0.

1. Soit $m=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $u=m-m_0=(x',y',z')$. Démontrer que $m\in\mathcal{H}\cap\mathcal{T}$ si, et seulement si, u vérifie :

$$(\mathcal{E})\qquad\begin{cases}\left(\dfrac{x'}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y'}{b}\right)^2-\left(\dfrac{z'}{c}\right)^2=0\\[2mm] \dfrac{x_0x'}{a^2}+\dfrac{y_0y'}{b^2}-\dfrac{z_0z'}{c^2}=0\end{cases}$$

2. On suppose $x_0=0$. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est l'union de deux droites vectorielles distinctes.
3. Conclure dans le cas où $x_0=0$.

15.14 Soit $\mathcal{H}$ la surface d'équation $z = xy$ et $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}$. On note $\mathcal{T}$ le plan tangent à $\mathcal{H}$ en m_0.

1. Démontrer que $\mathcal{H}$ est une surface régulière et donner une équation du plan $\mathcal{T}$.
2. Démontrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ est l'union de deux droites distinctes.
   Indication. On démontrera que $m \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ si, et seulement si, $m - m_0$ appartient à l'union de deux droites vectorielles.

⋆ **15.15** On pose pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

On note $\mathcal{X}$ la « surface » d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Déterminer un plan vectoriel $\mathcal{P}$ inclus dans $\mathcal{X}$.
2. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{X}$. Donner alors, pour tout point régulier $m_0 \in \mathcal{X}$, une équation du plan tangent en m_0.
   Préciser ce plan lorsque de plus $m_0 \in \mathcal{P}$.
3. Démontrer que $\mathcal{X}$ est l'union d'un plan vectoriel et d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

⋆ **15.16** Soit $p > 0$ et $\mathcal{P}$ la parabole de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = 2px$. On définit une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ par $m_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et M_{n+1} est l'autre point d'intersection de la normale à $\mathcal{P}$ en M_n avec $\mathcal{P}$. On note y_n l'ordonnée de M_n.
Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln(1 + |y_n|)}$.

15.17 Soit $R > r > 0$ deux réels.

1. Démontrer que l'équation

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

   définit une surface régulière $\mathcal{T}$. On l'appelle **tore**.
2. Préciser les intersections avec les plans d'équations $z = 0$ et $y = 0$.

⋆ **15.18** Le but de cet exercice est de donner un exemple de fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et telle que f ne dépende pas uniquement de x, autrement dit telle qu'*il n'existe pas* de fonction h à une seule variable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x, y) = h(x)$, pour tout $(x, y) \in U$.

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\,;\ x \in \mathbb{R}_-\}$.

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Résoudre sur U l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
3. Conclure.

★★ **15.19** Soit $D = [0,1] \times \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ une solution du problème :

$$(\mathcal{P}) : \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad f(0,t) = f(1,t) = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D} =]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall (x,t) \in \overset{\circ}{D} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(0,t) = f(1,t) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ et $T > 0$. On pose $f_\varepsilon : (x,t) \mapsto f(x,t) + \varepsilon x^2$. Démontrer que la restriction de f_ε à $K_T = [0,1] \times [0,T]$ n'atteint pas son maximum sur $]0,1[\times]0,T]$.
   Indication. Justifier que si $g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, où I un intervalle ouvert, atteint son maximum en x_0, alors $g''(x_0) \leqslant 0$.
   (b) Démontrer que $f \leqslant 0$, puis $f = 0$.
2. On suppose qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x,0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k\pi x).$$

   À l'aide de l'exercice 10 de la page 827, déterminer f.

★ **15.20** Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \qquad (E)$$

Déterminer successivement les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant (E) définies sur les ouverts suivants :

(a) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leqslant 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(c) $W = \mathbb{R}^2$.

15.21 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b^2 - 4ac > 0$, et $a \neq 0$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

par un changement de variables linéaire.

⋆ **15.22** On pose $U = {\mathbb{R}_+^*}^2$. On convient qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ est de casse $\mathcal{C}^i$ si ses deux applications composantes sont de lasse $\mathcal{C}^i$.

1. Démontrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(xy, \frac{x}{y}\right) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'elle est une bijection de U sur U.
   Montrer de plus que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. En posant le changement de variable $(u,v) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$, déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur U telles que :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

⋆⋆ **15.23** Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche les fonctions $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on ait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (x+1)(t+1)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x,0) = u_0(x) \qquad (*)$$

1. Si u est une solution de $(*)$, déterminer une fonction $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $t \mapsto u\big(X(t), t\big)$ soit constante.
2. Donner les solutions de $(*)$.

Solution des exercices

15.1 Dans cet exercice, la norme est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$

1. La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Le point (x,y) est un point critique si, et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - x + y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 + x - y) = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que si (x,y) est un point critique, alors $x^3 = -y^3$, donc $x = -y$ et $x(x^2-2) = 0$. Ainsi $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont les seuls points critiques de f.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,0) = x^2(x^2-2)$.
  Puisque $f(x,x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et que l'on a, pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, l'inégalité $f(x,0) < 0$, on en déduit que dans toute boule centré en $(0,0)$ il existe des points où f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives, ce qui implique que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
- Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = f(y,x)$, les deux autres points critiques seront de même nature.
- On sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$. Il s'ensuit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \leqslant 2(x^2+y^2)$$
$$(x^2+y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leqslant 2(x^4+y^4)$$

On en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \geqslant \frac{\|(x,y)\|^4}{2} - 4\|(x,y)\|^2 \underset{\|(x,y)\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x,y)\| > R \Longrightarrow f(x,y) \geqslant 1.$$

Par suite :

$$\inf_{\|(x,y)\| > R} f(x,y) \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{\|(x,y)\| \leqslant R} f(x,y) \leqslant f(0,0) = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \inf_{B_F\left((0,0),R\right)} f(x,y). \tag{$*$}$$

La boule fermée $B = B_F\big((0,0),R\big)$ étant un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, la restriction de f à B atteint son minimum et ce minimum est le minimum sur $\mathbb{R}^2$ d'après $(*)$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, ce minimum est atteint sur un point critique. Par suite, la fonction f atteint son minimum (qui vaut -8) en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Par croissances comparées, la fonction g tend vers 0 à l'infini (*i.e.* lorsque la norme de (x,y) tend vers l'infini) car :
$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad 0\leqslant g(x,y)\leqslant 3\big\|(x,y)\big\|^2\exp\Big(-\big\|(x,y)^2\big\|\Big)$$
Elle admet donc un maximum global.
En effet, il existe $r>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $\big\|(x,y)-(1,1)\big\|>r$ on ait $g(x,y)\leqslant f(1,1)/2$. Il s'ensuit que g est bornée et que :
$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)=\sup_{(x,y)\in B_F((1,1),r)} g(x,y).$$
Puisque $B_F\big((1,1),r\big)$ est fermée, bornée en dimension finie et que la fonction g est continue, la restriction de g à $B_F\big((1,1),r\big)$ atteint son maximum, qui est donc un maximum global pour g.
Ce maximum est atteint en un point critique, puisque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
Les dérivées partielles de g sont :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-2xe^{-(x^2+y^2)}(-2+2x^2+3y^2)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-2ye^{-(x^2+y^2)}(-3+2x^2+3y^2).$$
Les points critiques de g s'en déduisent aisément, et sont :
$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0).$$
   - La fonction g admet un minimum en $(0,0)$ car $g(0,0)=0$ et g est à valeurs positives.
   - Aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$, g prend la valeur $2e^{-1}$ et aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$ g prend la valeur $3e^{-1}$. Il s'ensuit que g n'admet pas de maximum en $(1,0)$ et $(-1,0)$, car $2/e<3/e$. Sachant qu'il existe un maximum, qu'il est atteint en un point critique, il est nécessairement atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$ (la fonction g prend la même valeur en ces deux points).

15.2 • ∗ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x,0,0)=x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent, f n'a pas de maximum global.
∗ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x,x,x)=3x^2-2x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent, f n'a pas de minimum global.

• La fonction polynomiale f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$. Ses points critiques sont caractérisés par :
$$x=yz \quad y=xz \quad z=xy. \tag{$*$}$$
En particulier, en multipliant ces égalités, $xyz=(xyz)^2$ et donc $xyz=0$ ou 1.
∗ Si $xyz=0$, alors l'un des termes est nul.Par exemple si $x=0$, alors $y=z=0$. Il s'ensuit que $(0,0,0)$ est l'unique point critique vérifiant $xyz=0$.
∗ si $xyz=1$, alors aucun terme n'est nul et $(*)$ se récrit :
$$x=\frac{1}{x} \quad y=\frac{1}{y} \quad z=\frac{1}{z}\cdot$$

On en déduit que $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ et $z=\pm 1$. Le produit xyz étant positif, les points critiques sont :

$$(1,1,1) \quad (1,-1,-1) \quad (-1,1,-1) \quad (-1,-1,1)$$

* Étudions le point $(0,0,0)$. Si $|z|\leqslant 1$, alors, pour tout $(x,y)\in \mathrm{IR}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z)-f(0,0,0) &= x^2+y^2+z^2-2xyz \\ &\geqslant x^2+y^2+z^2-2|x||y||z| \\ &\geqslant x^2+y^2+z^2-2|x||y| \\ &= \big(|x|-|y|\big)^2+z^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc un minimum local en $(0,0,0)$.

* Étudions le point $(1,1,1)$. Pour tout $(h,k,\ell)\in \mathrm{IR}^3$:

$$f(1+h,1+k,1+\ell)-f(1,1,1)=h^2+k^2+\ell^2-2hk\ell-2(hk+k\ell+\ell h)$$

Pour tout $h\neq 0$:

$$f(1+h,1,1)-f(1,1,1)=h^2>0,$$

par suite f n'admet pas de maximum local en $(1,1,1)$. Pour tout $h>0$:

$$f(1+h,1+h,1+h)-f(1,1,1)=-3h^2-2h^3<0,$$

et donc f n'admet pas de minimum local en $(1,1,1)$. Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en $(1,1,1)$.

* Puisque pour tout $(x,y,z)\in \mathrm{IR}^2$:

$$f(x,y,z)=f(x,-y,-z)$$

la fonction f n'atteint pas d'extremum local en $(1,-1,-1)$ (sinon il en atteindrait un en $(1,1,1)$). Il en est de même des points $(-1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$.

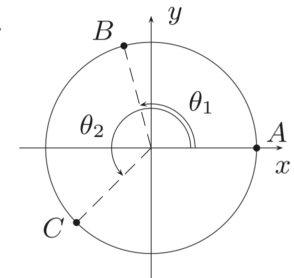
En conclusion, f admet un unique extremum local, atteint uniquement en $(0,0,0)$.

15.3 1. L'interprétation du déterminant en termes d'aire donne $\mathcal{A}=\dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|}{2}\cdot$

De plus :
$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix}\cos\theta_1-1 & \cos\theta_2-1\\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}-2\sin^2\frac{\theta_1}{2} & -2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\\ 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} & 2\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\end{vmatrix} \\ &= 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\begin{vmatrix}-\sin\frac{\theta_1}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2}\\ \cos\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2}\end{vmatrix} \\ &= 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot\end{aligned}$$

Puisque $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi$, les réels $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$ et $\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ sont dans $[0,\pi]$, il s'ensuit que $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\geqslant 0$ et donc que :

$$\mathcal{A}=2\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot$$

2. 

Considérons un triangle ABC inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Après rotation et symétrie, on peut supposer que :

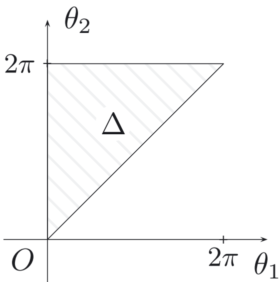
$$A(1,0),\ B(\cos\theta_1,\sin\theta_1)\ \text{et}\ C(\cos\theta_2,\sin\theta_2),$$

avec $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi$, car cela ne change pas l'aire.
Le problème revient à chercher les maxima de la fonction f définie sur :

$$\Delta=\left\{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi\right\}$$

par $f(\theta_1,\theta_2)=\sin\dfrac{\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot$

Par les théorèmes généraux f est continue sur Δ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{\Delta}$.



Le domaine Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. En effet, l'ensemble est fermé comme intersection de demi-plans fermés. Il est de plus clairement borné, et donc par dimension finie, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes. Il est facile de vérifier que :

$$\mathring{\Delta}=\left\{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0<\theta_1<\theta_2<2\pi\right\}.$$

La fonction f est à valeurs positives et nulle sur la frontière de Δ. Puisque f est non nulle, le maximum, qui existe, est atteint dans l'intérieur de Δ et donc en un point critique.

Soit $0<\theta_1<\theta_2<2\pi$. Le calcul donne, :

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}-\theta_1\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial\theta_2}(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\theta_2-\frac{\theta_1}{2}\right).$$

Sur l'intérieur de Δ on a $0<\frac{\theta_1}{2}<\pi$ et donc $\sin\frac{\theta_1}{2}\neq 0$. De même $\sin\frac{\theta_2}{2}\neq 0$. Par conséquent, si (θ_1,θ_2) est un point critique, alors :

$$\theta_1=\frac{\theta_2}{2}\pmod{\pi}\qquad\text{et}\qquad\theta_2=\frac{\theta_1}{2}\pmod{\pi},$$

soit encore :

$$\begin{cases}2\theta_1-\theta_2=0 & \pmod{2\pi}\\ \theta_1-2\theta_2=0 & \pmod{2\pi}\end{cases}$$

ce qui implique $\theta_1=\theta_2=0\pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Compte tenu de $0<\theta_1<\theta_2<2\pi$, la fonction f admet un unique point critique $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$. Puisqu'il est unique, d'après la discussion menée plus haut, la fonction f admet son maximum en ce point. Les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle sont donc les triangles équilatéraux.

15.4 Le plans $\mathbb{R}^2$ est muni de structure euclidienne canonique.

1. • Soit ABC un triangle de côtés a, b et c. L'inégalité triangulaire donne :
$$a = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\| = c + b.$$
Par symétrie, on obtient les deux autres inégalités.
   • Soit a, b et c trois réels positifs vérifiant les trois inégalités.
Posons $A = (0,0)$, $B(c,0)$ et $C_t = (b\cos t, b\sin t)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = a^2$. Le calcul donne :
$$\varphi(t) = \|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = (c - b\cos t)^2 + b^2\sin^2 t = c^2 + b^2 - 2bc\cos t$$
On a $\varphi(\mathbb{R}) = \left[(b-c)^2, (b+c)^2\right]$. Puisque $a \leqslant b + c$, on a $a^2 \leqslant (b+c)^2$.
Puisque $b \leqslant a + c$ et $c \leqslant a + b$, on a $b - c \leqslant a$ et $c - b \leqslant a$.
Par conséquent $|b - c| \leqslant a$ et $(b-c)^2 \leqslant a^2$.
Par suite, il existe t tel que $f(t) = a^2$. Ainsi il existe un triangle de côtés a, b et c.
2. L'aire du triangle ABC et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$. Par ailleurs, la formule d'Al-Kashi donne :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$
On en déduit que :
$$\begin{aligned}
4\mathcal{A}^2 = b^2c^2\sin^2\widehat{A} &= b^2c^2\left(1 - \cos^2\widehat{A}\right)\\
&= b^2c^2\left(1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a + c - b\right)\left(a + b - c\right)\left(-a + b + c\right)\left(a + b + c\right)\\
&= \frac{1}{4}(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a)(2p)
\end{aligned}$$
Le résultat annoncé s'ensuit.
3. Posons :
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z = 1,\ x \leqslant y + z,\ y \leqslant x + z,\ z \leqslant x + y\right\}$$
On veut maximiser l'aire des triangles de côtés x, y et z, pour $(x,y,z) \in D$. Il est clair que :
$$D = \left\{(x, y, 1 - x - y)\,;\ 0 \leqslant x \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - y,\ 0 \leqslant 1 - x - y \leqslant x + y\right\},$$
ou encore $D = \left\{(x, y, 1 - x - y) \mid (x,y) \in \Delta\right\}$, où :
$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \leqslant 1/2,\ y \leqslant 1/2,\ 1/2 \leqslant x + y \leqslant 1\right\},$$

Il s'agit de maximiser $16\mathcal{A}^2$ sur Δ, c'est-à-dire de maximiser :

$$f : (x,y) \mapsto (1-2x)(1-2y)\big(2(x+y)-1\big).$$

L'ensemble Δ est fermé (intersection de demi-plans fermés) et inclus dans $[0,1/2]^2$. De plus, on vérifie que :

$$\overset{\circ}{\Delta} = \left\{(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \mid x < 1/2,\ y < 1/2,\ 1/2 < x+y\right\}$$

La fonction f est continue sur Δ, car polynomiale. Puisque Δ est une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^2$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Elle est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\Delta}$. La fonction f est nulle sur la frontière. Puisque f est à valeurs positives et qu'elle est non nulle, la valeur de son maximum est strictement positive. Le maximum est donc atteint en des points de l'intérieur de Δ, donc en des points critiques de f.

Le calcul donne, pour $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(1-2y)\,(1-2x-y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(1-2x)\,(1-x-2y)\,.$$

Puisque $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$, on a $x \neq 1/2$ et $y \neq 1/2$. Si (x,y) est un point critique, alors :

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $(1/3,1/3) \in \overset{\circ}{\Delta}$ est le seul point critique de f. Ainsi la fonction f atteint son unique maximum en $(1/3,1/3)$. Les triangles correspondants sont donc les triangles équilatéraux de côtés $1/3$.

15.5 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a :

$$g(x) = \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \left(\frac{x}{\|x\|}\,\middle|\, v\right)\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\frac{x}{\|x\|} \mid v\right) \leqslant \|v\|$ et donc :

$$g(x) \geqslant \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|v\|\right).$$

Il s'ensuit que $g(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \geqslant g(0)$ pour tout x vérifiant $\|x\| \geqslant M$. Notons B la boule centrée en 0 et de rayon M. Puisque B est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et que g est continue à valeurs réelles, $g_{|B}$ est minorée et atteint son minimum en un point x_0. Ce point x_0 réalise le minimum de g sur $\mathbb{R}^n$, car il le réalise sur B et si $x \notin B$, on a :

$$g(x) \geqslant g(0) \geqslant g(x_0).$$

La fonction g admet bien un minimum.

2. Avec les notations de la question précédente, puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ et admet un minimum en x_0, on a :

$$0 = \nabla g(x_0) = \nabla f(x_0) - v.$$

Puisque cela est vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^p$, la fonction ∇f est surjective.

15.6 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

2. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^2 - 12X + 26$$

est donc scindé sur $\mathbb{R}$; puisque le produit des racines est strictement positif (il vaut 26), les deux racines sont de même signe et, puisque la somme des racines vaut 12, elles sont strictement positives. Notons λ_1 et λ_2 ces racines.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P\ \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)\, P^{-1} = P\ \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)\, {}^tP.$$

Par suite, pour $X \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} {}^tX\, A\, X = {}^tX\, P\ \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)\, {}^tP\, X &= {}^t\big({}^tPX\big)\ \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)\, ({}^tPX) \\ &= {}^tX'\ \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)\, X' = \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2, \end{aligned} \qquad (\star)$$

où l'on a posé ${}^tX' = (x'\ y') = {}^tXP$. Puisque les valeurs propres de A sont positives, on déduit de $(\star)$ que ${}^tXAX \geqslant 0$. De plus, une somme finie de termes positifs étant nulle si, et seulement si, tous les termes sont nuls, on a ${}^tXAX = 0$ si, et seulement si, $\lambda_1 {x'_1}^2 = \lambda_2 {x'_2}^2 = 0$, c'est-à-dire $x'_1 = x'_2 = 0$, *i.e.* $X' = 0$, car $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Puisque $X' = {}^tPX$ et P est inversible, cette dernière condition est équivalente à $X = 0$. Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ non nul, on a ${}^tXAX > 0$.

Remarque Comme on vient de le voir, les valeurs explicites des valeurs propres, à savoirs $6 + \sqrt{10}$ et $6 - \sqrt{10}$, n'interviennent pas dans le raisonnement, seul le fait qu'elles soient strictement positives importe.

3. Proposons deux méthodes.
   - Notons $U = (a, b)$. On a par le calcul :

     $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 + 2ax + 2by.$$

     Par suite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

     $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\big(5x + 3y + a\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\big(3x + 7y + b\big),$$

     et donc :

     $$\nabla f(x, y) = 2\big(5x + 3y + a, 3x + 7y + b\big) = 2(AX + U).$$

- Pour tout $(X,H) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $s \in \mathbb{R}$ on a :
$$f(X+sH) = f(X) + s\left({}^t\!XAH + {}^t\!HAX + 2{}^t\!UH\right) + s^2\,{}^t\!HAH.$$
Compte tenu du fait que la matrice A est symétrique et que ${}^t\!XAH$ est une matrice carrée d'ordre 1, donc égale à sa transposée, on a :
$$f(X+sH) = f(X) + 2s\,{}^t\!H\,(AX+U) + s^2\,{}^t\!HAH. \qquad (1)$$
Donc, la dérivée en 0 de l'application $s \mapsto f(X+sH)$ vaut $2{}^t\!H\,(AX+U)$, c'est-à-dire, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$:
$$(\,\nabla f(X) \mid H\,) = 2\,{}^t\!H\,(AX+U)$$
Par conséquent $\nabla f(X) = 2(AX+U)$.

4. - La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, les extrema, s'ils existent, sont atteints en des points critiques.
   - La matrice A est inversible, car $\det A = 26 \neq 0$. Par suite $X_0 = -A^{-1}U$ est l'unique point critique de f. Par ailleurs, la relation (1) donne pour tout $H \in \mathbb{R}^n$:
$$f(X_0+H) = f(X_0) + {}^t\!HAH.$$
D'après la question 2, on a pour tout $H \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité ${}^t\!HAH \geqslant 0$.
Par conséquent, on a :
$$\forall H \in \mathbb{R}^n \quad f(X_0+H) \geqslant f(X_0).$$
Par suite f atteint un minimum global en X_0, et uniquement en ce point puisque ${}^t\!HAH = 0$ si, et seulement si, $H = 0$.

15.7 1. - Il est clair que si $n = 1$, alors $m_\lambda = M_\lambda = \lambda \ln \lambda$. On suppose désormais que $n \geqslant 2$.
   - Éliminons le paramètre λ. Pour $x \in A_\lambda$, en notant $x'_i = \frac{x_i}{\lambda}$, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$\sum_{i=1}^n x'_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda} = 1$$
et
$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \sum_{i=1}^n \lambda x'_i \ln(\lambda x'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda x'_i \big(\ln\lambda + \ln x'_i\big) \\ &= \lambda\ln\lambda \sum_{i=1}^n x'_i + \lambda \sum_{i=1}^n x'_i \ln x'_i \\ &= \lambda \ln \lambda + \lambda \sum_{i=1}^n x'_i \ln x'_i. \end{aligned}$$
Puisque l'application $x \mapsto x/\lambda$ définit une bijection de A_λ sur A_1, on peut donc se ramener à l'étude de ce cas. Pour simplifier, notons $A = A_1$ et $f = f_1$.

- Notons h l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = x \ln x$ si $x > 0$ et $h(0) = 0$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par croissances comparées, elle est continue en 0. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = 1 + \ln x,$$

en particulier, h' est injective sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Remarquons que :

$$A = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) ; \ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B \right\}$$

où :

$$B = \Big\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in {\mathbb{R}_+^*}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i < 1 \Big\}.$$

Nous somme donc amené à chercher les bornes supérieure et inférieure de l'application g définie sur B par :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} h(x_i) + h\big(u(x)\big),$$

où u est l'application définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$u : x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i.$$

En considérant les applications u et $p_i : x \mapsto x_i$, avec $i \in [\![1, n-1]\!]$, définies sur $\mathbb{R}^{n-1}$, il vient que B est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. En effet elles sont polynomiales, donc continues, et B est l'intersection des $p_i^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $u^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

- Commençons par chercher les points critiques de g. Cela est possible, car B est un ouvert non vide et la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, la fonction u prend des valeurs strictement positive sur B et h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les points critiques $x \in B$ de g sont caractérisés par :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad \partial_i g(x) = -h'\big(u(x)\big) + h'(x_i) = 0$$

Ainsi, si x est un point critique, par injectivité de h', on a $x_i = u(x)$ pour tout i, et donc $u(x) = 1 - (n-1)u(x)$. Par suite :

$$x_c = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right)$$

est l'unique point critique possible et il est facile de vérifier que c'en est un.

- Montrons que g atteint son minimum en x_c.
Le calcul donne immédiatement $u(x_c) = 1/n$ et $g(x_c) = -\ln n$.

Montrons donc que $f(x) \geqslant -\ln n$, pour tout $x \in A$. On a , pour $x \in A$:

$$\begin{aligned} -f(x) - \ln n &= \sum_{i=1}^{n} -x_i \ln x_i - \ln n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1}{nx_i}\right) && \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{nx_i} - 1\right) && (\text{car } x_i \geqslant 0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

On en déduit que $m_1 = -\ln n$ et plus généralement $m_\lambda = \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

- Il est clair que $A \subset\,]0,1[^n$. Puisque $h(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in\,]0,1[$, on en déduit $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in A$ et $M_1 \leqslant 0$.

  Par ailleurs, si $0 < t < \frac{1}{n-1}$, alors :

  $$g(t,\ldots,t) = (n-1)h(t) + h\big(1-(n-1)t\big) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

  On en déduit $M_1 \geqslant 0$, puis $M_1 = 0$ et, plus généralement $M_\lambda = h(\lambda)$.

2. D'après l'étude menée plus haut :
   - la valeur m_1 est atteinte, et donc m_λ est atteinte ;
   - en revanche, $h(t) < 0$ pour $t \in\,]0,1[$ et, puisque $A \subset\,]0,1[^n$, on a $f(x) < M_1$ pour tout $x \in A$. Ainsi la borne supérieure M_1 (et plus généralement M_λ) n'est pas atteinte.

15.8 1. La restriction de f à S est une fonction continue (car f est continue du fait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$), définie sur une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^p$. Par théorème, elle est bornée et atteint ses bornes.

2. - Le maximum est atteint en $m_0 = (x_1,\ldots,x_p)$. Puisque m_0 est sur la sphère, il est non nul et l'une des composantes est non nulle. Pour fixer les idées, supposons $x_p \neq 0$. Toujours pour fixer les idées, supposons $x_p > 0$.
   - Tout $x \in S \cap \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_+^*$, peut s'écrire sous la forme.

   $$\left(x_1,\ldots,x_{p-1},\sqrt{1-\sum_{i=1}^{p-1} x_i^2}\right) \quad \text{où} \quad (x_1,\ldots,x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p-1} x_i^2 < 1.$$

   Puisque $f_{|S}$ a un maximum en m_0, la fonction :

   $$\begin{array}{rccc} g: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t_1,\ldots,t_{p-1}) & \longmapsto & f\left(t_1,\ldots,t_{p-1},\sqrt{1-\sum_{i=0}^{p-1} t_i^2}\right) \end{array}$$

   admet un maximum en $m_0' = (x_1,\ldots,x_{p-1})$, où

   $$U = \left\{(t_1,\ldots,t_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \mid \sum_{i=1}^{p-1} t_i^2 < 1\right\}.$$

Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme on vérifie facilement que U est un ouvert de $\mathbb{R}^{p-1}$, on en déduit que m_0' est un point critique de g. Par suite, à l'aide de la règle de la chaîne, il vient pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x_i}(m_0') = \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) - \frac{x_i}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i=0}^{p-1} x_i^2}} \frac{\partial f}{\partial x_p}(m_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) - \frac{x_i}{x_p} \frac{\partial f}{\partial x_p}(m_0),$$

donc, en posant $\lambda = \frac{1}{x_p} \frac{\partial f}{\partial x_p}(m_0)$, on a :

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!] \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) = \lambda\, x_i.$$

L'égalité $\frac{\partial f}{\partial x_p}(m_0) = \lambda\, x_p$ étant trivialement vérifiée, on en déduit :

$$\nabla f(m_0) = \lambda\, m_0,$$

ce qui montre la proposition.

15.9 1. Supposons que $g_{|\mathcal{S}}$ atteigne un extremum en m_0.

- Puisque par hypothèse m_0 est un point régulier de $\mathcal{S}$, d'après le théorème de paramétrisation, il existe un ouvert $V \subset U$ de $\mathbb{R}^3$, un ouvert non vide W de $\mathbb{R}^2$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\Phi : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \big(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)\big) \end{array}$$

  tels que

$$\mathcal{S} \cap V = \Phi(W).$$

  En particulier :

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{S} \cap V \quad \exists (u,v) \in W \quad g_{|\mathcal{S}}(x,y,z) = g\big(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)\big).$$

  Il s'ensuit que $h = g \circ \Phi$ admet un extremum en m_0', où $\Phi(m_0') = m_0$ (le point m_0' existe, car $m_0 \in \mathcal{S} \cap V$). Par composition, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ et puisque W est un ouvert, m_0' est un point critique de h.
- Comme, en utilisant les conventions usuelles concernant la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial z}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial z},$$

  la condition $\nabla h(m_0') = 0$ implique donc $\nabla g(m_0) \in \operatorname{Vect}\big(U, V\big)^{\perp}$, où :

$$U = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(m_0'), \frac{\partial Y}{\partial u}(m_0'), \frac{\partial Z}{\partial u}(m_0')\right)$$
$$V = \left(\frac{\partial X}{\partial v}(m_0'), \frac{\partial Y}{\partial v}(m_0'), \frac{\partial Z}{\partial v}(m_0')\right).$$

Par ailleurs, la fonction $f \circ \Phi$ est nulle. La règle de la chaine implique donc :

$$0 = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$0 = \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial z}\cdot$$

En particulier, $\nabla f(m_0) \in \operatorname{Vect}\big(U,V\big)^{\perp}$.

- D'après une remarque page 881, on peut toujours supposer que l'on est dans l'un des trois cas suivants :

$$\forall (u,v) \in V \quad \Phi(u,v) = \big(u, v, Z(u,v)\big)$$
$$\forall (u,v) \in V \quad \Phi(u,v) = \big(u, Y(u,v), v\big)$$
$$\forall (u,v) \in V \quad \Phi(u,v) = \big(X(u,v), u, v\big)$$

Supposons être dans le premier cas, les autres se traitant de la même manière. Dans ces conditions :

$$U = \Big(1\,,\,0\,,\,\tfrac{\partial Z}{\partial u}(m_0')\Big) \qquad \text{et} \qquad V = \Big(0\,,\,1\,,\,\tfrac{\partial Z}{\partial v}(m_0')\Big),$$

et donc la famille (U,V) est libre. Par suite $\operatorname{Vect}(U,V)$ est de dimension 2 et $\operatorname{Vect}(U,V)^{\perp}$ de dimension 1. Il s'ensuit que $\nabla f(m_0)$ et $\nabla g(m_0)$ sont liés, car se sont des éléments de $\operatorname{Vect}(U,V)^{\perp}$. La conclusion suit en remarquant que $\nabla f(m_0) \neq 0$.

2. Prenons $U = \mathbb{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-1$ et $g : (x,y,z) \mapsto ax^4+by^4+cz^4$. Les hypothèses de la question précédente sont vérifiées.

Puisque $\mathcal{S}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$ et f est continue, la fonction $g_{|\mathcal{S}}$ a des extrema atteints. Si (x,y,z) est un point où un extrémum est atteint, alors, il existe un réel λ tel que $\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z)$, c'est-à-dire :

$$2x = \lambda 4\, a\, x^3, \qquad 2y = \lambda 4\, b\, y^3 \qquad 2z = \lambda 4\, c\, z^3.$$

Le cas où $\lambda = 0$ est exclu, car $(0,0,0) \notin \mathcal{S}$. Ainsi nécessairement :

$$x \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda a}}\right\} \qquad y \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda b}}\right\} \qquad z \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda c}}\right\}.$$

- Le cas $= y = z = 0$ est exclu.
- Si $x = y = 0$ et $z \neq 0$, alors $z^2 = 1$ et $f(x,y,z) = c$. Les autres cas où deux des trois termes se traitent de la même manière.
- Si $x = 0$ et $y \neq 0$ et $z \neq 0$, on a :

$$1 = y^2 + z^2 = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

ce qui donne $\lambda = \frac{b+c}{2bc}$, puis

$$y^2 = \frac{c}{b+c} \qquad \text{et} \qquad z^2 = \frac{b}{b+c}$$

et donc $f(x,y,z) = \frac{bc}{b+c}\cdot$

Les deux autres cas où un seul des trois termes est nul se traitent de la même manière.

- Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$, alors :

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

ce qui donne $\lambda = \frac{ab+bc+ca}{2abc}$, puis

$$x^2 = \frac{bc}{ab+bc+ca} \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{ac}{ab+bc+ca} \qquad \text{et} \qquad z^2 = \frac{ab}{ab+bc+ca},$$

et donc $f(x,y,z) = \frac{abc}{ab+bc+ca}\cdot$

Il est clair que si u, v et w sont trois réels strictement positifs, alors :

$$\frac{uvw}{uv+vw+wu} < \frac{uvw}{vw+wu} = \frac{uv}{u+v} = u\,\frac{v}{v+u} < u.$$

Il s'ensuit que la valeur maximale de $g_{|\mathcal{S}}$ est c et qu'elle est atteinte aux points

$$(0,0,\pm 1).$$

De même, la valeur minimale de $g_{|\mathcal{S}}$ vaut $\mu = \frac{abc}{ab+bc+ca}$. Elle est atteinte aux huit points :

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\mu}{a}}, \pm\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \pm\sqrt{\frac{\mu}{c}}\cdot\right)$$

Remarque Pour résoudre cette question, on peut également adapter le point de vu utilisé à l'exercice 15.8 de la page 901

3. Posons $U = {\mathbb{R}_+^*}^3$ et les fonctions :

$$f : (x,y,z) \mapsto x+y+z-1 \qquad \text{et} \qquad g : (x,y,z) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\cdot$$

Les hypothèses de la première question sont vérifiées.

- On a $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, 1-t, 0) = +\infty$. On en déduit que la fonction f n'est pas majorée, donc n'a pas de maximum.
- Pour $0 < t < 1/3$, posons :

$$K_t = \left\{(x,y,z) \in [t,+\infty[^3 \;\middle|\; x+y+z = 1\right\}$$

Cet ensemble est une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^3$ et incluse dans $\mathcal{S}$.
La fonction $g_{|\mathcal{S}}$ étant à valeurs positives, on peut introduire $\mu = \inf g$. On a :

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{S} \setminus K_t \quad g(x,y,z) \geqslant \frac{1}{t}$$

et donc en choisissant t tel que $t \leqslant \frac{1}{1+\mu}$, ce qui est évidement possible, il vient :

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{S} \setminus K_t \quad g(x,y,z) \geqslant \mu + 1.$$

Il s'ensuit que μ coïncide avec la borne inférieure de g restreinte à K_t. Par théorème, $g_{|K_t}$ atteint son minimum (K_t est une partie fermée, bornée et f est continue). Par suite, la fonction $g_{|K_t}$ admet un minimum.

D'après la première question, aux points (x,y,z) où $g_{|S}$ atteint son maximum, il existe un réelle λ tel que $\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z)$, *i.e.* :

$$\left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}, -\frac{1}{z^2}\right) = \lambda(1,1,1)$$

On en déduit que le minimum est atteint en $(1/3, 1/3, 1/3)$.

15.10 1. Nous avons vu qu'une équation de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $m_0 = (x_0, y_0)$ est :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

(*cf.* l'exemple 3 de la page 880). En particulier, une tangente à $(\mathcal{C})$ ne passe pas par $(0,0)$.

Soit $ux + vy + w = 0$ une équation d'une droite $\mathcal{D}$. Elle ne passera pas par 0 si, et seulement si, $w \neq 0$, auquel cas :

$$-\frac{u}{w}\,x - \frac{v}{w}\,y = 1$$

est une autre équation de cette droite. Si la droite est tangente à $(\mathcal{E})$, alors il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ tel que :

$$-\frac{u}{w} = \frac{x_0}{a^2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{v}{w} = \frac{y_0}{b^2},$$

ce qui impose :

$$1 = \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = \left(\frac{au}{w}\right)^2 + \left(\frac{bv}{w}\right)^2.$$

Réciproquement, si $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$ et $(u,v) \neq (0,0)$, alors $w \neq 0$ et, en posant $x_0 = -a^2\dfrac{u}{w}$ et $y_0 = -b^2\dfrac{v}{w}$, le point (x_0, y_0) est un point de l'ellipse. Une équation de la tangente à l'ellipse en ce point est :

$$0 = 1 - \frac{x_0}{a^2}\,x + \frac{y_0}{b^2}\,y = 1 + \frac{u}{w}\,x + \frac{u}{w}\,y.$$

Ce qui démontre l'équivalence souhaitée.

2. • Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la première question, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$ est une tangente à l'ellipse si, et seulement si :

$$a^2u^2 + b^2v^2 = (ux_0 + vy_0)^2.$$

Il est facile d'établir qu'une équation de la normale à $\mathcal{D}$ passant par m_0 est $v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0$. Ainsi, il passe par m_0 deux tangentes à $(\mathcal{E})$ orthogonales entres elles, si, et seulement s'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} a^2u^2 + b^2v^2 = (ux_0 + vy_0)^2 \\ b^2u^2 + a^2v^2 = (vx_0 - uy_0)^2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient :

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = (u^2 + v^2)(x_0^2 + y_0^2).$$

Ainsi, l'ensemble recherché est l'ensemble des $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que :

$$(\mathcal{S}') \quad \begin{cases} a^2u^2 + b^2v^2 = (ux_0 + vy_0)^2 \\ x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

il est donc inclus dans le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

- Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. Montrons qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que :

$$a^2u^2 + b^2v^2 = (ux_0 + vy_0)^2, \qquad (\star)$$

ce qui démontrera que l'ensemble recherché est exactement le cercle $\mathcal{C}$. La relation $(\star)$ peut se réécrire :

$$(a^2 - x_0^2)u^2 + (b^2 - y_0^2)v^2 - 2\,u\,v\,x_0\,y_0 = 0.$$

$*$ Si $x_0 = \pm a$, alors $(1, 0)$ est une solution.

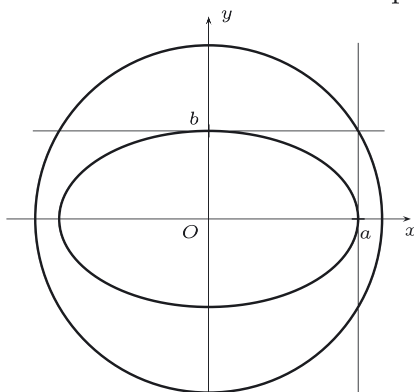
$*$ Si $x_0 \neq \pm a$, du fait que $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$, la relation $(\star)$ est équivalente à :

$$u^2 - 2\frac{x_0\,y_0}{a^2 - x_0^2}\,uv - v^2 = 0.$$

En fixant un $v \neq 0$ quelconque, on est ramené à l'équation :

$$P(u) = 0 \qquad \text{où} \qquad P = X^2 - 2\frac{x_0\,y_0\,v}{a^2 - x_0^2}\,X - v^2.$$

Le polynôme P a deux racines réelles, car il est de degré 2, unitaire et de coefficient constant $-v^2 < 0$. Cela termine la preuve.



15.11 1. Notons $\mathcal{D}_t$ la droite d'équation $y = tx$. L'intersection $\mathcal{D}_t \cap \mathcal{X}$ est caractérisée par l'équation :

$$x^3(1 + t^2) = x^2(1 - t^2).$$

Il s'ensuit, du fait que $1 + t^2$ n'est jamais nul, qu'il y a en général deux points d'intersection :

$$O = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad M_t = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, t\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right).$$

2. - En notant $\mathcal{D}_\infty$ la droite d'équation $x = 0$, il est clair que $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_\infty \cup \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_t$.

Par conséquent :

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} \cap \mathcal{D}_\infty) \cup \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\mathcal{X} \cap \mathcal{D}_t).$$

Il est facile de vérifier que $\{O\}$ est l'intersection de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{D}_\infty$. On en déduit donc :

$$\mathcal{X} = \{O\} \cup \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{O, M_t\} = \{O\} \cup \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{M_t\}.$$

Enfin, en remarquant que $M_1 = O$, il vient que :

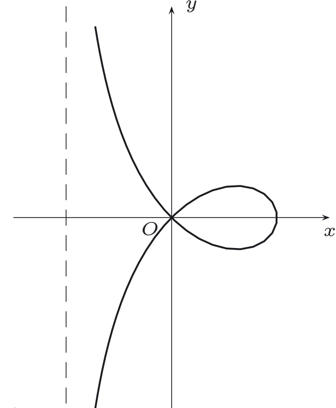
$$\mathcal{X} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{M_t\} = \gamma(\mathbb{R}) \qquad \text{où} \qquad \gamma : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

- Étudions l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$. Notons $x : t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y : t \mapsto tx(t)$. Ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction x est paire et la fonction y est impaire. On peut donc restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$, le support de Γ étant alors symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

  $$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}.$$

  Le signe de $y'(t)$ est celui de $1-4t^2-t^4 = 5-(2+t^2)^2$. L'étude des signes de x' et y' est alors immédiate et l'on a, en notant $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$, le tableau de variations suivant.

t	0	t_0	$+\infty$
$x'(t)$		$-$	
x	1		-1
$y'(t)$	$+$	0	$-$
y	0	$y(t_0)$	$-\infty$



3. Il est facile de vérifier que P est une fonction polynomiale.
   Comme $m_0 \in \mathcal{X}$, on a $P(0) = 0$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, d'après le théorème 11 de la page 820, $P'(0) = (\nabla f(m_0) \mid u)$. Ainsi, u est vecteur directeur de la tangente en m_0 si, et seulement si, u est orthogonal à $\nabla f(m_0)$, donc si, et seulement si, $P'(0) = 0$. La conclusion suit.
4. - Tous les points de $\mathcal{X}$ sont réguliers, à l'exception de O.
     En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

     $$\nabla f(x,y) = (3x^2+y^2-2x, 2y(1+x)).$$

     Il n'y a pas de point critique avec $x = -1$, car $y^2+5=0$ n'a pas de solution réelle. Les seuls points critiques de f sont donc $(0,0)$ et $(2/3,0)$. Puisque $(2/3,0) \notin \mathcal{X}$, le seul point non régulier de $\mathcal{X}$ est O.
   - Par ailleurs P est un polynôme de degré au plus 3 dont le coefficient de degré 3 est $a(a^2+b^2)$.
     Dans le cas où $a \neq 0$, alors P ayant une racine double réelle, sa troisième

racine est réelle. Cela donne l'autre point d'intersection de la tangente avec $\mathcal{X}$. Dans le cas où $a = 0$, puisque $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2 - 2x, 2y(1+x))$, cela ne peut se produire que si $y(x+1) = 0$, et puisque $(x,y) \in \mathcal{X}$, si, et seulement si, $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (1,0)$. Le premier cas est à exclure car $(0,0)$ n'est pas un point régulier. Ainsi $(1,0)$ est le seul point tel que P soit de degré 2 et donc tel que la tangente ne recoupe pas $\mathcal{X}$.

15.12 On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$.

On cherche à établir l'existence d'un $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et d'une fonction φ définie sur $]-\alpha, \alpha[$ et à valeurs dans $]-\beta, \beta[$ tels que $V =]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[$ soit inclus dans U et $V \cap \mathcal{X}$ soit le graphe de φ.

- Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$, par continuité de l'application $\frac{\partial f}{\partial y}$, il existe $\beta > 0$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in B_F(0,\beta)$.
- Fixons un tel β. Ainsi, la fonction $y \mapsto f(0,y)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-\beta, \beta]$. On en déduit que $f(0,\beta) > 0$ et par continuité de f en $(0,\beta)$, il existe $0 < \alpha_1 \leqslant \beta$ tel que $f(x,\beta) > 0$ pour tout $x \in [-\alpha_1, \alpha_1]$. De même il existe $0 < \alpha_2 \leqslant \beta$ tel que $f(x,-\beta) < 0$ pour tout $x \in [-\alpha_1, \alpha_1]$.
- Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Puisque $0 < \alpha \leqslant \beta$, on a de plus les inclusions :
$$V =]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[\subset B_F(0,\beta) \subset U.$$
- Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$. Puisque $V \subset B_F(0,\beta)$, pour tout $y \in [-\beta, \beta]$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$. Il s'ensuit que l'application continue $y \mapsto f(x,y)$ est strictement croissante sur $[-\beta, \beta]$. Elle réalise donc une bijection de $[-\beta, \beta]$ sur $\big[f(x,-\beta), f(x,\beta)\big]$. Du fait que l'on ait $f(x,-\beta) < 0$ et $f(x,\beta) > 0$, il existe un unique $y \in [-\beta, \beta]$ tel que $f(x,y) = 0$. Puisque $f(x,\beta) \neq 0$ et $f(x,-\beta) \neq 0$, on en déduit que $y \in]-\beta, \beta[$; on le note $\varphi(x)$. En conclusion :
$$\mathcal{X} \cap V = \Big\{ \big(x, \varphi(x)\big) \ ; \ x \in]-\alpha, \alpha[\Big\}.$$

15.13 1. Utilisant l'équation du plan tangent en m_0 donnée à l'exemple 4 de la page 885[1], les points $m = (x,y,z)$ de l'intersection de $\mathcal{H}$ et du plan tangent en m_0 sont caractérisés par le système :
$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1 & (1) \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

1. Cette formule n'est nullement un résultat de cours. Il faut donc savoir la redémontrer au cas par cas.

Puisque $m_0 \in \mathcal{H}$, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y-y_0}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z-z_0}{c}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \dfrac{y_0(y-y_0)}{b^2} - \dfrac{z_0(z-z_0)}{c^2} = 0, \end{cases}$$

ce qui peut se réécrire :

$$(\mathcal{E}) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y'}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z'}{c}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{x_0 x'}{a^2} + \dfrac{y_0 y'}{b^2} - \dfrac{z_0 z'}{c^2} = 0. \end{cases}$$

2. Dans ces conditions, le système $(\mathcal{E})$ s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y'}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z'}{c}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{y_0 y'}{b^2} - \dfrac{z_0 z'}{c^2} = 0. \end{cases}$$

- Si l'on suppose de plus que $z_0 = 0$, alors on a $y' = 0$, car dans ces conditions la relation $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1$ implique que $y_0 = \pm b$. Ainsi le système $(\mathcal{E})$ est équivalent à :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{z'}{c}\right)^2 = \left(\dfrac{x'}{a} + \dfrac{z'}{c}\right)\left(\dfrac{x'}{a} - \dfrac{z'}{c}\right) = 0 \\ y' = 0. \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est bien l'union des droites vectorielles (évidemment distinctes), chacune étant donnée comme l'intersection de deux plans :

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{a} + \dfrac{z'}{c} = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dfrac{x'}{a} - \dfrac{z'}{c} = 0 \\ y' = 0. \end{cases}$$

- Si $z_0 \neq 0$, alors le système $(\mathcal{E})$ s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y'}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z'}{c}\right)^2 = 0 \\ z' = \dfrac{c^2 y_0}{b^2 z_0}\, y', \end{cases}$$

  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 + \dfrac{y'^2}{b^2}\left(1 - \dfrac{c^2 y_0^2}{b^2 z_0^2}\right) = 0 \quad (1') \\ z' = \dfrac{c^2 y_0}{b^2 z_0}\, y'. \end{cases}$$

  Compte tenu du fait que $m_0 \in \mathcal{H}$, on a $\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, ce qui implique que $c^2 y_0^2 - b^2 z_0^2 > 0$ et par suite $1 - \frac{c^2 y_0^2}{b^2 z_0^2} < 0$. On peut ainsi réécrire l'équation $(1')$

sous la forme $\left(\dfrac{x'}{a}\right)^2 - \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 0$, où β est une constante qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. Par conséquent, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est bien l'union des droites vectorielles (évidemment distinctes) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x'}{a} + \dfrac{y'}{\beta} = 0 \\ z' = \dfrac{c^2 y_0}{b^2 z_0}\, y' \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x'}{a} - \dfrac{y'}{\beta} = 0 \\ z' = \dfrac{c^2 y_0}{b^2 z_0}\, y'. \end{array}\right.$$

3. On suppose toujours $x_0 = 0$. Dans ces conditions, $m \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ si, et seulement si, $m - m_0$ appartient à l'union de deux droites vectorielles distinctes.
   Par suite, $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ est la réunion de deux droites passant par m_0.

Remarques

- On peut démontrer la propriété en tout point de $\mathcal{H}$. Le calcul « brutal » est très lourd et pénible à mettre en place. On peut cependant démontrer le résultat de manière élégante, en ne faisant guère de calculs, mais en utilisant des concepts hors-programme.
- Le résultat précédent montre que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux familles de droites. Cette propriété fait que les hyperboloïdes à une nappe sont beaucoup utilisés en architecture industrielle, par exemple pour les cheminées de refroidissement des centrales thermiques ou nucléaires, etc. En effet, le fait qu'un hyperboloïde à une nappe soit la réunion de deux familles de droites confère à une structure qui aurait cette forme une facilité de réalisation, tout en assurant une grande solidité qu'un simple cylindre n'aurait pas.

15.14 Notons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy - z. \end{array}$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$.
   Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
   $$\nabla f(x,y,z) = (y, x, -1) \neq (0,0,0).$$
   Il s'ensuit que la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ est régulière. En particulier, une équation de $\mathcal{T}$ est :
   $$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - z_0) = y_0 x + x_0 y - z - x_0 y_0 = 0.$$
2. Soit $m = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un point quelconque. Il appartient à $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ si, et seulement s'il est solution du système :
   $$(\mathcal{E}) \quad \left\{\begin{array}{l} xy = z \\ y_0 x + x_0 y - z - x_0 y_0 = 0. \end{array}\right.$$
   Du fait que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :
   $$(x - x_0)(y - y_0) = xy - y_0 x - x_0 y + x_0 y_0,$$
   le système $(\mathcal{E})$ peut se réécrire sous la forme :
   $$(\mathcal{E}) \quad \left\{\begin{array}{l} (x - x_0)(y - y_0) = 0 \\ y_0 x + x_0 y - z - x_0 y_0 = 0, \end{array}\right.$$

soit encore, en notant $u = m - m_0 = (x', y', z')$:

$$(\mathcal{E}') \quad \begin{cases} x'y' = 0 \\ y_0 x' + x_0 y' - z' = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $m \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$ si, et seulement si, u appartient à l'union des deux droites vectorielles d'équations :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x_0 y' - z' = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' = 0 \\ y_0 x' - z' = 0. \end{cases}$$

La conclusion en découle.

15.15 1. On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en additionnant à la dernière colonne la somme des deux autres :

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ z & x & 1 \\ y & z & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Il s'ensuit que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ est inclus dans $\mathcal{X}$.

2. Il est facile de vérifier que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\nabla f(x,y,z) = 3\big(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy\big)$$

- Il est clair que $(0,0,0) \in \mathcal{X}$ est un point critique.
  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ un point critique. Pour fixer les idées, supposons $x \neq 0$. On a donc $z = y^2/x$, et par conséquent :
  $$x^2 = yz = y^3/x$$
  Il s'ensuit que $x^3 = y^3$, donc $x = y$, puis $z = x$. Ainsi, si $(x,y,z) \in \mathcal{X}$ n'est pas un point régulier, alors $x = y = z$. Il est facile de vérifier que tout point $(x,x,x) \in \mathbb{R}^3$ est un point critique de $\mathcal{X}$.
  Si $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{X}$ est un point régulier de $\mathcal{X}$, alors une équation du plan tangent en m_0 est :
  $$(x_0^2 - y_0 z_0)(x - x_0) + (y_0^2 - x_0 z_0)(y - y_0) + (z_0^2 - x_0 y_0)(z - z_0) =$$
  $$(x_0^2 - y_0 z_0)\, x + (y_0^2 - x_0 z_0)\, y + (z_0^2 - x_0 y_0)\, z = 0.$$
- Un point $m_0 \in \mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ est critique si, et seulement si, $x_0 = y_0 = z_0$, *i.e.* $m_0 = 0$. Supposons ainsi $m_0 \in \mathcal{P} \setminus \big\{(0,0,0)\big\}$. Pour tout $u \in \mathcal{P}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $m_0 + tu \in \mathcal{P}$ et donc l'arc paramétré $\gamma : t \mapsto m_0 + tu$ est à valeurs dans $\mathcal{X}$. Puisque $\gamma'(0) = u$, le point $m_0 + u$ est un point du plan tangent $\mathcal{T}_{m_0}$ à $\mathcal{X}$ en m_0. Par suite $\mathcal{P}$ est inclus dans ce plan tangent, donc, du fait que $\mathcal{P}$ est un plan, $\mathcal{T}_{m_0} = \mathcal{P}$.

3. Puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx),$$

L'ensemble $\mathcal{X}$ est la réunion du plan d'équation $x + y + x = 0$ et de l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$.

Par ailleurs, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a suivant le principe de mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}yz \\ &= \left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y - z)^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ si, et seulement si, $y = z$ et $2x - y - z = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = y = z$. Par conséquent, $\mathcal{X}$ est l'union du plan d'équation $x + y + z = 0$ et de la droite $\operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$.

15.16 Posons $f : (x, y) \mapsto 2px - y^2$. On définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale, sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla f(x, y) = (2p, -2y).$$

Ainsi, tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont réguliers pour f.

On sait que la normale en un point $A(a, b)$ de $\mathcal{P}$ est dirigée par $\nabla f(a, b)$. Il s'ensuit qu'une équation de cette normale est :

$$\mathcal{N}_A : b(x - a) + p(y - b) = bx + py - \frac{b^3}{2p} - pb = 0.$$

* Si $b = 0$, une équation de la normale est : $y = 0$. Cette droite n'a qu'un seul point d'intersection avec $\mathcal{P}$, le point $(0, 0)$.
* Si $b \neq 0$, les points $M(x, y)$ d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{P}$ sont caractérisés par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} y^2 = \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

or :

$$y^2 - \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) = y^2 + \frac{2p^2}{b}y - (b^2 + 2p^2) = P(y).$$

Puisque b est une racine réelle du polynôme P du second degré, on en déduit que l'autre racine b' est réelle et vaut :

$$b' = -\frac{2p^2}{b} - b = -\frac{2p^2 + b^2}{b}\cdot$$

On constate que $b' \neq 0$. De plus, on aura $b = b'$ si, et seulement si, :

$$2b = -\frac{2p^2}{b}$$

ce qui implique $b^2 = -p^2$, qui est impossible.
En conclusion, $\mathcal{N}_A$ a un unique point d'intersection autre que A avec $\mathcal{P}$ et ce point est différent de $(0,0)$.

- Il vient de l'étude précédente que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathcal{P} \setminus \{(0,0)\}$.
Toujours d'après l'étude précédente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = -\frac{2p^2 + y_n^2}{y_n}.$$

Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $z_n = |y_n|$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{2p^2 + z_n^2}{z_n} = \frac{2p^2}{z_n} + z_n.$$

* Étudions la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est immédiat qu'elle est à valeurs positives et croissante. Si elle admet une limite finie, celle-ci serait strictement positive et, par opérations sur les limites, on aurait l'égalité $\ell = \ell + \frac{2p^2}{\ell}$, ce qui est impossible. Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie et puisqu'elle est croissante :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

* Ainsi, puisque z_n tend vers $+\infty$:

$$\ln(1+z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln z_n.$$

On en déduit que les séries $\sum \frac{1}{\ln(1+|y_n|)}$ et $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ sont de même nature.

* Donnons une majoration asymptotique de z_n. Pour tout entier n, on a :

$$z_{n+1}^2 = z_n^2 + 4p^2 + \frac{4p^4}{z_n^2}.$$

Ainsi, du fait que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a :

$$z_{n+1}^2 - z_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4p^2.$$

On en déduit, du fait que $p > 0$, qu'à partir d'un certain rang n_0 on a :

$$z_{n+1}^2 - z_n^2 \leqslant 8p^2.$$

Fixons n_0. Par sommation, il vient pour $n \geqslant n_0$:

$$z_n^2 - z_{n_0}^2 \leqslant 8p^2(n - n_0),$$

donc :

$$z_n^2 = \mathrm{O}(n) \qquad \text{et} \qquad \ln z_n = \frac{\ln(z_n^2)}{2} = \mathrm{O}(\ln n).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln z_n}\right)\cdot$$

Puisque $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, par comparaisons aux séries de Riemann, la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergence et, par comparaison, la série à terme général positif $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ diverge. Par suite $\sum \frac{1}{\ln\left(1+|y_n|\right)}$ est divergente.

15.17 1. Soit la fonction $f : (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2(x^2+y^2)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{T}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, les points critiques de f sont caractérisés par le système :

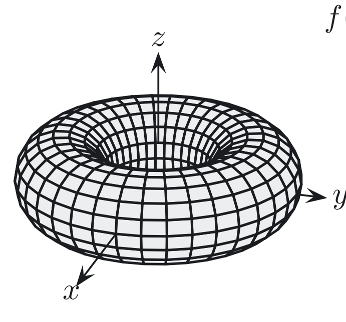
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2) = 0. \end{cases}$$

Soit (x,y,z) est un point critique de $\mathcal{T}$.
Puisque $R^2 > r^2$, l'équation $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$ donne $z=0$. De plus $(x,y) \neq (0,0)$ car $(0,0,0) \notin \mathcal{T}$. Les relations $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0$ impliquent alors que $x^2+y^2 = R^2+r^2$, car x et y ne sont pas tous les deux nuls . On a alors :

$$0 = f(x,y,0) = 4R^4 - 4R^2(R^2+r^2) = -4R^2r^2 < 0,$$

ce qui est impossible. La surface est donc régulière.

2. Pour appréhender cette surface, on peut considérer l'intersection avec le plan d'équation $z=0$. On a :



$$\begin{aligned} f(x,y,0) &= (x^2+y^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2(x^2+y^2) \\ &= (x^2+y^2)^2 - 2(R^2+r^2)(x^2+y^2) + (R^2-r^2)^2 \\ &= (x^2+y^2-R^2-r^2)^2 - 4R^2r^2 \\ &= \big(x^2+y^2-(R-r)^2\big)\big(x^2+y^2-(R+r)^2\big). \end{aligned}$$

Ainsi, l'intersection avec le plan d'équation $z=0$ est la réunion de deux cercles de centre O, de rayons $R+r$ et $R-r$.

On peut également considérer l'intersection avec le plan d'équation $y=0$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,0,z) &= (x^2+z^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2x^2 \\ &= (x^2+z^2+R^2-r^2-2Rx)(x^2+z^2+R^2-r^2+2Rx) \\ &= \big((x-R)^2+z^2-r^2\big)\big((x+R)^2+z^2-r^2\big). \end{aligned}$$

Ainsi, l'intersection avec le plan d'équation $y=0$ est la réunion de deux cercles de rayons r, centrés respectivement en $(R,0,0)$ et $(-R,0,0)$.

15.18 1. L'application $\Phi : (x,y) \mapsto \bigl(x+|x|\bigr)^2 + y^2$ est continue, à valeurs positives et ne s'annule qu'aux points vérifiant $y = 0 = x+|x|$, c'est-à-dire les points de $\mathbb{R}_- \times \{0\}$. Par conséquent, $U = \Phi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. • Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

   * Soit $x > 0$. L'application $y \mapsto f(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle. Elle est donc constante et vaut $f(x,1)$ $(= f(x,-1))$.
   * Soit $x \leqslant 0$. L'application $y \mapsto f(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est donc constante et vaut $f(x,1)$. De même, elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et vaut $f(x,-1)$.
   * Puisque $f(x,1) = f(x,-1)$ pour $x > 0$, on a :

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = \begin{cases} f(x,1) & \text{si } y \geqslant 0\ ; \\ f(x,-1) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

   Les fonctions $g_1 : x \mapsto f(x,1)$ et $g_{-1} : x \mapsto f(x,-1)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. D'après la remarque initiale, les fonctions g_1 et g_{-1} coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit g_+ et g_- deux fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, coïncidant sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons f la fonction définie sur U par :

$$f(x,y) = \begin{cases} g_+(x) & \text{si } y \geqslant 0\ ; \\ g_-(x) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Puisque l'application $(x,y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur cet ouvert. De même sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$. Pour $(x,y) \in U$ tel que $x > 0$, on a par définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_+'(x) = g_-'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Cela assure par composition la continuité des dérivées partielles sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Les dérivées partielles étant continues sur les trois ouverts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, dont la réunion est U, elles sont continues sur U. Ainsi, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

• En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \begin{cases} g_+(x) & \text{si } y \geqslant 0\ ; \\ g_-(x) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

où g_- et g_+ sont des fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Compte tenu des questions précédentes, la fonction f définie sur U par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0\ ; \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ et } y > 0\ ; \\ -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ et } y < 0\ ; \end{cases}$$

convient.

15.19 1. (a) • Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert non vide I et $x_0 \in I$ tels que $g'(x_0) = 0$. Si $g''(x_0) > 0$, alors $x \mapsto g'(x)/(x - x_0)$ est à valeurs strictement positives sur un intervalle $]x_0, x_0 + \eta] \subset I$, avec $\eta > 0$. Par conséquent, g est strictement croissante sur $[x_0, x_0 + \eta]$. Par suite g n'atteint pas son maximum x_0. En conclusion, si g atteint son maximum en x_0, alors $g''(x_0) \leqslant 0$.

• Supposons que f_ε atteigne son maximum en $(x_0, t_0) \in]0,1[\times]0,T]$. Fixons (x_0, t_0). L'application $g : x \mapsto f_\varepsilon(x, t_0)$ définie sur $]0,1[$ atteint donc son maximum en x_0. Puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0) + 2\varepsilon = g''(x_0) \leqslant 0.$$

Par ailleurs f est solution de $(\mathcal{P})$, donc :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant -2\varepsilon < 0.$$

On en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que $[t_0 - \eta, t_0[\subset]0,T]$ et :

$$\forall t \in [t_0 - \eta, t_0[\quad \frac{f_\varepsilon(x_0, t) - f_\varepsilon(x_0, t_0)}{t - t_0} < 0.$$

En particulier $f_\varepsilon(x_0, t_0 - \eta) > f_\varepsilon(x_0, t_0)$, contredisant la définition de (x_0, t_0).

En conclusion, le maximum de f_ε n'est pas atteint sur $]0,1[\times]0,T]$.

(b) L'ensemble K_T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. La restriction de f_ε est continue, elle atteint donc son maximum en un point (x_0, t_0) de K_T. D'après la question précédente, on a :

- soit $x_0 = 0$ et $f_\varepsilon(x_0, t_0) = 0$;
- soit $x_0 = 1$ et $f_\varepsilon(x_0, t_0) = \varepsilon$;
- soit $t_0 = 0$ et $f_\varepsilon(x_0, t_0) = \varepsilon x_0^2 \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad f(x,t) \leqslant \varepsilon - \varepsilon x^2.$$

Cela étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, il vient :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad f(x,t) \leqslant 0,$$

et puisque cela est vérifié pour tout $T > 0$:

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \quad f(x,t) \leqslant 0.$$

Ainsi, $f \leqslant 0$. Comme la fonction $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f, on a $-f \leqslant 0$. En conclusion $f = 0$.

2. Notons $g : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k\pi x)$.

D'après la première question, si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de $(\mathcal{P})$ telles que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \varphi_1(x,0) = \varphi_2(x,0) = g(x),$$

alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est nulle.

D'après l'exercice 10 de la page 827, les fonctions $(x,t) \mapsto e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$ sont

des solutions de $(\mathcal{P})$. Par suite la fonction φ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \quad \varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

est l'unique solution de $(\mathcal{P})$ telle que $\varphi(x,0) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Finalement $f = \varphi$.

15.20 C'est une équation aux dérivées partielles linéaire. Donc, pour résoudre (E), il suffit de trouver une solution particulière et de résoudre l'équation homogène associée :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E_0)$$

- Pour trouver une solution particulière, on pourrait utiliser l'exercice 14.8 de la page 846 en remarquant que la fonction φ définie par $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ est positivement homogène de degré 2.
  Cela étant, il est naturel de chercher une solution polynomiale, et on trouve facilement que la fonction $\varphi/2$ est une solution de (E). Elle est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Le problème consiste maintenant à résoudre l'équation homogène (E_0).

(a) Résolution de (E_0) sur U.

On peut utiliser un changement de variable polaire $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ défini sur $V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$. En posant $f(x,y) = g(r,\theta)$, l'équation (E_0) devient $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$. En suivant la raisonnement exposé page 886, on montre que g ne dépend que de θ.

Par conséquent, les solutions sont les fonctions :

$$(x,y) \mapsto \varphi(\theta) = \varphi\left(2\operatorname{Arctan}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

où $\varphi(\theta) = g(1,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\pi,\pi\right[$.

(b) Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit f une solution. La restriction de f à U est donc de la forme précédente. Donc il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\pi,\pi\right[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in U\,,\ f(x,y) = \varphi(\theta).$$

Par continuité de f aux points de la forme $(x,0)$, avec $x<0$, on doit avoir :

$$\lim_{-\pi} \varphi = \lim_{\pi} \varphi.$$

La fonction φ se prolonge en une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$.

En notant $f(x,y) = g(r,\theta)$ pour $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$, on a d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ -r\sin\theta & \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix},$$

et donc, puisque $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\,\varphi'(\theta).$$

Ainsi :

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta) \underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0),$$

et

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta) \underset{\theta\to-\pi^+}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0).$$

Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ avec $\varphi'(\pi)=\varphi'(-\pi)$.

Réciproquement, on vérifie facilement qu'une fonction définie par $f(x,y)=\varphi(\theta)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ vérifiant $\varphi'(\pi)=\varphi'(-\pi)$ convient.

(c) Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2$.

De même, une solution vérifie la condition précédente en dehors de l'origine. Par continuité en $O=(0,0)$ le long de toute demi-droite d'extrémité O, on en déduit :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \varphi(\theta)=f(0,0).$$

Donc f est constante.

Réciproquement, les fonctions constantes sont évidemment des solutions.

15.21 Soit α, β, γ, δ tels que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, l'application :

$$(x,y)\mapsto(u,v)=(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Soit g la fonction définie par $g(u,v)=f(x,y)$. Le calcul donne :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2)D_{11} + (2a\alpha\gamma+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+2c\beta\delta)D_{12}+(a\gamma^2+b\gamma\delta+c\delta^2)D_{22},$$

où $D_{11}=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$, $D_{12}=\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$,

et $D_{22}=\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$.

Notant λ et μ les deux racines réelles distinctes de l'équation $at^2+bt+c=0$, on peut poser $\alpha=\lambda$, $\beta=1$, $\gamma=\mu$ et $\delta=1$, de sorte que :

$$a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2 = a\lambda^2+b\lambda+c=0,$$

$$a\gamma^2+b\gamma\delta+c\delta^2 = a\mu^2+b\mu+c=0,$$

$$2a\alpha\gamma+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+2c\beta\delta = \frac{4ac-b^2}{a}\neq 0.$$

Ainsi, f vérifie l'équation aux dérivées partielles (E) si, et seulement si, g vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0. \qquad (E')$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles admet pour solutions les fonctions de la forme $g(u,v) = h(u) + l(v)$ où h et l sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable (*cf.* l'exercice 12 de la page 886).

Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de (E) sont donc les fonctions f de la forme :

$$f(x,y) = h(\lambda x + y) + l(\mu x + y),$$

où h et l sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable.

15.22 1.
- Les deux applications composantes de φ sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. L'application φ est donc de classe $\mathcal{C}^2$.
- Il est clair que φ est à valeurs dans U.
- Soit $(u,v) \in U$ et $(x,y) \in U$. On a :

$$(u,v) = \varphi(x,y) \iff \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} u = xy \\ uv = x^2. \end{cases}$$

Comme $u > 0$ et $y > 0$, on en déduit :

$$(u,v) = \varphi(x,y) \iff \begin{cases} u = xy \\ x = \sqrt{uv} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ x = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

- On en déduit que φ est une bijection de U sur U (tout élément de U admet un unique antécédent par φ dans U). De plus :

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right). \end{array}$$

Par conséquent, φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ quelconque.
Posons le changement de variable :

$$(u,v) = \left(xy, \frac{x}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad g(u,v) = f(x,y)$$

c'est-à-dire introduisons $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g \circ \varphi = f$. Puisque φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
Par la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= y\,\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\,\dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= x\,\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{x}{y^2}\,\dfrac{\partial g}{\partial v}. \end{cases}$$

Ces relations sont valables pour tout couple (f,g) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ liées par la relation $f = g \circ \varphi$.

En itérant, compte tenu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y\left(y\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\right)+\frac{1}{y}\left(y\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\\ &= y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x\left(x\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{x}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\right)+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\left(x\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-\frac{x}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\\ &= x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2\frac{x^2}{y^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}-\frac{2x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial v}\cdot$$

Puisque $x \neq 0$ pour tout $(x,y)\in U$, et puisque φ est une bijection de U sur U, il s'ensuit que f est une solution du problème si, et seulement si, $g=f\circ\varphi^{-1}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)-\frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}=0. \qquad (\star)$$

- Soit $g\in\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. Pour tout $v>0$, la fonction $u\mapsto\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $z'=\frac{1}{2u}\,z$. Il existe donc une fonction $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telle que :

  $$\forall (u,v)\in U \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\varphi(v)\sqrt{u}. \qquad (1)$$

  Puisque $\varphi(v)=\frac{\partial g}{\partial v}(1,v)$ pour tout $v\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Fixons $u>0$. Il vient en intégrant (1), qu'il existe un réel $\Psi(u)$:

  $$g(u,v)=\Phi(v)\sqrt{u}+\Psi(u)$$

  où Φ est une primitive de φ. Puisque $\Psi(u)=g(u,1)-\Phi(1)\sqrt{u}$, la fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$. En conclusion, il existe deux fonctions Φ et Ψ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

  $$\forall (u,v)\in U \quad g(u,v)=\sqrt{u}\Phi(v)+\Psi(u).$$

- Soit Φ et Ψ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons g la fonction définie par :

  $$\forall (u,v)\in U \quad g(u,v)=\sqrt{u}\,\Phi(v)+\Psi(u).$$

  Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$. Il est facile de vérifier par le calcul que g est alors une solution de $(\star)$. Par suite, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

  $$\mathcal{S}_\star=\left\{(u,v)\mapsto\sqrt{u}\,\Phi(v)+\Psi(u)\,;\ (\Phi,\Psi)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})^2\right\}.$$

- L'ensemble des solutions du problème initial est donc :
$$\mathcal{S} = \left\{f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \mid f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{S}_\star\right\}.$$
Puisque φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$, on déduit :
$$\mathcal{S} = \left\{g \circ \varphi\,;\ g \in \mathcal{S}_\star\right\},$$
soit :
$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \sqrt{xy}\,\Phi\Big(\frac{x}{y}\Big) + \Psi(xy)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})^2\right\}.$$

15.23 1. Soit u une solution de $(*)$ et soit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Posons $g : t \mapsto u\big(X(t), t\big)$. Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et le théorème de dérivation en chaîne donne :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = X'(t)\frac{\partial u}{\partial x}\big(X(t), t\big) + \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(t), t\big)$$
c'est-à-dire, du fait que u est solution de $(*)$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \Big(X'(t) - \big(X(t)+1\big)\big(t+1\big)\Big)\,\frac{\partial u}{\partial x}\big(X(t), t\big)$$
Ainsi, si X est une solution de l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}) : y' - (1+t)y = (t+1)$$
alors g est constante.
L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est linéaire, résolue, du premier ordre, avec second membre. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée est :
$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \alpha \exp\Big(\frac{(t+1)^2}{2}\Big)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$
Il est immédiat que la fonction constante égale à -1 est une solution de $(\mathcal{E})$. Par suite, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est :
$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \alpha \exp\Big(\frac{(t+1)^2}{2}\Big) - 1\,;\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$
On notera dans la suite, pour α réel, $X_\alpha : t \mapsto \alpha \exp\Big(\frac{(t+1)^2}{2}\Big) - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2. La question précédente invite à poser un changement de variable.
Posons, pour $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$:
$$(x,t) = \Phi(\alpha, t) = \big(X_\alpha(t), t\big).$$
- Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est de plus bijective, car pour out $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}(x,t) = (X_\alpha(t), t) &\iff x = \alpha \exp\left(\frac{(t+1)^2}{2}\right) - 1\\ &\iff \alpha = (x+1)\exp\left(-\frac{(t+1)^2}{2}\right)\end{aligned}$$

- Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une application quelconque et posons :
$$v(\alpha, t) = u(x, t),$$
c'est-à-dire, définissons v par $v = u \circ \Phi$, qui est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Par composition, v est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$, d'après la règle de la chaîne :
$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(\alpha, t) &= X'_\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x}\big(X_\alpha(t), t\big) + \frac{\partial u}{\partial t}\big(X_\alpha(t), t\big)\\ &= \big(X_\alpha(t) + 1\big)\big(t + 1\big)\frac{\partial u}{\partial x}\big(X_\alpha(t), t\big) + \frac{\partial u}{\partial t}\big(X_\alpha(t), t\big)\end{aligned}$$

- Il s'ensuit que si u est une solution de $(*)$, alors $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Cela implique, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, que l'application $t \mapsto v(\alpha, t)$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et donc :
$$\forall (\alpha, t) \in \mathbb{R}^2 \quad v(\alpha, t) = v(\alpha, 0).$$
Par définition de v :
$$v(\alpha, 0) = u\big(\Phi(\alpha, 0)\big) = u\big(X_\alpha(0), 0\big) = u_0\big(X_\alpha(0)\big) = u_0\big(\alpha e^{1/2} - 1\big),$$
ce qui implique :
$$\forall (\alpha, t) \in \mathbb{R}^2 \quad v(\alpha, t) = u_0\big(\alpha e^{1/2} - 1\big).$$

- Il suit du dernier point que, si u est une solution, alors :
$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x, t) = v\big(\Phi^{-1}(x, t)\big) = u_0\left((x + 1)\exp\Big(-\frac{t^2}{2} - t\Big) - 1\right)$$
Il est facile de vérifier que cette fonction est solution de $(*)$.

Chapitre 16 : Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables



En première année nous avons étudié les ensembles finis et introduit la notion d'ensemble infini. Ce chapitre a pour but d'introduire la notion d'ensemble dénombrable qui est le type le plus simple d'ensemble infini. La notion de dénombrabilité jouera un rôle important en probabilités.

Définition 1

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Remarques

1. Compte tenu de la définition précédente, un ensemble dénombrable est nécessairement infini (rappelons qu'un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$). En revanche, la réciproque est fausse : il existe des ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables (de tels exemples seront vus dans l'exercice 9 de la page 941).

2. Concrètement un ensemble X dénombrable est un ensemble infini dont on peut numéroter les éléments de manière exhaustive, *i.e.* l'écrire sous la forme :

   $$X = \{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où les } x_n \text{ sont deux à deux distincts.}$$

   Dans l'écriture précédente, le fait que les x_n soient deux à deux distincts signifie que l'application $n \mapsto x_n$ est injective.

p.942

Exercice 1 Montrer que l'ensemble des entiers naturels pairs est dénombrable.

Proposition 1

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration. On peut énumérer les éléments de $\mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ \ldots$$

Plus formellement, l'application suivante est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} p & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ -p-1 & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

Pour justifier le caractère bijectif de φ, on peut expliciter sa bijection réciproque. On constate en effet qu'en prenant :

$$\psi\ :\ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, donc φ et ψ sont bijectives et $\psi = \varphi^{-1}$. □

p.942

Exercice 2 Soit A un ensemble dénombrable.
Montrer que tout ensemble en bijection avec A est dénombrable.

p.942

Exercice 3

1. Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
   Indication : numéroter dans l'ordre croissant.
2. En déduire que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Définition 2

Un ensemble est dit **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Exemple Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
En effet, si A est une partie d'un ensemble dénombrable, alors :

- soit A est finie ;
- soit A est infinie et alors A est dénombrable en tant que partie infinie d'un ensemble dénombrable (*cf.* deuxième question de l'exercice 3).

Les deux exercices suivants présentent des résultats pouvant se révéler très utiles pour prouver qu'un ensemble est au plus dénombrable.

p.943

Exercice 4 Soit A un ensemble non vide. Montrer que A est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

p.943

Exercice 5

1. Soit A un ensemble non vide. Montrer que A est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.
2. En déduire que l'image par une application d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Proposition 2

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration page 944

Corollaire 3 (Produit cartésien d'ensembles dénombrables)

Soit E et F deux ensembles dénombrables.
Alors le produit cartésien $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration page 945

Exemple L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

p.945

Exercice 6 Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
On pourra utiliser le résultat l'exercice 5.

p.945

Exercice 7 Soit E et F deux ensembles au plus dénombrables.

Montrer que le produit cartésien $E \times F$ est au plus dénombrable.

p.945

Exercice 8 (Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles non vides au plus dénombrables.
Notons $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

1. Construire une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur A.
2. En déduire que A est au plus dénombrable.

   On pourra utiliser le résultat de l'exercice 5

Exemples d'ensembles infinis non dénombrables

L'exercice suivant prouve qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables, en montrant que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

p.946

Exercice 9

1. Supposons qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   En considérant l'ensemble :
   $$A = \big\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\big\},$$
   aboutir à une contradiction. Conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
2. En explicitant une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, déduire de la question précédente que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
3. En explicitant une application injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, obtenir alors que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarques

- On peut démontrer en fait que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc que les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont non dénombrables et en bijection entre eux.
- Il existe des ensembles non dénombrables infinis qui ne sont pas en bijection avec $\mathbb{R}$. Par exemple, on peut démontrer de la même façon que dans la première question de l'exercice 9, que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{R}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & 2\mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ est bijective et assure donc que l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers naturels pairs est dénombrable. Pour justifier la bijectivité de φ, il suffit de constater que l'application :

$$\psi : \begin{array}{ccc} 2\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ p & \longmapsto & \dfrac{p}{2} \end{array}$$

vérifie $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{2\mathbb{N}}$, ce qui prouve que les applications φ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 2 Soit B un ensemble tel qu'il existe une bijection $\varphi : A \to B$. Comme A est dénombrable, il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \to A$. L'application $\varphi \circ \psi$ est alors une bijection de $\mathbb{N}$ vers B, ce qui prouve que B est dénombrable.

Exercice 3

1. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On obtient naturellement une numérotation des éléments de A en les ordonnant dans l'ordre croissant.
   Plus formellement, on construit une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to A$ de la manière suivante :

$$\varphi(0) = \min(A) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) = \min\big(A \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\}\big).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la validité de la définition de $\varphi(n)$ est assurée par le fait que la partie A étant infinie, l'ensemble :

$$A \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\}$$

  est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément.
- Justifions la bijectivité de φ.
  * *Injectivité.* Par construction de φ, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) > \varphi(n-1).$$

    L'application φ est donc strictement croissante, donc *a fortiori* injective.
  * *Surjectivité.* Comme φ est strictement croissante et à valeurs dans $A \subset \mathbb{N}$, on prouve, par récurrence immédiate, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n, \qquad \text{et donc} \qquad \varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

    Supposons φ non surjective. Alors il existe un élément a appartenant à $A \setminus \operatorname{Im}\varphi$. Un tel élément a vérifie alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a \in A \setminus \big\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\big\} \qquad \text{et donc} \qquad a \geqslant \varphi(n).$$

    On en déduit que φ est majorée par a, ce qui est en contradiction avec le fait que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque Pour justifier la bijectivité de φ, on aurait aussi pu expliciter sa bijection réciproque :

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a & \longmapsto & \operatorname{card}\big(A \cap [\![0, a-1]\!]\big). \end{array}$$

2. Soit E un ensemble dénombrable et A une partie infinie de E. Comme E est dénombrable, il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$. Cette bijection φ induit une bijection de A vers $\varphi(A)$. Comme A est infinie, $\varphi(A)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc $\varphi(A)$ est dénombrable d'après la première question. L'ensemble A est donc en bijection avec un ensemble dénombrable ; ainsi, d'après l'exercice 2, A est dénombrable.

Exercice 4

- Supposons A au plus dénombrable.
  * Si A est fini, alors, comme A est non vide, A est en bijection avec $[\![1,n]\!]$ où $n = \operatorname{card}(A)$. Il existe donc une bijection $\varphi : A \to [\![1,n]\!]$ qui fournit immédiatement une injection de A dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a & \longmapsto & \varphi(a). \end{array}$$

  * Si A est infini, alors A est dénombrable, et par définition il existe une bijection donc une injection de A dans $\mathbb{N}$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe une injection $\varphi : A \to \mathbb{N}$ et montrons que A est au plus dénombrable.
  * Si A est fini, alors par définition A est au plus dénombrable.
  * Supposons que A soit infini et montrons que A est dénombrable.
    L'application injective φ induit une bijection de A vers $B = \varphi(A)$ et, comme A est infini, B est aussi infini.
    L'ensemble B est alors une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc est dénombrable d'après l'exercice 3. L'ensemble A, en bijection avec un ensemble dénombrable, est donc dénombrable (*cf.* exercice 2).

Exercice 5

1. - Supposons A au plus dénombrable.
     * Si A est fini, alors, comme A est non vide, il existe une bijection :

$$\varphi : [\![1,n]\!] \to A \qquad \text{avec} \qquad n = \operatorname{card}(A).$$

       N'importe quel prolongement de φ à $\mathbb{N}$ tout entier constitue alors une surjection de $\mathbb{N}$ sur A. On peut construire un tel prolongement $\tilde{\varphi}$ en posant :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus [\![1,n]\!] \quad \tilde{\varphi}(k) = \varphi(1).$$

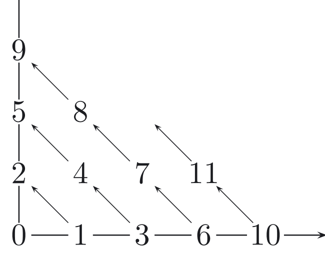
     * Si A est infini, alors A est dénombrable. Il existe alors une bijection et donc une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.
   - Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection $\varphi : \mathbb{N} \to A$ et montrons que A est au plus dénombrable. Supposons que A soit infini et montrons que A est dénombrable. Pour tout $a \in A$, la surjectivité de φ assure que l'ensemble $\varphi^{-1}(\{a\})$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément. Il est donc possible de définir l'application suivante :

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & a & \longmapsto & \min\left(\varphi^{-1}(\{a\})\right). \end{array}$$

L'application ψ est injective car si l'on considère a et b deux éléments distincts de A, les ensembles $\varphi^{-1}(\{a\})$ et $\varphi^{-1}(\{b\})$ sont disjoints donc n'ont pas le même plus petit élément.
D'après le résultat de l'exercice 4, A est dénombrable.

2. Soit $f : E \to F$ une application et A une partie au plus dénombrable de E.
   - Si $A = \varnothing$, alors $f(A) = \varnothing$.
   - Supposons $A \neq \varnothing$. L'application f induit une surjection de A vers $f(A)$. Comme A est au plus dénombrable, la question 1 assure qu'il existe une surjection $\varphi : \mathbb{N} \to A$. L'application $f \circ \varphi$ réalise alors une surjection de $\mathbb{N}$ sur $f(A)$, ce qui prouve, d'après la question 1, que $f(A)$ est au plus dénombrable.

Proposition 2 Proposons trois méthodes pour obtenir ce résultat classique.

- **Méthode 1.** La première méthode est la plus visuelle mais n'est pas la plus facile à écrire rigoureusement.
  On peut énumérer les éléments de $\mathbb{N}^2$ suivant le principe illustré ci-contre (le dessin indique pour chaque point son numéro), ce qui correspond à l'énumération suivante :
  $$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (3,0),\ \ldots$$
  

  Pour expliciter la bijection φ associée, constatons que les points $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $i+j=n$ sont numérotés, par ordonnée croissante, de $\frac{n(n+1)}{2}$ à $\frac{n(n+1)}{2}+n$.
  Il est en fait plus naturel d'expliciter ψ la bijection réciproque de φ :
  $$\psi\big((i,j)\big) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$
  On peut alors démontrer que ψ est bijective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.
- **Méthode 2.** De manière moins visuelle mais bien plus commode à rédiger, constatons que tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique comme le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair, *i.e.* sous la forme :
  $$2^p\,(2q+1) \quad \text{avec} \quad (p,q) \in \mathbb{N}^2.$$
  Cela signifie que l'application suivante est une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}^*$:
  $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p\,(2q+1) \end{array}$$
  donc l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & f(p,q)-1 \end{array}$ est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.
- **Méthode 3.** On peut également remarquer que l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p\,3^q \end{array}$ est injective par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers. Le résultat de l'exercice 4 de la page 940 assure alors que $\mathbb{N}^2$ est au plus dénombrable, donc dénombrable car infini. Notons que pour cette méthode, au lieu de 2 et 3, on aurait pu prendre n'importe quels nombres premiers p_1 et p_2 distincts.

Corollaire 3 Comme E et F sont dénombrables, il existe des bijections $\varphi_1 : \mathbb{N} \to E$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \to F$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & E \times F \\ & (p,q) & \longmapsto & \big(\varphi_1(p), \varphi_2(q)\big) \end{array}$$

est alors une bijection, ce que l'on prouve en constatant que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & (e,f) & \longmapsto & \big(\varphi_1^{-1}(e), \varphi_2^{-1}(f)\big) \end{array}$$

vérifie :

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{E\times F} \qquad \text{et} \qquad \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^2}.$$

En conclusion, puisque les ensembles $\mathbb{N}^2$ et $E \times F$ sont en bijection et que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $E \times F$ l'est aussi (*cf.* exercice 2 de la page 939).

Exercice 6 L'application suivante est surjective :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (p,q) & \longmapsto & \dfrac{p}{q} \end{array}$$

et donc $\mathbb{Q} = \operatorname{Im} \varphi = \varphi(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$. Comme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable (comme produit cartésien d'ensembles dénombrables), la deuxième question de l'exercice 5 de la page 940 assure que $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable, donc dénombrable car infini.

Exercice 7

- Si E ou F est l'ensemble vide, alors $E \times F$ aussi.
- Supposons $E \neq \varnothing$ et $F \neq \varnothing$. Comme E est au plus dénombrable, le résultat de l'exercice 4 de la page 940 assure qu'il existe une injection $\varphi_1 : E \to \mathbb{N}$.
  De même, comme F est au plus dénombrable, il existe une injection $\varphi_2 : F \to \mathbb{N}$.
  L'application :

  $$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & (e,f) & \longmapsto & \big(\varphi_1(e), \varphi_2(f)\big) \end{array}$$

  est alors une injection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}^2$. Toujours d'après le résultat de l'exercice 4, $E \times F$ est au plus dénombrable.

Exercice 8

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme A_n est au plus dénombrable et non vide, il existe, d'après l'exercice 5 de la page 940, une surjection $\varphi_n : \mathbb{N} \to A_n$.
   Considérons alors l'application $\Phi : \mathbb{N}^2 \to A$ définie par :

   $$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \Phi(n,p) = \varphi_n(p).$$

   Prouvons que Φ est surjective. Soit $a \in A$. Par définition de A, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \in A_n$. Alors, par surjectivité de φ_n, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = \varphi_n(p)$, c'est-à-dire $a = \Phi(n,p)$.
2. D'après la première question, l'ensemble A apparaît comme l'image de $\mathbb{N}^2$ par l'application Φ. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, le résultat de l'exercice 5 assure que A est au plus dénombrable.

Exercice 9

1. L'ensemble :
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$$
étant un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, la surjectivité de f assure qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $f(a) = A$ La contradiction vient du fait que :
   - si $a \in A$, alors, par définition de A, on a $a \notin f(a)$, c'est-à-dire $a \notin A$;
   - si $a \notin A$, alors, comme $A = f(a)$ et par définition de A, on a $a \in A$.

   L'hypothèse initiale est donc fausse. Par suite, il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est donc pas dénombrable.
2. Les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont naturellement mis en bijection par l'application $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui à $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe la fonction indicatrice de l'ensemble A :
$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$
Si $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, alors $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ le serait aussi (*cf.* exercice 2 de la page 939), ce qui n'est pas le cas.
3. L'application :
$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^n} \end{array}$$
est injective, par unicité du développement décimal propre d'un nombre réel (rappelons que l'on appelle développement décimal propre un développement décimal qui ne se termine pas par une infinité de 9 ; c'est bien le cas ici puisqu'il n'y a que des 0 et des 1). Donc, en notant $A = \Psi\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big)$, l'application Ψ induit une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers A.
Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, alors A le serait aussi (comme partie infinie d'un ensemble dénombrable, *cf.* exercice 3 de la page 939), ce qui contredirait le caractère non dénombrable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

S'entraîner et approfondir

16.1 L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres réels irrationnels est-il dénombrable ?

16.2 1. Montrer qu'un ensemble est infini si, et seulement s'il contient une partie dénombrable.

2. Montrer que si A est un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini, alors $A \cup B$ est en bijection avec B.

16.3 Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 8 de la page 940.

16.4 Nombres algébriques

Un nombre réel est dit **algébrique** s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques.

1. Justifier que $\mathcal{A}$ est un ensemble infini.
2. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ des polynômes à coefficients rationnels et de degré au plus n est dénombrable.

   (b) En déduire que l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.

   On pourra utiliser le résultat de l'exercice 8 de la page 940.
3. Obtenir alors que l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres réels algébriques est dénombrable.
4. Un réel est dit **transcendant** s'il n'est pas algébrique. Justifier qu'il existe des nombres transcendants.

Solution des exercices

16.1 On a $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, alors $\mathbb{R}$ serait la réunion de deux ensembles dénombrables. D'après le résultat de l'exercice 8 de la page 940, l'ensemble $\mathbb{R}$ serait alors au plus dénombrable (donc dénombrable car infini).
Or l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (*cf.* exercice 9 de la page 941).

16.2 1. Un ensemble qui contient une partie dénombrable est évidemment infini.
Réciproquement, supposons que E soit un ensemble infini et construisons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E distincts deux à deux.

- Comme E est infini, il est non vide, ce qui permet d'y choisir un élément a_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de E distincts deux à deux. Comme E est infini, il n'est pas égal à $\{a_0, \ldots, a_n\}$, ce qui permet de choisir un élément $a_{n+1} \in E$ différent des précédents.

L'ensemble $A = \{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une partie dénombrable de E. En effet, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & a_n \end{array}$ est bijective car :

- injective par construction de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- surjective par définition de A.

2. Soit A un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini.
Prouvons que $A \cup B$ est en bijection avec B. Quitte à changer A en $\tilde{A} = A \setminus B$, on peut supposer que A et B sont disjoints.
D'après la première question, il existe une partie $C \subset B$ dénombrable. Alors, d'après la deuxième question de l'exercice 8 de la page 940, l'ensemble $A \cup C$ est au plus dénombrable, donc dénombrable car infini.
Les deux ensembles C et $A \cup C$ étant dénombrables, on peut considérer une bijection $\varphi : C \to A \cup C$. Prolongeons l'application φ à B tout entier de la manière suivante :

$$\psi : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \cup B \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad x \in C \\ x & \text{si} \quad x \in B \setminus C \end{cases} \end{array}$$

et prouvons que ψ est une bijection de B vers $A \cup B$.
Pour cela, constatons que l'application :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} A \cup B & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in A \cup C \\ x & \text{si} \quad x \in B \setminus (A \cup C) \end{cases} \end{array}$$

vérifie :

$$\gamma \circ \psi = \mathrm{Id}_B \qquad \text{et} \qquad \psi \circ \gamma = \mathrm{Id}_{A\cup B},$$

donc ψ et γ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

16.3 • Montrons que $\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big)$.

∗ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque toute partie de $[\![0,n]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big) \subset \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$. D'où l'inclusion :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big) \subset \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \quad \text{et donc} \quad \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big) \subset \mathcal{P}_0(\mathbb{N}).$$

∗ Réciproquement, si A est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, alors en notant m le plus grand élément de A, on a $A \subset [\![0,m]\!]$, *i.e.* $A \in \mathcal{P}\big([\![0,m]\!]\big)$. D'où l'inclusion :

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \subset \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big).$$

• Puisque les ensembles $\mathcal{P}\big([\![0,n]\!]\big)$ sont finis, le résultat de l'exercice 8 assure que l'ensemble $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ est au plus dénombrable. Comme c'est un ensemble infini, il est dénombrable.

16.4 1. Il est clair que $\mathcal{A}$ contient $\mathbb{Q}$ puisque tout nombre rationnel q est racine du polynôme à coefficients rationnels $X - q$. Comme $\mathbb{Q}$ est infini, $\mathcal{A}$ l'est aussi.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Se donner un élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{Q}_n[X]$ revient à se donner la $(n+1)$-liste $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ de ses coefficients.

Plus formellement, l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_n[X] \\ (a_0, \ldots, a_n) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array}$ est une bijection. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}^{n+1}$ l'est aussi (comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables). Par suite, $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable.

(b) On a $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{Q}[X]$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Le résultat de l'exercice 8 de la page 940 nous assure alors que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

3. Notons γ l'application qui à $P \in \mathbb{Q}[X]$ associe l'ensemble de ses racines réelles :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[X] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}. \end{array}$$

On a alors $\mathcal{A} = \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}} \gamma(P)$.

On sait qu'un polynôme non nul possède un nombre fini de racines : tous les ensembles $\gamma(P)$, pour $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$, sont donc finis. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis. D'après le résultat de l'exercice 8 de la page 940, $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable.

Comme de plus $\mathcal{A}$ est infini, il est dénombrable.

4. Comme l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas (*cf.* exercice 9 de la page 941), l'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ est stricte. Autrement dit, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ des nombres transcendants n'est pas vide (et il est même infini).

Chapitre 17 : Espaces probabilisés

Espaces probabilisés 17

Introduction informelle

En première année ont été manipulées des probabilités sur des univers finis. L'objectif du cours de deuxième année est d'étendre ces notions aux univers quelconques (et donc éventuellement infinis).
Cette introduction informelle vise à motiver les deux principales nouveautés par rapport au cours de première année :

- la propriété d'additivité *dénombrable* va venir remplacer la propriété d'additivité *finie* ;
- l'ensemble des événements ne sera plus systématiquement $\mathcal{P}(\Omega)$ comme dans le cas fini, mais pourra en être un sous-ensemble strict (appelé *tribu*) respectant quelques propriétés.

1 Deux exemples d'univers infinis

Parmi les expériences aléatoires menant naturellement à envisager des univers infinis, considérons les deux suivantes qui vont permettre d'illustrer :

- pour la première, la propriété d'additivité dénombrable ;
- pour la seconde, la notion de tribu.

Dans la suite de cette introduction, on suppose disposer d'une pièce de monnaie, éventuellement truquée ; on note $p \in \,]0,1[$ la probabilité d'obtenir pile.

Premier exemple : obtention du premier pile

On lance la pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile et l'on s'intéresse au nombre de lancers effectués ; l'univers naturellement associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \mathbb{N}^*$.

Second exemple : jeu de pile ou face infini

Deux joueurs jouent à pile ou face, l'un pariant systématiquement sur pile et l'autre sur face. À chaque lancer, le perdant donne 1 euro au gagnant.
Les joueurs partent avec chacun une somme d'argent initiale et la partie s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné.

Représentons pile par 0 et face par 1. Le déroulement d'une partie peut être décrit par la liste des résultats des lancers, c'est-à-dire, si l'on note n la longueur de la partie, par un élément de $\{0,1\}^n$. Il est cependant impossible de prendre $\{0,1\}^n$ comme univers, car la longueur n de la partie est aléatoire et l'on ne peut pas la prévoir à l'avance, ni la majorer. Il faut *a priori* s'attendre à observer des parties arbitrairement longues... et à ce stade du raisonnement, rien ne nous assure qu'une partie se termine toujours en un nombre fini de coups.
Pour surmonter cette difficulté, on envisage une expérience aléatoire beaucoup plus abstraite : celle où la pièce est lancée une infinité de fois. L'univers choisi est alors :

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*},$$

chaque élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Ω étant la suite des résultats des lancers successifs : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est le résultat du n–ième lancer.

Univers dénombrable / non dénombrable

Les deux univers $\mathbb{N}^*$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ sont tous les deux infinis. Une différence fondamentale les distingue néanmoins : l'univers $\mathbb{N}^*$ est dénombrable alors que $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ne l'est pas (*cf.* exercice 9 de la page 941).

2 Propriété d'additivité dénombrable

Rappel de première année : cas d'un univers fini

Dans le cas où l'univers Ω est fini, se donner une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω revient à définir $\mathbb{P}$ sur les événements élémentaires (*i.e.* les singletons) ; en effet, si l'on connaît tous les $\mathbb{P}(\{x\})$ pour $x \in \Omega$, puisque tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est fini, la propriété d'additivité donne :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(\{x\}). \qquad (\star)$$

Renforcement de l'additivité « finie » en additivité dénombrable

Si l'on se contente de définir une probabilité $\mathbb{P}$ par ses valeurs sur les singletons, alors la propriété d'additivité précédente ne permet de calculer $\mathbb{P}(A)$ que pour des parties A finies. Or, si l'univers Ω est infini, il existe bien évidemment des parties $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ qui sont infinies.
Dans le cas où l'univers Ω est dénombrable, on règle ce problème en imposant à $\mathbb{P}$ la propriété d'additivité plus forte suivante, appelée *additivité dénom-*

brable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et l'on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Cette propriété d'additivité dénombrable rend la relation $(\star)$ valable pour toute partie A dénombrable.

Exemple Considérons l'expérience de l'obtention du premier pile. Il est naturel de commencer par définir $\mathbb{P}$ sur les événements élémentaires. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on convient facilement que l'événement :

$$\{k\} \ : \ \text{« on a effectué } k \text{ lancers »}$$

a pour probabilité :

$$\mathbb{P}\big(\{k\}\big) = p\,(1-p)^{k-1}.$$

Puisque $\Omega = \mathbb{N}^*$ est dénombrable, la propriété d'additivité dénombrable permet alors de calculer la probabilité de tout événement $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
Par exemple, si l'on considère l'événement :

$$A \ : \ \text{« on a effectué un nombre pair de lancers »},$$

alors on a $A = 2\,\mathbb{N}^* = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \{2k\}$ et donc, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{2k\}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{2k-1} = \frac{p\,(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

3 Le cas non dénombrable reste problématique

La propriété d'additivité dénombrable permet de traiter complètement le cas où Ω est dénombrable, mais la situation où Ω n'est pas dénombrable reste problématique.
En effet, si Ω n'est pas dénombrable, la connaissance des $\mathbb{P}(\{x\})$ pour $x \in \Omega$ ne permet d'obtenir $\mathbb{P}(A)$ que pour des parties $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ au plus dénombrables, ce qui représente une infime partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Or, il est illusoire d'espérer qu'il soit suffisant de ne travailler qu'avec des parties au plus dénombrables. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple du jeu de pile ou face infini, modélisé par l'univers non dénombrable

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Un élément de Ω est une suite infinie de 0 et de 1 (formée des résultats successifs de l'infinité de lancers réalisés) ; on convient facilement qu'un tel élément isolé de Ω est observé avec probabilité nulle. Par additivité dénombrable, il s'ensuit que toute partie au plus dénombrable est de probabilité nulle.
Donc, si l'on souhaite munir Ω d'une probabilité $\mathbb{P}$ modélisant le jeu de pile ou face infini, c'est essentiellement le comportement de $\mathbb{P}$ sur des parties non dénombrables de Ω qui nous intéresse.

Construire une telle probabilité se révèle être un problème délicat. Sans rentrer dans les détails techniques, il a été prouvé[1] qu'il n'existe pas de probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier permettant de modéliser le jeu de pile ou face infini.
Une telle probabilité $\mathbb{P}$ ne peut donc pas être définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier mais seulement sur un sous-ensemble strict de $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P} \; : \; \mathcal{A} \to [0,1] \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega).$$

Cela nous contraint à redéfinir la notion d'*événement* : les événements ne sont plus toutes les parties de Ω comme dans les cas fini et dénombrable, mais seulement les parties de Ω appartenant à $\mathcal{A}$.
L'ensemble $\mathcal{A}$ des événements sera appelé *tribu*.
Réfléchissons de manière informelle à ce que peut être la tribu naturellement associée au jeu de pile ou face infini. Cela revient à se poser la question suivante : « quelles parties de $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ constituent naturellement des événements vis-à-vis de cette expérience aléatoire ? ». Il vient naturellement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, deux événements, contraires l'un de l'autre, associés au n-ième lancer :

$$P_n \; : \text{« pile au } n\text{-ième lancer »} \qquad \text{et} \qquad F_n \; : \text{« face au } n\text{-ième lancer »}$$

ou plus formellement :

$$P_n = \Big\{(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \;\Big|\; x_n = 1\Big\} \quad \text{et} \quad F_n = \Big\{(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \;\Big|\; x_n = 0\Big\}.$$

À partir des ces événements « simples », il est naturel d'envisager des réunions, des intersections, des passages à l'événement contraire. Ainsi, l'événement :

$$E_1 \; : \text{« pile aux deux premiers lancers et face au quatrième lancer »}$$

s'écrit :

$$E = P_1 \cap P_2 \cap F_4$$

tandis que l'événement :

$$E_2 \; : \text{« les trois premiers lancers donnent le même résultat »}$$

s'écrit :

$$E = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3).$$

1. la preuve de ce résultat dépasse largement le cadre de ce livre

I Généralités

1 Espace probabilisable

Définition 1

Soit Ω un ensemble. Une **tribu** sur Ω est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

(*i*) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(*ii*) pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;

(*iii*) pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Reformulation Une tribu est donc une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

Remarque Une tribu est aussi appelée une σ-*algèbre*, d'où la notation $\mathcal{A}$ généralement utilisée.

Définition 2

Lorsque l'on a muni un ensemble Ω d'une tribu $\mathcal{A}$, l'ensemble Ω est appelé **univers** et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les **événements**.

Terminologie

1. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.
2. Si A est un événement, son complémentaire, $\Omega \setminus A$, est appelé **événement contraire** de A. Il est parfois noté $\overline{A}$ (ne pas confondre avec la notion d'adhérence d'une partie d'un espace vectoriel normé).

   Ainsi, la propriété de stabilité par passage au complémentaire est aussi appelée propriété de stabilité par passage à l'événement contraire :

   $$\forall A \in \mathcal{A} \quad \overline{A} \in \mathcal{A}.$$

3. On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils sont doints, *i.e.* s'ils vérifient $A \cap B = \varnothing$.

Exemples Soit Ω un ensemble.

1. L'ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, appelée *tribu grossière*.
2. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée *tribu complète*.
3. Pour tout $A \subset \Omega$, l'ensemble $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, appelée *tribu associée à l'événement* A. C'est la plus petite tribu contenant A.

Proposition 1 (Propriétés de stabilité d'une tribu)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω. On a les propriétés suivantes :

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) **stabilité par intersection dénombrable :**

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}\ ;$$

(iii) **stabilité par réunion finie et intersection finie :**

$$\forall (A_1,\dots,A_n) \in \mathcal{A}^n \quad A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}\ ;$$

(iv) **stabilité par différence :**

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

Démonstration page 970

Exemple Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$, et A et B deux événements. Les propriétés de stabilité de la tribu $\mathcal{A}$ assurent que :

C : « parmi les événements A et B, un et un seul est réalisé »

est un événement. En effet, C se reformule ainsi :

« A est réalisé et B ne l'est pas, ou alors B est réalisé et A ne l'est pas ».

et s'écrit de manière plus formelle :

$$C = \big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big).$$

p.970

Exercice 1 *Suite de la discussion informelle de la page 955.*

Supposons que l'on dispose d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ permettant de modéliser le jeu de pile ou face infini, de telle sorte à pouvoir considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements :

P_n : « pile au n-ième lancer » et F_n : « face au n-ième lancer ».

1. Justifier que l'on définit des événements en posant :

   A : « on obtient au moins un pile » et B : « on n'obtient que des faces »

2. (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit un événement en posant :

   C_k : « on n'obtient que des piles à partir du k-ième lancer ».

   (b) En déduire que l'on définit un événement en posant :

   C : « on n'obtient que des piles à partir d'un certain rang ».

p.971

Exercice 2 *(Approfondissement)*
Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
On s'intéresse à :

B : « parmi les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
seul un nombre fini se réalisent »

De manière ensembliste, B est la partie de Ω constituée des éléments $\omega \in \Omega$ qui n'appartiennent qu'à un nombre fini (éventuellement nul) de A_n.

1. Soit $\omega \in \Omega$. Justifier que $\omega \in B$ si, et seulement s'il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant p \Longrightarrow \omega \in \overline{A_n}. \qquad (\star)$$
2. Obtenir une expression de B à l'aide des A_n et en déduire que B est un événement (*i.e.* $B \in \mathcal{A}$).
3. En déduire que :

   C : « parmi les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une infinité se réalisent »

   est également un événement et donner une expression de C à l'aide des A_n.

p.971

Exercice 3 *(Approfondissement)*
Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Montrer que l'on définit un événement en posant :

D : « tous les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent
sauf un nombre fini ».

2 Espace probabilisé

Définition 3

Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

(*i*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(*ii*) **additivité dénombrable :** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et l'on a :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Remarque culturelle

La propriété d'additivité dénombrable est également appelée « σ-additivité ».

Remarque Dans la propriété d'additivité dénombrable de la définition ci-dessus, l'événement $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont énumérés les éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi une conséquence de la propriété d'additivité dénombrable est que la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

Proposition 2 (Propriétés de calcul des probabilités)

Dans tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
2. **additivité finie :** si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \ ;$$
3. si A et B sont deux événements vérifiant $B \subset A$, alors :
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \ ;$$
4. **croissance :** si deux événements A et B vérifient $B \subset A$, alors :
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \ ;$$
5. pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
6. étant donné deux événements A et B, on a :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Démonstration page 971

Remarque La propriété d'additivité finie nous assure de la cohérence avec la définition donnée en première année pour une probabilité sur un univers fini. Remarquons au passage que, sur un univers fini, la propriété d'additivité dénombrable n'est que de l'additivité finie « déguisée » car pour qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit composée d'événements deux à deux incompatibles, il est nécessaire que les A_n soient tous égaux à $\varnothing$ sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

Proposition 3 (Continuité monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. **Continuité croissante**
   Pour toute suite croissante d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1},$$
   on a $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N)$.
2. **Continuité décroissante**
   Pour toute suite décroissante d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n,$$
   on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N)$.

Principe de démonstration. Pour le premier point, construire, à l'aide de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

La seconde propriété se déduit de la première. Démonstration page 972

p.973 **Exercice 4** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Montrer que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Proposition 4 (Sous-additivité)

(*i*) *Cas fini.* Si $(A_1, \ldots, A_N)$ est une famille finie d'événements, alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_N) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_N).$$

(*ii*) *Cas dénombrable.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. On a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 974

- Le cas fini se prouve comme déjà vu en première année dans le cas d'un univers fini.
- Le cas dénombrable se déduit du cas fini par continuité croissante.

Terminologie
L'inégalité de sous-additivité est également appelée **inégalité de Boole**.

Événements presque sûrs, événements négligeables

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A un événement.

- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est **presque sûr** ou **presque certain**.
- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est **négligeable** ou **presque impossible**.

Exemple Dans tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'événement Ω est presque certain et l'événement $\varnothing$ est négligeable.

p.975

Exercice 5 Soit A et B deux événements d'un même espace probabilisé.

1. Montrer que si B est presque sûr, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.
2. Montrer que si B est négligeable, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$.

Corollaire 5

Toute réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est encore négligeable.

Principe de démonstration. Démonstration page 975

Traiter le cas d'une famille finie $(A_1, \dots, A_N)$, puis celui d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II Conditionnement

Cette section généralise aux univers quelconques les notions de conditionnement déjà vues en première année. La seule vraie nouveauté concerne les systèmes complets d'événements et la formule des probabilités totales, puisque sont considérées des familles dénombrables d'événements.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 5

Soit A et B deux événements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B**, et l'on note $\mathbb{P}(A \mid B)$, le réel :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 6

Soit B un événement de probabilité *non nulle*. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A \mid B) \end{array}$$

est une probabilité. On la note $\mathbb{P}_B$ et on l'appelle **probabilité conditionnelle à l'événement B**.

Principe de démonstration. Démonstration page 975

Revenir à la définition d'une probabilité.

Conséquence En tant que probabilité, $\mathbb{P}_B$ vérifie toutes les règles de calcul énoncées précédemment (propositions 2, 3 et 4).

Remarque Pour la probabilité conditionnelle de A sachant B, on note indifféremment $\mathbb{P}(A \mid B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$.

2 Formule des probabilités composées

Théorème 7 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \geqslant 2$. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n événements vérifiant :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0,$$

alors on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cdot A_{k-1}).$$

Remarque L'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ assure l'existence, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$.
En effet, l'inclusion :

$$A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}$$

entraîne, par croissance de $\mathbb{P}$, que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \neq 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 975

C'est la même qu'en première année.

3 Formule des probabilités totales

Cas des familles finies d'événements

En première année, dans le cadre des univers finis, la notion de système complet d'événements ainsi que la formule des probabilité totales ont été vues dans le cas des familles finies d'événements. Ces notions s'étendent sans aucune difficulté aux univers quelconques.

Définition 6

On appelle **système complet fini d'événements** toute famille finie d'événements $(A_1, \dots, A_N)$ deux à deux incompatibles dont la réunion vaut Ω, c'est-à-dire :

(i) $\forall (n,p) \in [\![1, N]\!]^2 \quad n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \varnothing$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega$.

Théorème 8 (Formule des probabilités totales, cas fini)

Soit $(A_1, \dots, A_N)$ un système complet fini d'événements.
Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Principe de démonstration. Comme en première année. Démonstration page 976

Extension aux familles dénombrables

Définition 7

On appelle **système complet dénombrable d'événements** toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles dont la réunion vaut Ω, c'est-à-dire :

(i) $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \varnothing$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Terminologie Pour simplifier, nous utiliserons l'expression **système complet d'événements** aussi bien pour les systèmes complets finis que pour les systèmes complets dénombrables.

Théorème 9 (Formule des probabilités totales, cas dénombrable)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, la série $\sum \mathbb{P}(B\cap A_n)$ converge et l'on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_n).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 976

C'est l'adaptation au cas dénombrable de la preuve faite dans le cas fini.

Remarque Avec les notations du théorème précédent, si l'on a de plus :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathbb{P}(A_n)\neq 0,$$

alors on peut conditionner par chacun des événements A_n :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathbb{P}(B\cap A_n) = \mathbb{P}(B\mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)$$

et la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B\mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n). \qquad (\star)$$

Convention Si $\mathbb{P}(A_n)=0$, alors on convient en général que pour tout événement B, on a $\mathbb{P}(B\mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)=0$. Cette convention permet d'écrire la formule $(\star)$ pour tout système complet d'événements (même si celui-ci contient des événements négligeables).
Cette convention est à préciser à chaque fois qu'elle est utilisée.

Extension au cas d'un système quasi-complet d'événements

Définition 8

Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$$

est appelé **système quasi-complet d'événements**.

Remarques

1. Par additivité dénombrable, les événements A_n étant deux à deux incompatibles, la condition $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ équivaut à dire que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement presque sûr.
2. Tout système complet d'événements est un système quasi-complet d'événements, mais la réciproque est fausse.

Le résultat suivant étend la formule des probabilités totales aux systèmes quasi-complets d'événements.

Proposition 10

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements.

Pour tout événement B, la série $\sum \mathbb{P}(B\cap A_n)$ converge et l'on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_n).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 976

Ajouter un événement à la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour se ramener à un système complet.

Remarque En reprenant la convention $\mathbb{P}(B \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n) = 0$ si $\mathbb{P}(A_n) = 0$, la formule $(\star)$ de la page ci-contre reste vraie dans le cas d'un système quasi-complet d'événements.

4 Formule de Bayes

Théorème 11 (Formule de Bayes)

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 976

C'est la même qu'en première année.

Remarque Si B est un événement de probabilité non nulle et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors on peut combiner la formule de Bayes avec la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)}.$$

p.977 **Exercice 6** On étudie une maladie dans une population donnée. La probabilité qu'un individu pris au hasard soit atteint est $0{,}001$. Pour cela, on dispose d'un test tel que :

- la probabilité d'avoir un test positif lorsque l'on est malade est $0{,}99$;
- la probabilité d'avoir un test positif lorsque l'on est sain est de $0{,}02$.

1. Un individu vient d'être testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit sain ? *On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.*
2. Un individu vient d'être testé négatif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
3. Commentaires ?

p.977

Exercice 7 Dans une population donnée, on suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait n enfants soit égale à

$$p_n = (1-p)\,p^n.$$

On suppose de plus qu'à chaque naissance, il y a équiprobabilité d'obtenir un garçon ou une fille.

Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement deux garçons sachant qu'elle a exactement deux filles.

Indication : on sera amené à utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'avoir deux filles ; on reconnaîtra une série géométrique dérivée deux fois.

III Indépendance

Définition 9

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Proposition 12

Soit A et B deux événements. Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration page 979

Définition 10

Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **deux à deux indépendants** si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, les événements A_i et A_j sont indépendants.

Définition 11

Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide $I \subset [\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Terminologie Au lieu de « mutuellement indépendants », on se contente parfois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, de dire « indépendants ».

Remarques

1. L'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle ne dépendent pas de l'ordre des événements.

2. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'événements deux à deux indépendants, alors il en est de même pour toute sous-famille.

   On a la même propriété pour l'indépendance mutuelle.

Attention

1. Si des événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

   En revanche, la réciproque est fausse (*cf.* exercice 8).

2. La seule relation $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ ne dit rien sur l'indépendance !

   Elle peut avoir lieu sans que les événements $A_1, \dots, A_n$ soient mutuellement indépendants, et même sans qu'ils soient indépendants deux à deux (*cf.* exercice 9).

p.979

Exercice 8 (L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance)

On lance deux fois une pièce, et l'on considère les événements :

A : « le premier lancer donne pile » B : « le second lancer donne pile »

C : « les deux lancers donnent le même résultat »

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.

p.979

Exercice 9 Expliciter trois événements A, B et C vérifiant :

$$\mathbb{P}\big(A \cap B \cap C\big) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

mais qui ne sont pas deux à deux indépendants, et donc pas indépendants.

p.979

Exercice 10 Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Montrer que les trois familles suivantes sont formées d'événements mutuellement indépendants :

$$(\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n), \quad (A_1 \cap A_2, A_3, \dots, A_n), \quad \text{et} \quad (A_1 \cup A_2, A_3, \dots, A_n).$$

Extension au cas d'une suite d'événements

La notion d'indépendance deux à deux s'étend naturellement au cas d'une famille dénombrable. On étend également la notion d'indépendance mutuelle par la définition suivante :

Définition 12

On dit que les événements d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendants** si pour toute partie *finie* non vide $I \subset \mathbb{N}$, la famille finie $(A_i)_{i\in I}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

IV Probabilités sur un univers au plus dénombrable

Lorsque l'univers Ω est fini ou dénombrable, on le munit généralement de la tribu complète $\mathcal{P}(\Omega)$ (autrement dit, toute partie de Ω est un événement).

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est alors entièrement déterminée par son comportement sur les événements élémentaires (*i.e.* les singletons).

En effet, si A est un événement (*i.e.* une partie de Ω), alors A est au plus dénombrable et l'écriture de A comme « réunion disjointe des ses singletons » :

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

entraîne, par propriété d'additivité dénombrable de $\mathbb{P}$, que :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(\{a\}).$$

1 Cas d'un univers fini

Soit Ω un univers *fini* ; en notant $N = \operatorname{card}(\Omega)$, on peut écrire Ω sous la forme :

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}.$$

Le résultat suivant a déjà été vu en première année :

Proposition 13

Si $(p_1, \ldots, p_N)$ est une famille de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{n=1}^{N} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

2 Cas d'un univers dénombrable

Soit Ω un univers dénombrable.

Notons ω_n les éléments deux à deux distincts de Ω :

$$\Omega = \{\omega_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 14

Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

Démonstration (non exigible) page 981

p.983

Exercice 11

1. Justifier qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}\big(\{n\}\big) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

2. On note A l'ensemble des nombres pairs. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   On admettra qu'il existe une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

(i) Comme $\Omega \in \mathcal{A}$, on a, par stabilité par passage à l'événement contraire, $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.

(ii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}. \qquad (\star)$$

Par stabilité par passage à l'événement contraire, chaque $\overline{A_n}$ appartient à $\mathcal{A}$.
Par stabilité par réunion dénombrable, on a alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A}$. Enfin, d'après la relation $(\star)$ et à nouveau par stabilité par passage à l'événement contraire, on obtient :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

(iii) Soit $A_1, \ldots, A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$.

- Posons $A_k = \varnothing$ pour $k \geqslant n+1$. On a, par stabilité par réunion dénombrable :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

- Posons $A_k = \Omega$ pour $k \geqslant n+1$. On a, par stabilité par intersection dénombrable :

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}.$$

(iv) Il suffit d'écrire $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et d'utiliser la stabilité par passage à l'événement contraire (qui assure que $\overline{B} \in \mathcal{A}$) puis par intersection finie.

Exercice 1

1. - On peut écrire A ainsi :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n.$$

Comme les P_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont des événements, A en est un également.

- Puisque $B = \overline{A}$, comme A est un événement, B en est un également.

Remarque Pour justifier que B est un événement, on peut aussi écrire :

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n.$$

2. (a) Le fait que C_k soit un événement est garanti par le fait que $C_k = \bigcap\limits_{n\geqslant k} P_n$.

(b) Constatons que $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} C_k$. Comme les C_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont des événements, il en est de même pour C.

Exercice 2

1. - Si $p \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété $(\star)$, alors ω n'appartient qu'à un nombre fini de A_n car pour avoir $\omega \in A_n$ il est nécessaire d'avoir $n \in [\![0, p-1]\!]$.
   - Réciproquement, si ω n'appartient qu'à un nombre fini de A_n, alors l'ensemble :
   $$\{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n\}$$
   est une partie finie de $\mathbb{N}$, donc est majoré ; n'importe lequel de ses majorants vérifie alors la propriété $(\star)$.
2. Considérons l'ensemble :
   $$E_p = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant p \Longrightarrow \omega \in \overline{A_n}\right\},$$
   c'est-à-dire $E_p = \bigcap\limits_{n \geqslant p} \overline{A_n}$.
   D'après la question précédente, on a :
   $$\big(\omega \in B\big) \Longleftrightarrow \big(\exists p \in \mathbb{N} \quad \omega \in E_p\big).$$
   On a donc $B = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} E_p$, ce qui mène à l'expression suivante de B :
   $$B = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geqslant p} \overline{A_n}\right).$$
   Les propriétés de stabilité de $\mathcal{A}$ assurent alors que $B \in \mathcal{A}$.
3. On constate que C n'est rien d'autre que $\overline{B}$. Donc, par stabilité par passage à l'événement contraire, on a $C \in \mathcal{A}$.
   En passant à l'événement contraire dans l'expression de B, on obtient :
   $$C = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geqslant p} A_n\right)$$

Exercice 3

On peut exprimer D ainsi :

« parmi les événements de la suite $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$, seuls un nombre fini se réalisent ».

On est alors ramené à la première question de l'exercice 2 et l'on obtient l'expression suivante pour D :
$$D = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geqslant p} A_n\right).$$
Les propriétés de stabilité de $\mathcal{A}$ assurent alors que $D \in \mathcal{A}$.

Proposition 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \varnothing$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, donc, par additivité dénombrable, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Comme on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\varnothing)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela impose que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles. Pour tout $k \geqslant n+1$, posons $A_k = \varnothing$. Puisque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbb{P}\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

3. Soit A et B deux événements vérifiant $B \subset A$. On a alors $A = B \cup (A \setminus B)$. L'ensemble $A \setminus B$ est un événement, comme différence de deux événements. Comme la réunion est disjointe, on a par additivité finie :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B).$$

4. Supposons $B \subset A$. Puisque $\mathbb{P}(A \setminus B) \geqslant 0$, la propriété $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ impose $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$.

5. Soit A un événement. Comme Ω est la réunion disjointe de A et $\overline{A}$, on a, par additivité finie :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\,\overline{A}\,) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathbb{P}(\,\overline{A}\,) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

6. Soit A et B deux événements. L'événement $A \cup B$ est la réunion disjointe des événements :

$$A \qquad \text{et} \qquad B \setminus (A \cap B)$$

donc, par additivité finie :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big).$$

En utilisant la propriété 3, on obtient alors la formule souhaitée :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Proposition 3

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Définissons la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$B_0 = A_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $A_{n-1} \subset A_n$, on a $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$.
La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite d'événements deux à deux incompatibles vérifiant :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Par additivité dénombrable, on obtient la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(B_n)$ ainsi que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Cette formule donne le résultat souhaité via le calcul suivant :

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{N} \big(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\big) = \mathbb{P}(A_N)$$

et par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors la suite $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. La première propriété déjà démontrée donne alors :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_N}).$$

ou encore :

$$1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\Big) = 1-\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_N}).$$

Cela donne la formule souhaitée puisque :

- d'une part :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \qquad \text{et donc} \qquad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\Big)\ ;$$

- d'autre part :

$$1-\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_N}) = \lim_{N\to+\infty}\big(1-\mathbb{P}(\overline{A_N})\big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N).$$

Exercice 4

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante d'événements, pour laquelle la propriété de continuité monotone donne :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(B_N) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big).$$

Cela donne le résultat souhaité puisque :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n.$$

- * *Première méthode.* Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite décroissante d'événements, pour laquelle la propriété de continuité décroissante donne :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(B_N) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big).$$

Cela donne le résultat souhaité puisque :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad B_N = \bigcap_{n=0}^{N} A_n.$$

  * *Deuxième méthode.*
  En appliquant la première limite obtenue à la suite $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A_n}\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\Big).$$

Comme de plus :

$$\bigcup_{n\in[\![0,N]\!]} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in[\![0,N]\!]} A_n} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n},$$

la limite ci-dessus se réécrit :

$$1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big),$$

et donc :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Proposition 4

- *Cas fini.* Prouvons-le par récurrence que pour tout $N \in \mathbb{N}$.
  - **Initialisation.** La propriété (H_1) est évidemment vraie. La propriété (H_2), quant à elle, a déjà été vue précédemment :

  $$\mathbb{P}\big(A_1 \cup A_2\big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{\geqslant 0} \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

  - **Hérédité.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons (H_N) vraie et montrons (H_{N+1}). Écrivons :

  $$\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n = A_{N+1} \cup \bigcup_{n=1}^{N} A_n.$$

  En appliquant successivement les propriétés (H_2) puis (H_N), on obtient (H_{N+1}) :

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\Big) &\leqslant \mathbb{P}(A_{N+1}) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) && \text{d'après } (H_2)\\ &\leqslant \mathbb{P}(A_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(A_n). && \text{d'après } (H_N)\end{aligned}$$

- *Cas dénombrable.* Par propriété de continuité croissante appliquée à la suite croissante d'événements $\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n\Big)_{N\in\mathbb{N}}$, on a :

  $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$

  De plus, comme la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a :

  $$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

  Donc, l'inégalité souhaitée s'obtient par passage à la limite dans l'inégalité (H_N) quand $N \to +\infty$.

Exercice 5 On sait que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \qquad (\star)$$

1. Supposons que B soit presque sûr, *i.e.* $\mathbb{P}(B) = 1$. Comme $\mathbb{P}(B) = 1$, l'inclusion $B \subset A \cup B$ assure, par propriété de croissance de $\mathbb{P}$, que $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. L'égalité $(\star)$ devient donc :

$$1 = \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(A \cap B), \qquad \text{et donc} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).$$

2. Supposons B négligeable, *i.e.* $\mathbb{P}(B) = 0$. Comme $A \cap B \subset B$, la croissance de $\mathbb{P}$ donne $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. L'égalité $(\star)$ donne donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + 0 - 0, \quad \textit{i.e.} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A).$$

Corollaire 5

- **Cas fini.** Si $A_1, \ldots, A_N$ sont des événements négligeables, alors on a, par sous-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=0} = 0.$$

- **Cas dénombrable.** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements négligeables, alors on a, par sous-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=0} = 0.$$

Proposition 6

- Comme $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$, $\mathbb{P}_B$ est aussi à valeurs dans $[0,1]$.
- On a $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles.
  La suite $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite d'événements deux à deux incompatibles, donc, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B). \qquad (\star)$$

  Puisque $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B$, on obtient, en divisant la relation $(\star)$ par $\mathbb{P}(B)$, la propriété d'additivité dénombrable cherchée :

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n).$$

Théorème 7 Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})}.$$

En faisant le produit pour $k \in [\![2, n]\!]$, on voit apparaître un produit télescopique :

$$\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cdot A_{k-1}\big) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}.$$

En multipliant par $\mathbb{P}(A_1)$ de part et d'autre, on obtient la formule souhaitée.

Théorème 8 Soit B un événement. Comme $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n = \Omega$, on a $B = \bigcup\limits_{n=1}^{N} (B \cap A_n)$.

Comme les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont deux à deux incompatibles, il en est de même pour les événements $B \cap A_1, \ldots, B \cap A_N$. Donc, par additivité finie :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Théorème 9 Soit B un événement. Comme $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$, on a $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)$.

Comme les événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, il en est de même pour les événements de la suite $(B \cap A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Proposition 10 Notons $C = \overline{\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n}$. Alors, en ajoutant l'événement C à la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient un système complet d'événements, qui nous permet d'écrire la formule des probabilités totales vue précédemment : pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap C) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, l'événement $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est presque sûr, donc son événement contraire C est négligeable. Comme $B \cap C \subset C$, on a par croissance $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$ et donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Théorème 11 Comme $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire les probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

et donc on obtient $\mathbb{P}(A \cap B)$ de deux façons :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A).$$

La formule de Bayes s'obtient alors en divisant la dernière égalité par $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Exercice 6 Concernant un individu donné, introduisons les événements suivants, permettant de formaliser le problème :

M : « l'individu est malade » et P : « le test est positif ».

L'énoncé nous donne :

$$\mathbb{P}(M) = 0{,}001, \qquad \mathbb{P}(P \mid M) = 0{,}99 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(P \mid \overline{M}) = 0{,}02.$$

1. On cherche $\mathbb{P}(\overline{M} \mid P)$. La formule de Bayes nous donne :

$$\mathbb{P}(\overline{M} \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid \overline{M})\, \mathbb{P}(\overline{M})}{\mathbb{P}(P)}.$$

Sur les trois termes apparaissant dans le membre de droite, seul $\mathbb{P}(P)$ n'est pas encore connu. Pour l'obtenir, utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(M, \overline{M})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P \cap M) + \mathbb{P}(P \cap \overline{M})\\ &= \mathbb{P}(P \mid M)\, \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P \mid \overline{M})\, \mathbb{P}(\overline{M})\\ &= 0{,}99 \times 0{,}001 + 0{,}02 \times 0{,}999.\end{aligned}$$

La probabilité cherchée vaut finalement,

$$\mathbb{P}(\overline{M} \mid P) = \frac{0{,}02 \times 0{,}999}{0{,}99 \times 0{,}001 + 0{,}02 \times 0{,}999}.$$

Une valeur approchée à deux chiffres significatifs pour $\mathbb{P}(\overline{M} \mid P)$ est $0{,}95$.

2. On cherche $\mathbb{P}(M \mid \overline{P})$. La formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}(M \mid \overline{P}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{P} \mid M)\, \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{P})}.$$

Tous les termes du membre de droite sont connus :

$$\mathbb{P}(\overline{P} \mid M) = 1 - \mathbb{P}(P \mid M) = 0{,}01\ ; \qquad \mathbb{P}(M) = 0{,}001 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\overline{P}) = 1 - \mathbb{P}(P).$$

Une valeur approchée à deux chiffres significatifs pour $\mathbb{P}(M \mid \overline{P})$ est $1{,}0 \times 10^{-5}$.

3. On constate que le test :
   - dans le cas où il est négatif, garantit avec une probabilité très élevée que l'individu n'est pas malade ;
   - en revanche, dans le cas où il est positif, il commet très majoritairement une erreur : c'est ce que l'on appelle les « faux positifs » ; ici, 95% des personnes testées positivement sont en fait saines.

Exercice 7 Concernant une famille donnée, considérons les événements :

E_n : « n enfants » ; G_n : « n garçons » et F_n : « n filles »

On cherche $\mathbb{P}(G_2 \mid F_2)$. On a :

$$\mathbb{P}(G_2 \mid F_2) = \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)} \qquad (\Diamond)$$

- D'une part, on constate que $G_2 \cap F_2 = G_2 \cap E_4$, et donc :

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \mathbb{P}(G_2 \cap E_4) = \mathbb{P}(G_2 \mid E_4)\,\mathbb{P}(E_4).$$

Sous l'hypothèse que la famille ait eu 4 enfants, chacun d'entre eux est un garçon ou une fille avec probabilité $\frac{1}{2}$, et donc le nombre de garçons suit une loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{2}\right)$. On a donc $\mathbb{P}(G_2 \mid E_4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ ce qui donne :

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \frac{3}{8}\,(1-p)\,p^4.$$

- D'autre part, la formule des probabilité totales appliquée avec le système complet d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 \cap E_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 \mid E_n)\,\mathbb{P}(E_n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 \mid E_n)\,\mathbb{P}(E_n) \qquad \text{car } \mathbb{P}(F_2 \mid E_n) = 0 \text{ lorsque } n < 2.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse que la famille ait eu n enfants, le nombre de filles suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_2) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (1-p)\,p^n \\
&= \frac{1-p}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois. Plus précisément, par théorème de dérivation terme à terme appliqué à la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence 1, on a :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

la notation $\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ étant un abus de langage signifiant $f''(x)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On obtient :

$$\mathbb{P}(F_2) = \frac{1-p}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^3} = \frac{2\,p^2\,(1-p)}{(2-p)^3}.$$

On peut donc conclure l'exercice en reprenant la formule $(\Diamond)$:

$$\mathbb{P}(G_2 \mid F_2) = \frac{3}{16}\,p^2\,(2-p)^3.$$

Proposition 12 Supposons $\mathbb{P}(B) > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\big(A \text{ et } B \text{ indépendants}\big) &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \qquad\qquad (\text{car } \mathbb{P}(B) \neq 0).\end{aligned}$$

Exercice 8 Modélisons cette expérience aléatoire par l'univers :

$$\Omega = \big\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\big\}$$

muni de la probabilité uniforme. On a alors :

$$A = \big\{(P,P),(P,F)\big\}\ ;\quad B = \big\{(P,P),(F,P)\big\}\ ;\quad \text{et}\quad C = \big\{(P,P),(F,F)\big\}$$

donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2}\cdot$

- D'une part, on a $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{4}$ et :

  $$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \big\{(P,P)\big\} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}\cdot$$

  Les événements A, B et C sont donc deux à deux indépendants.
- D'autre part, on a $A \cap B \cap C = A \cap B$, donc :

  $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$$

  donc les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 9 L'égalité $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ a lieu si $\mathbb{P}(C) = 0$.
Il suffit alors de prendre pour A et B deux événements non indépendants pour obtenir l'exemple souhaité. On peut prendre pour A n'importe quel événement de probabilité $p \in \,]0,1[$, puis $B = A$ et $C = \varnothing$.

Exercice 10

- *Famille* $(\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n)$
  Notons :

  $$B_1 = \overline{A_1} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![2,n]\!] \quad B_k = A_k.$$

  Il s'agit de prouver l'indépendance de la famille $(B_1, \ldots, B_n)$. Pour cela donnons-nous un ensemble d'indices non vide $I \subset [\![1,n]\!]$ et montrons que :

  $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i). \qquad (\star)$$

  ∗ Si $1 \notin I$, alors l'égalité $(\star)$ est vraie par indépendance mutuelle de $A_2, \ldots, A_n$.
  ∗ Si $I = \{1\}$, alors l'égalité $(\star)$ est évidente.
  ∗ Supposons que I s'écrive $I = \{1\} \cup J$ avec $J \subset [\![2,n]\!]$ non vide. On a :

  $$\bigcap_{i \in I} B_i = B_1 \cap \bigcap_{i \in J} B_i = (\Omega \setminus A_1) \cap \bigcap_{i \in J} A_i = \Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)$$

et donc, comme $J \subset I$:
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big).$$
Nous sommes alors en mesure d'utiliser l'indépendance mutuelle des événements $A_1, \ldots, A_n$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &= \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \big(1-\mathbb{P}(A_1)\big) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\,\overline{A_1}\,) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$

- *Famille* $(A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_n)$
  Notons :
  $$B_2 = A_1 \cap A_2 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![3,n]\!] \quad B_k = A_k.$$
  Donnons-nous $I \subset [\![2,n]\!]$ et prouvons que $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(B_i)$.
  * C'est évident si $2 \notin I$ par indépendance mutuelle de $A_3, \ldots, A_n$ et c'est évident si $I = \{2\}$.
  * Supposons que I s'écrive $I = \{2\} \cup J$ avec $J \in [\![3,n]\!]$ non vide. On a :
  $$\bigcap_{i\in I} B_i = (A_1 \cap A_2) \cap \bigcap_{i\in J} A_i = \bigcap_{i\in\{1,2\}\cup J} A_i$$
  Par indépendance mutuelle de $A_1, \ldots, A_n$, on obtient :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &= \prod_{i\in\{1,2\}\cup J} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \big(\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\big) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \mathbb{P}(B_2) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(B_i) \qquad\qquad (\text{indépendance de } A_1 \text{ et } A_2)\\ &= \prod_{i\in I} \mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$
- *Famille* $(A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n)$
  Comme l'indépendance ne dépend pas de l'ordre des événements dans la famille, on peut appliquer deux fois le premier résultat de cet exercice et affirmer l'indépendance mutuelle des événements :
  $$\overline{A_1}, \overline{A_2}, A_3, \ldots, A_n.$$
  En appliquant le deuxième résultat, on obtient l'indépendance mutuelle des événements :
  $$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}, A_3, \ldots, A_n.$$
  En appliquant alors à nouveau le premier, et grâce à l'égalité :
  $$\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}} = A_1 \cup A_2,$$

on en déduit l'indépendance mutuelle des événements :

$$A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n.$$

Proposition 14

- **Unicité.** Montrons qu'une telle probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée par les valeurs des p_n. Pour cela, donnons-nous un événement A et montrons que $\mathbb{P}(A)$ ne dépend que des p_n. Comme la famille $(\{\omega_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap \{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(\omega_n)\, p_n \quad \text{avec} \quad \mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  donc $\mathbb{P}(A)$ ne dépend que de la valeur des p_n.

- **Existence.** Montrons que l'application suivante répond au problème :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(\omega_n)\, p_n \end{array}$$

  * Tout d'abord, l'application est bien définie car, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \mathbb{1}_A(\omega_n) p_n \leqslant p_n,$$

    la convergence de la série $\sum p_n$ entraîne la convergence de la série $\sum \mathbb{1}_A(\omega_n)\, p_n$. Elle est de plus à valeurs dans $[0,1]$ car pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, comme tous les p_n sont positifs :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(\omega_n)\, p_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

  * Il est immédiat que :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_\Omega(\omega_n)\, p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

  * Il reste à démontrer la propriété d'additivité dénombrable. Commençons par constater que $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés de croissance et d'additivité finie, dont on se servira dans la suite du raisonnement :
    ⋆ si $A \subset B$, alors, comme $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$, on a $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
    ⋆ si $A_1, \ldots, A_p$ sont des événements incompatibles deux à deux, alors on a

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_p} = \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_p},$$

      ce qui donne, en revenant à la définition de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_p).$$

    Soit maintenant $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Posons $A = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} A_p$ et montrons que :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p).$$

Pour cela, montrons les deux inégalités.

- ⋆ **Première inégalité.** Tout d'abord, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a, par additivité finie et croissance :
$$\sum_{p=0}^{N} \mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p=0}^{N} A_p\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p\Big) = \mathbb{P}(A).$$
Il en découle que la série $\sum \mathbb{P}(A_p)$ converge et que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p) \leqslant \mathbb{P}(A)$.

- ⋆ **Seconde inégalité.** Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence de la série $\sum p_n$, il existe n_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} p_n \leqslant \varepsilon$.

  Pour un tel n_0, on a alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{1}_A(\omega_n)p_n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mathbb{1}_A(\omega_n)p_n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{1}_A(\omega_n)p_n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} p_n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{1}_A(\omega_n)p_n + \varepsilon. \qquad (\star)\end{aligned}$$
Notons $\Omega_{n_0} = \{\omega_k\,;\ k \leqslant n_0\}$. Comme l'ensemble $A \cap \Omega_{n_0}$ est fini, on peut trouver n_1 tel que :
$$A \cap \Omega_{n_0} \subset \bigcup_{p=0}^{n_1} A_p.$$
On a alors, par croissance et additivité finie :
$$\sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{1}_A(\omega_n)p_n = \mathbb{P}\big(A \cap \Omega_{n_0}\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p=0}^{n_1} A_p\Big) = \sum_{p=0}^{n_1} \mathbb{P}(A_p) \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p). \qquad (\star\star)$$
Les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent alors :
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p) + \varepsilon.$$
Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit l'inégalité souhaitée :
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p).$$

D'où le résultat : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$.

Exercice 11

1. En notant $p_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, on constate tout d'abord que les p_n sont tous positifs. Pour justifier l'existence et l'unicité de la probabilité $\mathbb{P}$ recherchée, il suffit, en vertu de la proposition 14 de la page 968, de vérifier que la série $\sum p_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Remarquons que :
$$p_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = u_n - u_{n+1} \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{1}{n+1}.$$
On reconnaît alors une série télescopique. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la série $\sum p_n$ converge et l'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = u_0 - \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$
D'où le résultat.
2. L'événement A étudié s'écrit comme réunion disjointe d'événements élémentaires :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\}.$$
Par additivité dénombrable, il vient :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\Big).$$
On a donc :
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N\to+\infty} S_N \quad \text{avec} \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\Big).$$
Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\Big) - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \\ &= \big(\ln(2N+2) + \gamma + \mathrm{o}(1)\big) - \big(\ln(N+1) + \gamma + \mathrm{o}(1)\big) \\ &= \ln(2) + \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$
On a donc finalement $\mathbb{P}(A) = \ln 2$.

S'entraîner et approfondir

Probabilités finies (révisions de première année)

17.1 Un gardien doit ouvrir une porte ; il possède un trousseau de quatre clés différentes. Il teste les clés une par une et met de côté les clés déjà testées, sauf s'il est ivre, auquel cas il remélange les clés après chaque tentative.
Le gardien est ivre un jour sur trois.

Un soir, on le voit essayer au moins trois clés. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

17.2 Un avion comporte n sièges ($n \geqslant 2$). On considère n passagers, chacun ayant une place réservée.

- Le premier passager qui arrive est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants, lorsqu'ils arrivent, s'installent à leur place si celle-ci est disponible, et dans le cas contraire ils choisissent une place au hasard parmi les places encore libres.

On note p_n la probabilité que le n-ième passager s'installe à sa place.

1. Établir la relation suivante : $p_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} p_k\right)$.
2. En utilisant la relation précédente au rang n et au rang $n+1$, obtenir alors que $p_n = p_{n+1}$. En déduire la valeur de p_n.

Univers infinis

17.3 Un banquier se rend chaque jour de son domicile à la banque, puis de la banque à son domicile. Il possède un unique parapluie. Chaque fois qu'il part, s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, il le prend avec lui.
On suppose qu'à chaque déplacement du banquier, il pleut avec probabilité $p \in]0,1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité que le parapluie soit disponible (là où se trouve la banquier) après n trajets.

On pose $q = 1 - p$ et $q_n = 1 - p_n$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

17.4 On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. On s'intéresse à l'événement :

$$E_n \text{ : « lors des } n \text{ premiers lancers il n'a pas été observé deux piles consécutifs ».}$$

On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

17.5 La ruine du joueur

Deux joueurs A et B s'affrontent dans une succession de parties indépendantes. À chaque partie, le joueur A gagne avec probabilité $p \in]0,1[$ et B gagne avec probabilité $q = 1-p$. À l'issue de chaque partie, le gagnant reçoit un euro du perdant. Le jeu s'arrête si l'un des joueurs est ruiné.

Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $R(a,b)$ la probabilité que A gagne le jeu (c'est-à-dire que B finisse ruiné) sous l'hypothèse que les joueurs A et B ont débuté le jeu avec a et b comme fortunes respectives.

1. Pour $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, établir une relation entre :
$$R(a,b), \qquad R(a+1,b-1) \quad \text{et} \quad R(a-1,b+1).$$
2. Dans cette question, on suppose, pour simplifier les calculs, que le jeu est équilibré, c'est-à-dire que $p = q = \dfrac{1}{2}\cdot$
   (a) En utilisant la relation de récurrence obtenue à la question 1, obtenir une expression de $R(a,b)$.
   (b) Justifier que le jeu s'arrête presque sûrement en un nombre fini de parties.
3. Reprendre la question 2 dans le cas où $p \neq q$.

17.6 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$.
2. On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}\cdot$
   Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
   Indication : on fera apparaître un produit télescopique.
3. On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(A_n) \neq 1$.
   (a) Prouver que les séries $\sum \mathbb{P}(A_n)$ et $\sum \ln \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$ sont de même nature.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si, et seulement si, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

⋆ **17.7 Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On note B l'événement :

« parmi les événements A_n pour $n \in \mathbb{N}$, une infinité se réalisent. »

1. Exprimer B en fonction des A_n, de manière ensembliste (grâce aux symboles $\cup$ et $\cap$). En déduire que B est bien un événement.
2. **Lemme de Borel-Cantelli.**
   Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(B) = 0$.
3. **Loi du zéro-un**. On suppose de plus les événements A_n, pour $n \in \mathbb{N}$, mutuellement indépendants. Montrer que l'événement B est de probabilité 0 ou 1, selon la convergence ou la divergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$.

   Indication : on considèrera $\mathbb{P}(\overline{B})$ et l'on pensera au logarithme qui permet de transformer un produit en somme.

17.8 Tribu engendrée

Soit Ω un ensemble.

1. (a) Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω.
   Montrer que l'intersection $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est également une tribu sur Ω.

   (b) Soit $\mathcal{F}$ une partie de Ω. Montrer qu'il existe une plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$. Cette tribu s'appelle **tribu engendrée par $\mathcal{F}$**.
2. Soit $\{B_1, \ldots, B_p\}$ des parties de Ω deux à deux incompatibles et dont la réunion vaut Ω. Montrer que la tribu engendrée par $\{B_1, \ldots, B_p\}$ est :

$$\mathcal{A} = \Big\{ \bigcup_{i\in I} B_i \,;\; I \subset [\![1, p]\!] \Big\}.$$

Solution des exercices

17.1 Notons I l'événement « le gardien est ivre » et A_k l'événement « le gardien fait au moins k tentatives ». On souhaite calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(I \mid A_3)$. La formule de Bayes nous donne :

$$\mathbb{P}(I \mid A_3) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \mid I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A_3)}\cdot$$

- L'énoncé nous donne $\mathbb{P}(I) = \dfrac{1}{3}\cdot$
- Si le gardien est ivre, il a, à chaque tentative, une chance sur quatre de trouver la bonne clé. L'événement A_3 s'exprimant : « deux fois consécutivement il n'a pas trouvé la bonne clé », on a :

$$\mathbb{P}(A_3 \mid I) = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

- La formule des probabilités totales avec le système complet $(I, \overline{I})$ donne :

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid I)\,\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A_3 \mid \overline{I}\,)\,\mathbb{P}(\,\overline{I}\,). \qquad (\star)$$

Le seul terme encore inconnu dans la formule précédente est $\mathbb{P}(A_3 \mid \overline{I}\,)$. Compte tenu de l'inclusion $A_2 \subset A_3$, la formule des probabilités composées nous donne :

$$\mathbb{P}(A_3 \mid \overline{I}\,) = \mathbb{P}_{\overline{I}}(A_3) = \mathbb{P}_{\overline{I}}(A_3 \mid A_2)\,\mathbb{P}_{\overline{I}}(A_2).$$

et donc, compte tenu de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(A_3 \mid \overline{I}\,) = \frac{2}{3}\,\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\cdot$$

La relation $(\star)$ donne donc :

$$\mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{25}{48}\cdot$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{P}(I \mid A_3) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{3}}{\frac{25}{48}} = \frac{9}{25}\cdot$$

17.2 1. Notons G l'événément « le n-ième passager s'installe à sa place ».
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, considérons l'événement :

A_k : « le premier passager s'installe à la k-ième place. »

La famille d'événements $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements, chacun de probabilité $\dfrac{1}{n}$. La formule des probabilités totales donne :

$$p_n = \mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(G \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(G \mid A_k).$$

Compte tenu de l'expérience aléatoire décrite :

- si le premier passager s'installe à sa place, alors tous les autres font de même ; on a donc $\mathbb{P}(G \mid A_1) = 1$;

- si le premier passager s'installe à la n-ième place, alors le n-ième passager en arrivant verra sa place déjà occupée ; on a donc $\mathbb{P}(G \mid A_n) = 0$;
- pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, si le premier passager s'assoit à la k-ième place, alors :
  * les passagers, du 2e au $(k-1)$-ième, s'assoiront à leur place,
  * le k-ième passager lui ne pourra pas le faire, il choisira donc une place au hasard parmi les places encore libres (il y a alors $n-k+1$ places libres : la première et celles dont le numéro appartient à $[\![k+1, n]\!]$) ; quitte à renuméroter les $n-k+1$ places disponibles de 1 à $n-k+1$, on est alors ramené au problème initial avec $n-k+1$ places au lieu de n ; on a donc $\mathbb{P}(G \mid A_k) = p_{n-k+1}$.

On a donc :

$$p_n = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right)$$

ce qui, via le changement d'indice $j = n-k+1$, donne la relation souhaitée :

$$p_n = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{j=2}^{n-1} p_j\right)$$

2. - Au rang $n+1$, la relation obtenue précédemment s'écrit :

   $$p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{j=2}^{n} p_j\right).$$

   On a :

   $$n\,p_n = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} p_j \qquad \text{et} \qquad (n+1)\,p_{n+1} = 1 + \sum_{j=2}^{n} p_j$$

   ce qui donne :

   $$(n+1)\,p_{n+1} = n\,p_n + p_n = (n+1)\,p_n \quad \text{puis finalement} \quad p_{n+1} = p_n.$$

   - Il en résulte que la suite $(p_n)_{n\geqslant 2}$ est constante. De plus, on a facilement $p_2 = \dfrac{1}{2}$, car pour 2 passagers le problème est très simple : il y a deux cas équiprobables suivant que le premier passager s'installe à la place 1 ou à la place 2.

   On en déduit que $p_n = \dfrac{1}{2}\cdot$

17.3 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'événement :

« le parapluie est disponible après n trajets ».

Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \overline{A_n})$:

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid \overline{A_n})\,\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,).$$

- On a $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = p$ car, sachant que le parapluie est disponible après n déplacements, il l'est après $n+1$ déplacements si, et seulement si, le banquier a pris le parapluie avec lui, c'est-à-dire s'il a plu lors du $(n+1)$-ième déplacement.

- On a $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) = 1$ car si le parapluie n'est pas disponible après n déplacements, il le sera après le déplacement suivant.

On obtient :

$$p_{n+1} = p\,p_n + q_n.$$

Puis, avec le même raisonnement :

$$q_{n+1} = \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}} \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}} \mid \overline{A_n})\,\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,) = q\,p_n$$

et donc finalement :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La relation de récurrence obtenue à la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de calculer A^n. Pour cela, diagonalisons la matrice A.
On a $\operatorname{sp}(A) = \{1, -q\}$, et :

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{-q}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On a $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} \ ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \frac{1}{q+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A^n = P\,\Delta^n\,P^{-1}$ puis :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = P\,\Delta^n\,P^{-1}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $|q| < 1$, on a :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par continuité de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & P\,M\,P^{-1}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (\star)$$

on déduit de la relation $(\star)$ que les suites (p_n) et (q_n) convergent et que :

$$\begin{pmatrix} \lim p_n \\ \lim q_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, après calcul (et comme $p_0 + q_0 = 1$) :

$$\begin{pmatrix} \lim p_n \\ \lim q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \lim p_n = \frac{1}{1+q}.$$

17.4 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les événements :

$$P_n \text{ : « pile au } n\text{-ième lancer »} \quad \text{et} \quad F_n \text{ : « face au } n\text{-ième lancer ».}$$

On a évidemment $p_0 = p_1 = 1$. Soit $n \geqslant 2$. La famille d'événements :

$$(F_1,\ P_1 \cap F_2,\ P_1 \cap P_2)$$

est un système quasi-complet d'événements ; appliquons la formule des probabilités totales :

$$p_n = \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E_n \mid F_1)\,\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(E_n \mid P_1 \cap F_2)\,\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(E_n \mid P_1 \cap P_2)\,\mathbb{P}(P_1 \cap P_2). \qquad (\star)$$

- Compte tenu de l'expérience aléatoire décrite par l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(E_n \mid F_1) = p_{n-1}\ ; \quad \mathbb{P}(E_n \mid P_1 \cap F_2) = p_{n-2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E_n \mid P_1 \cap P_2) = 0.$$

- D'autre part, la pièce étant équilibrée, on a :

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}\cdot$$

La formule $(\star)$ mène donc à la relation de récurrence suivante :

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{2} + \frac{p_{n-2}}{4}\cdot$$

2. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

possède deux solutions distinctes : $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\cdot$

Il existe donc deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n.$$

Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, on en déduit immédiatement $\lim p_n = 0$.

Remarque On pourrait déterminer les valeurs des constantes λ et μ en exploitant le fait que $p_0 = p_1 = 1$, mais cela ne s'est pas révélé utile pour déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

17.5 1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Supposons que les joueurs A et B disposent, au commencement du jeu, de a et b fortunes respectives. Considérons les événements :

$$G \text{ : « } A \text{ gagne le jeu »} \quad \text{et} \quad G_1 \text{ : « } A \text{ remporte la première partie ».}$$

On a, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(G_1, \overline{G_1})$:

$$R(a,b) = \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G \mid G_1)\,\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G \mid \overline{G_1})\,\mathbb{P}(\,\overline{G_1}\,).$$

- On a $\mathbb{P}(G_1) = p$ et $\mathbb{P}(\,\overline{G_1}\,) = q$.
- Si le joueur A gagne la première partie, alors, au moment de jouer la deuxième partie, les fortunes de A et B valent respectivement $a+1$ et $b-1$.
  On a donc $\mathbb{P}(G \mid G_1) = R(a+1, b-1)$.
- De même, on a $\mathbb{P}(G \mid \overline{G_1}) = R(a-1, b+1)$.

On obtient la relation suivante :

$$R(a,b) = p\,R(a+1, b-1) + q\,R(a-1, b+1).$$

2. (a) On constate que la somme des deux fortunes reste constante tout au long de la partie.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Notons $N = a+b$, et posons :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad u_k = R(k, N-k).$$

On a d'une part :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_N = 1$$

et d'autre part la relation obtenue à la question précédente donne, en tenant compte du fait que $p = q = \frac{1}{2}$:

$$\forall k \in [\![1,N-1]\!] \quad u_k = \frac{u_{k+1}}{2} + \frac{u_{k-1}}{2}$$

se qui se reformule ainsi :

$$\forall k \in [\![0,N-2]\!] \quad u_{k+2} - 2\,u_{k+1} + u_k = 0. \qquad (\star)$$

La $(N+1)$-liste $(u_0,\ldots,u_{N+1})$ vérifie donc une linéaire d'ordre 2. On montre qu'une telle liste $(u_0,\ldots,u_{N+1})$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1, et que cette liste est en fait la « restriction » aux $N+1$ premiers termes d'une suite récurrente d'ordre 2 « classique ».
Plus précisément, si l'on considère la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(v_0,v_1) = (u_0,u_1) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad v_{k+2} - 2\,v_{k+1} + v_k = 0,$$

alors on montre par récurrence finie double sur $k \in [\![0,N]\!]$ que :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad u_k = v_k.$$

L'équation caractéristique de la relation de récurrence $(\star)$ est :

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

et possède 1 comme solution double. On en déduit qu'il existe deux constantes λ et μ vérifiant :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad u_k = \lambda + \mu\,k.$$

Comme de plus $u_0 = 0$ et $u_N = 1$, on obtient $\lambda = 0$ et $\mu = \dfrac{1}{N}$, d'où :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad u_k = \frac{k}{N} \quad \text{et en particulier} \quad R(a,b) = u_a = \frac{a}{N} = \frac{a}{a+b}\cdot$$

(b) Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, notons $S(a,b)$ la probabilité que la joueur B gagne le jeu. En échangeant les rôles de A et B, le résultat de la question précédente nous donne :

$$S(a,b) = \frac{b}{a+b}\cdot$$

On constate alors que

$$R(a,b) + S(a,b) = 1,$$

ce qui signifie que presque sûrement un des deux joueurs finit ruiné. Autrement dit, le jeu se termine presque sûrement en un nombre fini de parties (et cela quelles que soit les fortunes initiales a et b des deux joueurs).

3. Le raisonnement est le même qu'à la question 2, seuls changent les calculs. Contentons-nous donc d'indiquer les résultats.

   (a) La relation vérifiée par la $(N+1)$-liste $(u_0, \ldots, u_N)$ est :
   $$\forall k \in [\![0, N-2]\!] \quad u_{k+2} - \frac{1}{p}\, u_{k+1} + \frac{q}{p}\, u_k = 0.$$
   L'équation caractéristique :
   $$x^2 - \frac{1}{p}\, x + \frac{q}{p} = 0$$
   possède deux solutions distinctes : 1 et $\dfrac{p}{q}$, donc il existe deux constantes λ et μ vérifiant :
   $$\forall k \in [\![0, N]\!] \quad u_k = \lambda + \mu \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$
   En utilisant le fait que $u_0 = 0$ et $u_N = 1$, on obtient :
   $$\lambda = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} \qquad \text{et} \qquad \mu = -\lambda = \frac{-1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$$
   ce qui donne :
   $$\forall k \in [\![0, N]\!] \quad u_k = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^k}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} \quad \text{et donc} \quad R(a,b) = u_a = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^a}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}.$$

   (b) On obtient, en échangeant les rôles de A et B dans le résultat précédent :
   $$S(a,b) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   et l'on constate à nouveau que :
   $$R(a,b) + S(a,b) = 1,$$
   ce qui mène à la même conclusion : le jeu se termine presque sûrement en un nombre fini de parties.

17.6 1. On a, par continuité monotone :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big). \qquad (\star)$$
D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{N} A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}\Big).$$

Comme les événements $A_0, \ldots, A_N$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements $\overline{A_0}, \ldots, \overline{A_N}$ (conséquence de l'exercice 10 de la page 967), et donc le calcul précédent mène à :

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Bigg) = 1 - \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})$$

La limite $(\star)$ donne alors le résultat souhaité :

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigg) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}).$$

2. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \prod_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \prod_{n=0}^{N} \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\cdot$$

Le produit obtenu se simplifie en faisant apparaître des produits télescopiques :

$$\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \left(\prod_{n=0}^{N} \frac{n+1}{n+2}\right)\left(\prod_{n=0}^{N} \frac{n+3}{n+2}\right) = \frac{1}{N+2}\,\frac{N+3}{2}\cdot$$

On obtient $\lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \frac{1}{2}$ et donc, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigg) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$$

3. (a) Distinguons deux cas :
   - si $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0, alors $\ln \mathbb{P}(\overline{A_n})$ sont plus, et dans ce cas les deux séries $\sum \mathbb{P}(A_n)$ et $\sum \ln \mathbb{P}(\overline{A_n})$ divergent grossièrement ;
   - si $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, alors on a :

   $$-\ln \mathbb{P}(\overline{A_n}) = -\ln\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) \sim \mathbb{P}(A_n)$$

   et alors, par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, les deux séries $\sum \mathbb{P}(A_n)$ et $\sum \ln \mathbb{P}(\overline{A_n})$ sont de même nature.

   (b) D'après la première question, on a :

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigg) = 1 \iff \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0.$$

Comme tous les $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ sont strictement positifs, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1 \iff \lim_{N\to+\infty} \ln\Big(\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})\Big) = -\infty$$

$$\iff \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln \mathbb{P}(\overline{A_n}) = -\infty$$

et donc, comme $\sum \ln \mathbb{P}(\overline{A_n})$ est une série à termes négatifs, l'équivalence précédente se reformule ainsi :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1 \iff \Big(\text{la série } \sum \ln \mathbb{P}\,\overline{A_n}\,)\text{ diverge.}\Big)$$

Puisque d'après la question précédente les séries $\sum \ln \mathbb{P}(\overline{A_n})$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ ont même nature, cela prouve le résultat souhaité.

17.7 1. • L'expression de B à l'aide des A_n a déjà été obtenue à l'exercice 2 de la page 958 (il s'agit de l'événement noté C dans l'exercice en question) :

$$B = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\Big)$$

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un événement comme réunion dénombrable d'événements, et donc B un bien un événement car intersection dénombrable d'événements.

Cette expression de B assure qu'il s'agit bien d'un événement (par les propriétés de stabilité d'une tribu).

2. La famille $\Big(\bigcup\limits_{n\geqslant p} A_n\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\Big).$$

Supposons que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors son reste tend vers 0 :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par sous-additivité, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

ll en résulte, par théorème d'encadrement que

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\Big) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathbb{P}(B) = 0.$$

3. • Un sens a déjà été obtenu à la question précédente (c'est le lemme de Borel-Cantelli) : si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(B) = 0$. Nous pouvons remarquer que, pour obtenir ce résultat, nous n'avons nullement eu besoin de l'hypothèse d'indépendance des A_n.

• Montrons l'autre sens : supposons que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et prouvons que $\mathbb{P}(B) = 1$. Cela revient à montrer que $\mathbb{P}(\,\overline{B}\,) = 0$. Étant donné l'expression de B obtenue à la question 1 on a :

$$\overline{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big)$$

et donc, par continuité croissante :

$$\mathbb{P}(\,\overline{B}\,) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big).$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit alors de prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big) = 0.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\Big)$$

Comme les événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\Big) = \prod_{n=p}^{N} \mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)$$

ou encore :

$$\ln\bigg(\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\Big)\bigg) = \sum_{n=p}^{N} \ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big)$$

Pour conclure, distinguons deux cas :

∗ *Premier cas : $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0.*
Alors $\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)$ ne tend pas vers 1, et donc $\ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big)$ ne tend pas vers 0. Par suite, la série $\sum \ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big)$ diverge grossièrement et donc, comme elle est à termes négatifs, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=p}^{N} \ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big) = -\infty$$

puis, en composant par l'exponentielle :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\Big) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big) = 0.$$

* *Second cas : $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0.*
  Alors on a $-\ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big) = -\ln\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big) \sim \mathbb{P}(A_n)$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant p} \mathbb{P}(A_n)$ entraîne la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant p} -\ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big)$. On obtient finalement :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=p}^{N} -\ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big) = +\infty \quad i.e. \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=p}^{N} \ln\big(\mathbb{P}(\,\overline{A_n}\,)\big) = -\infty$$

  et l'on obtient, comme dans le premier cas :

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\bigg) = 0.$$

17.8 1. (a) Montrons que $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ vérifie les trois propriétés de la définition 1.

- Pour tout $i \in I$, on a $\Omega \in \mathcal{A}_i$. Ainsi, $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. Pour tout $i \in I$, on a $A \in \mathcal{A}_i$ et donc $\overline{A} \in \mathcal{A}_i$. Ainsi, $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_i$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$. Ainsi, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

(b) Notons Γ l'ensemble des tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{F}$. Montrons que l'intersection de tous les éléments de Γ :

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B}\in\Gamma} \mathcal{B}$$

est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.

- D'après la question précédente, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, comme intersection de tribus sur Ω.
- Par définition de Γ, on a :

$$\forall \mathcal{B} \in \Gamma \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$$

  donc, par construction de $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.
- D'autre part, si $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu contenant $\mathcal{F}$, alors on a $\widetilde{\mathcal{A}} \in \Gamma$ et donc, par définition de $\mathcal{A}$, on a $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$.

2. • Prouvons que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.
   * Par hypothèse sur $B_1, \ldots, B_p$, on a $\Omega = \bigcup\limits_{i\in[\![1,p]\!]} B_i$. Donc $\Omega \in \mathcal{A}$.
   * Pour $A \in \mathcal{A}$, il existe $I \subset [\![1,p]\!]$ tel que $A = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$. Comme les ensembles $B_1, \ldots, B_p$ sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω, on a :

$$\Omega \setminus A = \bigcup_{i\in[\![1,p]\!]\setminus I} B_i \qquad \text{et donc} \qquad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}.$$

* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $A_n = \bigcup\limits_{i\in I_n} B_i$ avec $I_n \subset [\![1,p]\!]$, et l'on a alors :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{i\in I} B_i \quad \text{avec} \quad I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [\![1,p]\!],$$

ce qui prouve que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

- Il reste à prouver que la tribu $\mathcal{A}$ contient $B_1,\ldots,B_p$ et que c'est la plus petite vérifiant cela.
  * Il est clair que $\mathcal{A}$ contient les parties $B_1,\ldots,B_n$ car pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ on a $B_k = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ avec $I = \{k\}$.
  * Soit $\mathcal{B}$ est une tribu contenant $B_1,\ldots,B_p$. Montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
  Soit $A \in \mathcal{A}$. On a $A = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ avec $I \subset [\![1,p]\!]$. En posant alors :

$$\forall n \in I \quad A_n = B_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus I \quad A_n = \varnothing$$

  on a $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comme toutes les parties A_n, pour $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$, la propriété de stabilité par réunion dénombrable entraîne que $A \in \mathcal{B}$.

Chapitre 18 : Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes

18

I Variables aléatoires discrètes

1 Généralités

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \to E$, où E est un ensemble quelconque, telle que :

(*i*) l'image de X, notée $X(\Omega)$ ou $\operatorname{Im} X$, est une partie au plus dénombrable de E ;

(*ii*) pour tout $x \in \operatorname{Im} X$, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle discrète**.

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.
Pour tout $A \subset E$, on a $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Principe de démonstration. Écrire $X^{-1}(A)$ comme une réunion au plus dénombrable de parties de la forme $X^{-1}\big(\{x\}\big)$ et utiliser les propriétés de stabilité de $\mathcal{A}$.

Démonstration page 1015

Notations

- Pour $x \in E$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$ est noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.
- Plus généralement, pour $A \subset E$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$.
- Si X est à valeurs réelles, alors un événement de la forme $\{X \in I\}$, où I est un intervalle, pourra s'écrire à l'aide d'inégalités, par exemple :
$$\{a \leqslant X \leqslant b\}, \qquad \{X \geqslant a\} \qquad \text{ou encore} \qquad \{X \leqslant b\}.$$
- Pour alléger les écritures dans des calculs de probabilités, on omettra souvent les accolades : ainsi, pour $\mathbb{P}(\{X = x\})$, on écrira simplement $\mathbb{P}(X = x)$.

Exemples

1. Toute fonction constante est une variable aléatoire discrète, appelée **variable aléatoire constante**.
2. Si A est un événement, alors la fonction $\mathbb{1}_A$ (fonction indicatrice de A) est une variable aléatoire discrète, appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.

p.1015

Exercice 1 Montrer que si Ω est un ensemble au plus dénombrable que l'on a muni de la tribu complète $\mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application définie sur Ω est une variable aléatoire.

Remarque En particulier, la définition 1 de la page ci-contre est cohérente avec la définition déjà vue en première année dans le cadre d'un univers fini.

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète. L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\operatorname{Im} X) \to [0,1]$ définie par :

$$\forall A \subset \operatorname{Im} X \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

est une probabilité sur $\big(\operatorname{Im} X, \mathcal{P}(\operatorname{Im} X)\big)$, appelée **loi de X**.

Principe de démonstration. Démonstration page 1015

Utiliser la définition d'une probabilité (définition 3 de la page 958).

Remarques

1. L'ensemble $\operatorname{Im} X$ étant au plus dénombrable, il est naturel de le munir de la tribu complète $\mathcal{P}(\operatorname{Im} X)$.
2. La loi d'une variable aléatoire discrète est donc une probabilité définie sur un univers au plus dénombrable. Une telle probabilité est appelée **loi de probabilité discrète**.
3. Il arrive couramment que l'on ne connaisse par exactement $\operatorname{Im} X$, mais que l'on connaisse seulement un ensemble E au plus dénombrable tel que $\operatorname{Im} X \subset E$.

   Dans ce cas, on pourra considérer la loi $\mathbb{P}_X$ de X comme une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$, et l'on a alors :

$$\forall x \in E \setminus \operatorname{Im} X \quad \mathbb{P}_X(\{x\}) = 0.$$

Point méthode

Comme $\operatorname{Im} X$ est au plus dénombrable, toute partie $A \subset \operatorname{Im} X$ s'écrit comme réunion disjointe au plus dénombrable de singletons $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$.

- Si A est finie, alors on a par additivité finie :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

- Si A est dénombrable, alors en écrivant $A = \{a_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$, les a_n étant deux à deux distincts, on a par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = a_n).$$

Pour caractériser la loi de X, il suffit donc d'expliciter tous les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in \operatorname{Im} X$.

Remarque Avec les notations précédentes dans le cas où A est dénombrable, la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = a_n)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les éléments de A sont énumérés puisqu'elle vaut $\mathbb{P}_X(A)$ dans tous les cas.
On s'autorise donc à noter :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

ce qui présente l'avantage d'avoir une notation unifiée pour le cas fini et le cas dénombrable.

Notation Soit X une variable aléatoire discrète et $\mathcal{L}$ une probabilité sur $\operatorname{Im} X$. On dit que X suit la loi $\mathcal{L}$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{L}$ ou $X \sim \mathcal{L}$, pour signifier que $\mathcal{L}$ est la loi de X.

Définition 2

Une variable aléatoire X est dite **presque constante** s'il existe a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Remarque Toute application constante est une variable aléatoire presque sûrement constante, mais la réciproque est fausse (*cf.* exercice suivant).

p.1015 **Exercice 2** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec Ω au plus dénombrable. Montrer que les variables aléatoires presque sûrement constantes sont exactement les applications constantes si, et seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \neq 0.$$

Système complet associé à une variable aléatoire

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La famille :

$$\big(\{X = x\}\big)_{x \in \operatorname{Im} X}$$

est un système complet d'événements.

Il est appelé **système complet associé à $\boldsymbol{X}$**.

Principe de démonstration. Il s'agit de vérifier que les événements $\{X = x\}$ sont deux à deux incompatibles et que leur réunion vaut Ω. Démonstration page 1016

Conséquence On a $\displaystyle\sum_{x \in \operatorname{Im} X} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Exemple Soit A un événement. Le système complet associé à $\mathbb{1}_A$ est $(A, \overline{A})$.

Image d'une variable aléatoire par une application

Proposition 4

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que f une application définie sur $\operatorname{Im} X$. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète, notée $f(X)$, dont la loi est donnée par :

$$\forall y \in \operatorname{Im} f(X) \quad \mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Principe de démonstration. Pour montrer que $f \circ X$ est une variable aléatoire, revenir à la définition 1 de la page 1000. Puis, pour exprimer $\mathbb{P}\big(f(X) = y\big)$, écrire l'événement $\big\{f(X) = y\big\}$ comme réunion disjointe d'événements de la forme $\{X = x\}$. Démonstration page 1016

Existence d'une variable aléatoire à loi fixée à l'avance

Les résultats suivants énoncent que toute loi de probabilité discrète (*i.e.* toute probabilité sur un univers au plus dénombrable) peut être vue comme la loi d'une variable aléatoire discrète.

La proposition 5 traite du cas fini et la proposition 6 du cas dénombrable.

Proposition 5 (Cas fini)

Soit $x_1, \ldots, x_N$ des éléments deux à deux distincts d'un ensemble E.

Si $p_1, \ldots, p_N$ sont des réels positifs dont la somme vaut 1, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ vérifiant :

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(X = x_n) = p_n.$$

Principe de démonstration. Utiliser la proposition 13 de la page 968.

Démonstration page 1017

Proposition 6 (Cas dénombrable)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E deux à deux distincts. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = x_n) = p_n.$$

Principe de démonstration. C'est l'adaptation au cas dénombrable de la preuve de la proposition 5. Utiliser la proposition 14 de la page 968.

Démonstration page 1017

Approfondissement Au vu de la démonstration de la proposition précédente, lorsque l'on souhaite construire une variable aléatoire dont la loi est fixée à l'avance, on peut imposer si besoin que l'univers Ω soit dénombrable.

p.1017

Exercice 3 Soit $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) = \alpha \, \frac{\lambda^n}{n!}\cdot$$

II Couples de variables aléatoires

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1 Généralités

Proposition 7

Soit E_1 et E_2 deux ensembles ainsi que $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$ deux applications. L'application

$$\begin{array}{rccl} Z : & \Omega & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ & \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est une variable aléatoire discrète si, et seulement si, X et Y le sont.

On parle alors du **couple de variables aléatoires (X, Y)**.

Principe de démonstration. Pour un des sens, trouver deux applications π_1 et π_2 telles que :

$$X = \pi_1(Z) \qquad \text{et} \qquad Y = \pi_2(Z).$$

Pour l'autre sens, si X et Y sont des variables aléatoires, alors Z aussi en revenant la définition 1 de la page 1000.

Démonstration page 1017

Remarque On a $\operatorname{Im}(X, Y) \subset \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$. L'égalité est fausse en général, comme on le voit en considérant le couple (X, X) avec X non constante.

Proposition 8

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
La famille d'événements :

$$\Big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\Big)_{(x,y)\in \operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y}$$

est un système complet d'événements.

Principe de démonstration. Expliquer le lien entre la famille d'événements considérée et le système complet associé à la variable aléatoire (X,Y). Démonstration page 1018

Conséquence On a :

$$\sum_{(x,y)\in \operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y} \mathbb{P}\Big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\Big)=1.$$

p.1018 **Exercice 4 (Somme et produit de deux variables aléatoires discrètes réelles)**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles définies sur un même espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$. Montrer que leur somme $X+Y$ et leur produit XY sont des variables aléatoires discrètes.

Loi conjointe

Définition 3

Étant donné deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, on appelle **loi conjointe de X et Y** la loi du couple (X,Y).

Remarque La loi conjointe de X et Y est déterminée par la famille :

$$\Big(\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})\Big)_{(x,y)\in \operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y}$$

Cela explique pourquoi, dans le cas où $\operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Im} Y$ sont finis, on présente souvent la loi conjointe sous la forme d'un tableau dans lequel figurent les valeurs des $\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$ pour (x,y) décrivant $\operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y$.

Lois marginales

Définition 4

Étant donné (X,Y) un couple de variables aléatoires, les lois de X et Y sont respectivement appelées **première loi marginale** et **seconde loi marginale** du couple.

Le résultat suivant indique comment les lois marginales s'obtiennent à partir de la loi du couple.

Proposition 9

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

- Pour tout $x \in \operatorname{Im} X$, on a :

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)$$

- De la même manière, pour tout $y \in \operatorname{Im} Y$, on a :

$$\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1018

Pour la première formule, utiliser le système complet d'événements associé à la variable Y.

2 Loi conditionnelle

Définition 5

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et B un événement de probabilité non nulle. On appelle **loi conditionnelle de X sachant B** la loi de X sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$, où $\mathbb{P}_B$ désigne la probabilité conditionnelle à B.

Pour tout $A \subset \operatorname{Im} X$, on a ainsi :

$$\mathbb{P}_B(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \mid B) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap B\big)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarques

- Une loi conditionnelle étant la loi d'une variable aléatoire, c'est une probabilité ; elle en a donc toutes les propriétés.
- Le plus souvent, lorsque l'on considère des lois conditionnelles, l'événement B est de la forme $\{Y=y\}$, où Y est une autre variable aléatoire discrète définie sur le même espace probabilisé que X (*cf.* définition suivante).

Définition 6

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Étant donné $y \in \operatorname{Im} Y$ tel que $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$** la loi de X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\{Y=y\}})$.

Pour tout $A \subset \operatorname{Im} X$, on a ainsi :

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y=y\}\big)}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

Proposition 10

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Supposons que pour tout $y\in \operatorname{Im} Y$, on ait $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$.
Alors, pour tout $x\in\operatorname{Im} X$, on a :

$$\forall y\in\operatorname{Im} Y \quad \mathbb{P}\Big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\Big)=\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

et donc : $\mathbb{P}(X=x)=\displaystyle\sum_{y\in\operatorname{Im} Y}\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$.

Principe de démonstration. La première formule est une conséquence immédiate de la définition 6. Pour la seconde, utiliser la proposition 9. Démonstration page 1019

Remarque Dans la définition 6 et la proposition 10, les rôles de X et Y peuvent évidemment être échangés.

Conséquence Par suite, connaissant une des lois marginales ainsi que la loi conditionnelle de l'autre variable par rapport à la première, on sait retrouver :

- la loi conjointe (*i.e.* la loi du couple) ;
- la seconde loi marginale.

III Indépendance

1 Indépendance de deux variables aléatoires

Contexte Pour alléger les énoncés, sauf mention plus précise, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Définition 7

On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $(x,y)\in\operatorname{Im} X\times\operatorname{Im} Y$:

$$\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

Remarque Si X et Y sont indépendantes, alors la connaissance de leurs lois permet d'obtenir immédiatement leur loi conjointe, *i.e.* la loi du couple (X,Y).

p.1019

Exercice 5

Montrer que X est indépendante de toutes les autres variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ si, et seulement si, elle est constante presque sûrement.

Indication : si X n'est pas constante presque sûrement, on pourra montrer qu'elle n'est pas indépendante d'elle-même.

Remarque Il découle de l'exercice précédent que l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes n'est pas une notion intrinsèque aux variables aléatoires considérées, mais dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ dont on a muni l'espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$.

Proposition 11

Les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $A \subset \operatorname{Im} X$ et $B \subset \operatorname{Im} Y$, on a :

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration (non exigible) page 1019

Proposition 12

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g définies sur $\operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Im} Y$ respectivement, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration page 1020

Caractérisation par les lois conditionnelles

Proposition 13

Les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $y \in \operatorname{Im} Y$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est la même que la loi de X.

Démonstration page 1020

Somme de deux variables réelles indépendantes

Point méthode

Si X et Y sont indépendantes et à valeurs réelles, alors on sait déterminer la loi de leur somme $Z = X + Y$. Pour $z \in \operatorname{Im} Z$, l'événement $\{Z = z\}$ s'écrit comme une réunion disjointe au plus dénombrable :

$$\{Z = z\} = \bigcup_{x \in \operatorname{Im} X} \{X = x\} \cap \{Y = z - x\}.$$

- Si $\operatorname{Im} X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ est fini, alors on a, par additivité et en utilisant l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_n)\,\mathbb{P}(Y = z - x_n).$$

- Si $\operatorname{Im} X = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, alors on a, par additivité dénombrable et en utilisant l'indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)\,\mathbb{P}(Y = z - x_n).$$

2 Extension au cas de n variables aléatoires

Contexte
Pour alléger les énoncés, on convient ici que $X_1, \ldots, X_n$ désignent n variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (avec $n \geqslant 2$).

Définition 8

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes**, ou simplement **indépendantes**, si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Im} X_1 \times \cdots \times \operatorname{Im} X_n$$
$$\mathbb{P}\Big(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

Attention Pour alléger, on dit souvent *indépendantes* et non pas *mutuellement indépendantes*. Prendre garde alors à ne pas confondre avec l'indépendance deux à deux.

Remarque La notion d'indépendance ne dépend pas de l'ordre des variables.

Proposition 14

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toutes parties $A_1 \subset \operatorname{Im} X_1, \ldots, A_n \subset \operatorname{Im} X_n$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in A_k).$$

Démonstration (non exigible) page 1021

Proposition 15

La propriété d'indépendance se transmet à toute sous-famille.
Autrement dit, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables indépendantes, alors, pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide, la famille $(X_i)_{i \in I}$ est également une famille de variables indépendantes.

Démonstration page 1022

p.1022 **Exercice 6** Supposons les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes.
Montrer que, pour toutes parties $A_1 \subset \operatorname{Im} X_1, \ldots, A_n \subset \operatorname{Im} X_n$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.

Corollaire 16

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

Démonstration page 1022

p.1022 **Exercice 7** Montrer que des événements $A_1, \dots, A_n$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont indépendants si, et seulement si, les variables de Bernoulli associées $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

p.1023 **Exercice 8** Supposons $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. Montrer que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions définies respectivement sur $\operatorname{Im} X_1, \dots, \operatorname{Im} X_n$, alors les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

p.1023 **Exercice 9** Soit $n \geqslant 3$. Considérons $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes. Montrer que si l'on note Y le couple (X_1, X_2), alors les variables aléatoires Y, X_3, ..., X_n sont indépendantes.

p.1024 **Exercice 10** En utilisant les résultats des exercices 8 et 9, montrer que si X_1, X_2, X_3, X_4 sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, les variables $X_1 + X_2$ et $X_3 X_4$ sont indépendantes.

3 Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 9

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si, pour toute partie finie non vide $I \subset \mathbb{N}$, la famille finie $(X_n)_{n \in I}$ est une famille de variables indépendantes.

Remarques

1. La notion d'indépendance ne dépend pas de l'ordre des variables.
2. Toute sous-famille (finie ou non) d'une suite de variables indépendantes est encore une famille de variables indépendantes.

Le théorème suivant est fondamental : il assure l'existence de suites de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont fixées à l'avance. Sa démonstration est hors-programme.

Théorème 17 (Admis)

Soit $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{L}_n.$$

Corollaire 18

Soit $\mathcal{L}$ une loi de probabilité discrète. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la loi $\mathcal{L}$.

Application au jeu de pile ou face En notant p la probabilité d'obtenir pile, et en représentant pile et face par 1 et 0 respectivement, alors la modélisation d'un jeu de pile ou face infini revient à la construction d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
Le corollaire 18 nous assure l'existence d'une telle suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV Lois discrètes usuelles

En première année ont été présentées les lois finies usuelles suivantes :

- la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(p)$;
- la loi uniforme sur un intervalle d'entiers $[\![a,b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$;
- la loi binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Nous ajoutons à ces lois finies deux lois discrètes :

- la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$;
- la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

1 Loi géométrique

Définition 10

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit la **loi géométrique de paramètre p** si :

$$\operatorname{Im} X = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=k) = p\,(1-p)^{k-1}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Attention Pour pouvoir parler de la loi géométrique de paramètre p, il est nécessaire d'avoir p non nul et $p \neq 1$.

Remarque La définition précédente est cohérente car :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad p(1-p)^{k-1} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1} = 1.$$

Extension de la définition 10 Dans certains cas, la variable aléatoire X étudiée ne vérifie pas rigoureusement la définition 10 mais vérifie seulement :

$$\mathbb{N}^* \subset \operatorname{Im} X \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=k) = p\,(1-p)^{k-1}.$$

On a alors $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = 1$, et donc $\mathbb{P}(X \in (\operatorname{Im} X) \setminus \mathbb{N}^*) = 0$, et on dit encore que X suit la loi géométrique de paramètre p. L'exercice 11 ci-dessous présente une telle situation.

Situation type On obtient naturellement une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ lorsque l'on s'intéresse à l'instant du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (*cf.* exercice suivant).

p.1024

Exercice 11 (Instant du premier succès)

On considère une suite $(U_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on définit X, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de la manière suivante :

$$X = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k = 1\} & \text{si } \{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k = 1\} \neq \varnothing \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que X est une variable aléatoire.
2. Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Remarque Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si, et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k \ ,$$

ce que l'on interprète facilement si X est l'instant du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli (*cf.* exercice précédent) ; en effet, la réalisation de l'événement $\{X > k\}$ équivaut à dire que chacune des k premières épreuves a donné lieu à un échec.

Proposition 19 (Caractère sans mémoire de la loi géométrique)

Soit X une variable aléatoire telle que $\operatorname{Im} X = \mathbb{N}^*$. La variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > n) \neq 0$$

ainsi que :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k). \qquad (\star)$$

Démonstration page 1025

Remarque

Cette propriété $(\star)$ est appelée « absence de mémoire » de la loi géométrique.

p.1026

Exercice 12 (Une autre caractérisation de l'absence de mémoire)

Soit X une variable aléatoire telle que $\operatorname{Im} X = \mathbb{N}^*$. Montrer que X suit une loi géométrique si, et seulement si, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > n) > 0$$

ainsi que :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X = k). \qquad (\Delta)$$

p.1026

Exercice 13 (Minimum de deux variables indépendantes de loi géométrique)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$?

2 Loi de Poisson

Remarque culturelle Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) était un physicien et mathématicien français.

Définition 11

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la **loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$** si :

$$\operatorname{Im} X = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque La définition précédente est cohérente car :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} = 1.$$

Avant d'expliquer l'utilisation pratique de la loi de Poisson, commençons par le résultat suivant qui affirme que la loi de Poisson est naturellement obtenue comme « limite » de lois binomiales.

Proposition 20

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suive une loi binomiale de paramètre (n, p_n).
Supposons que l'on ait la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} (n\, p_n) = \lambda > 0.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

Démonstration page 1026

Remarque Avec les hypothèses de la proposition précédente, si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k).$$

Cela s'interprète ainsi : la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est une « bonne approximation » d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ associée :

- à un grand nombre de tentatives (*i.e.* n grand) ;
- chaque tentative ayant une probabilité de succès très faible (*i.e.* p_n petit) ;
- de telle sorte que $n\, p_n$ soit proche de λ.

On dit que la loi de Poisson est la « loi des événements rares. »

Situation type Supposons que l'on souhaite modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans une période d'une heure, sachant que la moyenne habituellement observée est de 30 appels par heure.

- On peut tout d'abord aborder ce problème minute par minute en considérant qu'à chaque minute, le standard :
  - avec probabilité $\frac{1}{2}$, reçoit un appel ;
  - avec probabilité $\frac{1}{2}$, n'en reçoit pas.

  Le nombre d'appels reçus en une heure est alors modélisé par la somme de 60 variables de Bernoulli, que l'on suppose indépendantes, et suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(60, \frac{1}{2}\right)$. Cette modélisation respecte la moyenne attendue de 30 appels par heure, mais n'est pas très satisfaisante car elle impose :
  - qu'il ne peut pas y avoir plusieurs appels reçus dans la même minute ;
  - qu'il est impossible de recevoir plus de 60 appels en une heure.
- Pour rendre le modèle plus réaliste, on peut songer à affiner le précédent en optant pour un découpage seconde par seconde.
  On aboutirait alors à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3600, \frac{1}{120}\right)$.
- Si l'on veut rendre le modèle encore plus réaliste, pourquoi ne pas augmenter encore le découpage ? C'est là qu'intervient la proposition 20 de la page précédente : à force d'augmenter le découpage, on ne fait que se « rapprocher » de la loi de Poisson $\mathcal{P}(30)$, qui apparaît finalement comme le choix le plus pertinent pour notre modélisation.

Plus généralement La loi de Poisson est utilisée pour modéliser un flux d'arrivées (homogène dans le temps) comme par exemple, durant une période T donnée :

- le nombre de clients se présentant dans un magasin ;
- le nombre de véhicules franchissant un poste de péage ;
- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique ;
- le nombre d'étoiles filantes observées une nuit dégagée.

Proposition 21

Si X et Y sont deux variables indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètre respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration page 1027

Attention Dans le résultat précédent, l'hypothèse d'indépendance est importante ! Par exemple, si X suit une loi de Poisson de paramètre $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $2X$ ne suit pas une loi de Poisson (car par exemple $\mathbb{P}(2X=1)=0$).

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Soit $A \subset E$. On a :

$$X^{-1}(A) = X^{-1}(\widetilde{A}) \quad \text{avec} \quad \widetilde{A} = A \cap \operatorname{Im} X.$$

Il s'ensuit que :

$$X^{-1}(A) = \bigcup_{x \in \widetilde{A}} X^{-1}\big(\{x\}\big). \tag{$\star$}$$

- Comme X est une variable aléatoire, $\operatorname{Im} X$ est au plus dénombrable, donc $\widetilde{A}$ l'est aussi. La réunion apparaissant dans la relation $(\star)$ est donc au plus dénombrable.
- De plus, comme X est une variable aléatoire, on a :

$$\forall x \in \widetilde{A} \quad X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{A}.$$

Donc, par stabilité de $\mathcal{A}$ par union au plus dénombrable, on a $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Exercice 1 Soit $X : \Omega \to E$ une application.

- Comme Ω est au plus dénombrable, il en est même pour $\operatorname{Im} X$ puisque X induit une surjection de Ω sur $\operatorname{Im} X$ (*cf.* exercice 5 de la page 940).
- D'autre part, il est clair que pour tout $x \in E$, on a $X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition 2

- L'application $\mathbb{P}_X$ est bien à valeurs dans $[0,1]$.
- On a $\{X \in \operatorname{Im} X\} = \Omega$, donc $\mathbb{P}_X(\operatorname{Im} X) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties deux à deux disjointes de $\operatorname{Im} X$, alors les événements $\{X \in A_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles et donc, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}_X\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_n).$$

Donc l'application $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $\big(\operatorname{Im} X, \mathcal{P}(\operatorname{Im} X)\big)$.

Exercice 2 Considérons la condition :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \neq 0. \tag{$\mathcal{C}$}$$

- Supposons la condition $(\mathcal{C})$ vérifiée. Soit X une variable aléatoire non constante. Comme X n'est pas constante, on peut donc trouver $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$ tel que :

$$X(\omega_1) \neq X(\omega_2).$$

En notant $x_1 = X(\omega_1)$ et $x_2 = X(\omega_2)$, on a alors :

$$\mathbb{P}(X = x_1) \geqslant \mathbb{P}\big(\{\omega_1\}\big) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = x_2) \geqslant \mathbb{P}\big(\{\omega_2\}\big) > 0.$$

Comme $x_1 \neq x_2$, cela prouve que X n'est pas presque sûrement constante.

- Supposons désormais que la condition $\mathcal{C}$ ne soit pas vérifiée, et construisons une application non constante mais presque sûrement constante.
  Comme $\mathcal{C}$ n'est pas vérifiée, on peut trouver $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}\big(\{\omega_0\}\big) = 0$.
  Soit alors $X : \Omega \to \{0,1\}$ définie ainsi :
  $$X(\omega_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus \{\omega_0\} \quad X(\omega) = 1.$$
  Alors X est une variable aléatoire discrète (*cf.* exercice 1 de la page 1001) et l'on a :
  $$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\big(\Omega \setminus \{\omega_0\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{\omega_0\}\big) = 1,$$
  donc X est presque sûrement constante et égale à 1. Pourtant, X n'est pas constante.

Proposition 3

- Les événements de la famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in \operatorname{Im} X}$ sont deux à deux incompatibles.
  En effet, pour $x_1 \neq x_2$, si l'on a $\omega \in \{X = x_1\}$, alors $X(\omega) = x_1$ et donc, comme $x_1 \neq x_2$, on a $\omega \notin \{X = x_2\}$.
- D'autre part, on a :
  $$\bigcup_{x \in \operatorname{Im} X} \{X = x\} = \Big\{X \in \bigcup_{x \in \operatorname{Im} X} \{x\}\Big\} = \Big\{X \in \operatorname{Im} X\Big\} = \Omega.$$

Par suite, la famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in \operatorname{Im} X}$ est un système complet d'événements.

Proposition 4 Prouvons d'abord que $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

- On a $\operatorname{Im}(f \circ X) = f(\operatorname{Im} X)$. L'image par une application d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable (*cf.* exercice 5 de la page 940). Comme $\operatorname{Im} X$ est au plus dénombrable (car X est une variable aléatoire discrète), il en résulte que $\operatorname{Im}(f \circ X)$ est au plus dénombrable.
- D'autre part, pour $y \in \operatorname{Im}(f \circ X)$, on a :
  $$(f \circ X)^{-1}(\{y\}) = X^{-1}(A) \quad \text{avec} \quad A = f^{-1}(\{y\}).$$
  D'après la proposition 1 de la page 1000, on a donc $(f \circ X)^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$.

Par suite, $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

Pour obtenir la loi de $f \circ X$, remarquons que, pour $y \in \operatorname{Im} f(X)$, on a :
$$\big\{f(X) = y\big\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}$$

La famille $\big(\{X = x\}\big)_{x \in f^{-1}(\{y\})}$ étant une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, on obtient, par additivité dénombrable :
$$\mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition 5 Soit $p_1, \ldots, p_N$ des réels positifs dont la somme vaut 1. Notons :

$$\Omega = \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

D'après la proposition 13 de la page 968, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ vérifiant :

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(\{x_n\}) = p_n.$$

Alors, l'application $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ répond au problème puisque c'est une variable aléatoire discrète vérifiant :

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(\{x_n\}) = p_n.$$

Proposition 6 Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs dont la somme vaut 1. Notons :

$$\Omega = \{x_n \, ; \; n \in \mathbb{N}\}.$$

D'après la proposition 14 de la page 968, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{x_k\}) = p_k.$$

Alors, l'application $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ répond au problème puisque c'est une variable aléatoire discrète vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(\{x_n\}) = p_n.$$

Exercice 3 Notons $p_n = \alpha \dfrac{\lambda^n}{n!}$. On constate que la série $\sum p_n$ converge. D'après la proposition 6 de la page 1004, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) = p_n$$

si, et seulement si :

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \geqslant 0\big) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \alpha\, e^{\lambda}.$$

Par suite, la condition nécessaire et suffisante cherchée est $\alpha = e^{-\lambda}$.

Proposition 7

- Supposons que Z soit une variable aléatoire discrète. En considérant les applications :

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_2 \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

  on constate que $X = \pi_1 \circ Z$ et $Y = \pi_2 \circ Z$. Donc, d'après la proposition 4 de la page 1003, X et Y sont des variables aléatoires discrètes.

- Réciproquement, supposons que X et Y soient des variables aléatoires discrètes et montrons que Z l'est aussi.
  - On a $\operatorname{Im} Z \subset \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$. Comme $\operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Im} Y$ sont au plus dénombrables, leur produit cartésien l'est aussi (*cf.* exercice 7 de la page 940) ; par suite, $\operatorname{Im} Z$ l'est également.
  - Soit $z = (x, y) \in \operatorname{Im}(Z)$. Montrons que $Z^{-1}(\{z\}) \in \mathcal{A}$. On a :

$$\begin{aligned}\omega \in Z^{-1}(\{z\}) &\Longleftrightarrow \big(X(\omega), Y(\omega)\big) = (x, y)\\ &\Longleftrightarrow X(\omega) = x \quad \text{et} \quad Y(\omega) = y\end{aligned}$$

  donc $Z^{-1}(\{z\}) = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$. Comme X et Y sont des variables aléatoires discrètes, on a $\{X{=}x\} \in \mathcal{A}$ et $\{Y{=}y\} \in \mathcal{A}$. Par suite, comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection, on a $Z^{-1}(\{z\}) \in \mathcal{A}$.

Proposition 8 Pour $z = (x, y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$, on a :

$$\{X = x\} \cap \{Y = y\} = \big\{(X, Y) = (x, y)\big\}.$$

D'après la proposition 3 de la page 1003, la famille :

$$\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{(x,y)\in \operatorname{Im}(X,Y)}$$

est un système complet d'événements : c'est le système complet associé à (X, Y).

Il en résulte que la famille $\big(\{X{=}x\}\cap\{Y{=}y\}\big)_{(x,y)\in \operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y}$ est également un système complet d'événements car elle est obtenue, à partir du système complet associé à (X, Y), en ajoutant les événements :

$$\{X = x\} \cap \{Y = y\} \quad \text{pour} \quad (x, y) \in (\operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y) \setminus \operatorname{Im}(X, Y),$$

qui sont tous égaux à l'événement impossible $\varnothing$.

Exercice 4 Notons Z le couple (X, Y). En notant s et p les applications :

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \text{et} \qquad p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x\, y \end{array}$$

on a :

$$X + Y = s \circ Z = s(Z) \qquad \text{et} \qquad XY = p \circ Z = p(Z).$$

Par suite, comme Z est une variable aléatoire discrète, la proposition 4 de la page 1003 assure que $X + Y$ et XY le sont également.

Proposition 9

- On sait que la famille :

$$\big(\{Y = y\}\big)_{y\in \operatorname{Im} Y}$$

  est un système complet d'événements : c'est le système complet associé à Y.
  La formule des probabilités totales appliquée avec ce système complet donne alors la formule souhaitée :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in \operatorname{Im} Y} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big).$$

- La seconde formule s'obtient de la même manière en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X.

Proposition 10 Soit $x \in \operatorname{Im} X$.

- Pour $y \in \operatorname{Im} Y$, la relation :

$$\forall y \in \operatorname{Im} Y \quad \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big) = \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

est immédiate par définition de $\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)$.

- La seconde propriété découle de la première puisque, d'après la proposition 9 de la page 1006, on a :

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} \mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)$$

Exercice 5

- Supposons que X soit constante presque sûrement.
Il existe alors $a \in \operatorname{Im} X$ tel que :

$$\mathbb{P}(X = a) = 1.$$

Soit Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $(x, y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$:

  * si $x = a$, alors l'événement $\{X = x\}$ est presque certain et alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) &= \mathbb{P}(Y=y) \qquad\qquad (\textit{cf. } \text{exercice 5 de la page 961})\\ &= \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).\end{aligned}$$

  * si $x \neq a$, alors l'événement $\{X = x\}$ est négligeable, et alors :

$$\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = 0 = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

  Dans tous les cas, on a donc $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$, donc X et Y sont indépendantes.

- Supposons que X ne soit pas constante presque sûrement. Cela signifie qu'il existe $(x_1, x_2) \in (\operatorname{Im} X)^2$ vérifiant $x_1 \neq x_2$ ainsi que :

$$\mathbb{P}(X=x_1) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=x_2) > 0.$$

Alors X n'est pas indépendante d'elle même car :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x_1\} \cap \{X=x_2\}\big) = 0 \neq \mathbb{P}(X=x_1)\,\mathbb{P}(X=x_2).$$

Proposition 11

- Un sens est évident car si l'on a :

$$\forall A \subset \operatorname{Im} X \quad \forall B \subset \operatorname{Im} Y \quad \mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B),$$

alors en exploitant cette propriété pour des singletons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on a :

$$\forall (x, y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y \quad \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y),$$

ce qui exprime précisément l'indépendance de X et Y.

- Réciproquement, supposons X et Y indépendantes. Soit $A \subset \operatorname{Im} X$ et $B \subset \operatorname{Im} Y$. On a :

$$\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \big(\{X = x\} \cap \{Y \in B\}\big).$$

La famille $\big(\{X = x\} \cap \{Y \in B\}\big)_{x \in A}$ étant une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, on a, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y \in B\}\big).$$

En écrivant alors, pour tout $x \in A$:

$$\{X = x\} \cap \{Y \in B\} = \bigcup_{y \in B} \big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)$$

et en utilisant à nouveau l'additivité dénombrable, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \sum_{x \in A} \left(\sum_{y \in B} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \right)$$

L'indépendance de X et Y, donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) &= \sum_{x \in A} \left(\sum_{y \in B} \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = y) \right) \\ &= \sum_{x \in A} \left(\mathbb{P}(X = x) \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y) \right) \\ &= \sum_{x \in A} \Big(\mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y \in B) \Big) \\ &= \left(\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \right) \mathbb{P}(Y \in B) \\ &= \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B), \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

Proposition 12 Supposons X et Y indépendantes. Soit f et g des fonctions définies respectivement sur $\operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Im} Y$. Pour $a \in \operatorname{Im} f(X)$ et $b \in \operatorname{Im} g(Y)$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\{f(X) = a\} \cap \{g(Y) = b\}\big) = \mathbb{P}\Big(\big\{X \in f^{-1}(\{a\})\big\} \cap \big\{Y \in g^{-1}(\{b\})\big\}\Big).$$

Comme X et Y sont indépendantes, la proposition 11 de la page 1008 donne :

$$\mathbb{P}\big(\{f(X) = a\} \cap \{g(Y) = b\}\big) = \underbrace{\mathbb{P}\Big(X \in f^{-1}(\{a\})\Big)}_{=\mathbb{P}\big(f(X)=a\big)} \underbrace{\mathbb{P}\Big(Y \in g^{-1}(\{b\})\Big)}_{=\mathbb{P}\big(g(Y)=b\big)},$$

d'où l'indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$.

Proposition 13

- Supposons X et Y indépendantes. Soit $y \in \operatorname{Im} Y$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.
  Pour tout $x \in \operatorname{Im} X$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big)}{\mathbb{P}(Y=y)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \qquad \text{(indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= \mathbb{P}(X = x).\end{aligned}$$

  Donc la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est la même que la loi de X.

- Réciproquement supposons que :

$$\forall y \in \operatorname{Im} Y \quad \mathbb{P}(Y=y) \neq 0 \Longrightarrow \big(\forall x \in \operatorname{Im} X \quad \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\big) \qquad (\star)$$

  et montrons que X et Y sont indépendantes.
  Soit $(x, y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$. Montrons que :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

  $*$ Si $\mathbb{P}(Y=y) = 0$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big) = 0 = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

  $*$ Si $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\big) &= \mathbb{P}(X=x \mid Y = y)\,\mathbb{P}(Y=y) \\ &= \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y). \qquad \text{d'après la propriété } (\star).\end{aligned}$$

  D'où le résultat.

Proposition 14 Soit $A_1 \subset \operatorname{Im} X_1, \ldots, A_n \subset \operatorname{Im} X_n$. On a :

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in A_k\} = \bigcup_{(x_1,\ldots,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n} \{X_1=x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n=x_n\}.$$

Puisque les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont au plus dénombrables (car ils sont inclus respectivement dans $\operatorname{Im} X_1, \ldots, \operatorname{Im} X_n$), leur produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_n$ l'est aussi.
La réunion précédente étant disjointe, on a, par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in A_k\}\Big) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n} \mathbb{P}\big(\{X_1=x_1\} \cdots \{X_n=x_n\}\big).$$

Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on a alors :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in A_k\}\Big) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n} \mathbb{P}(X_1=x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n=x_n).$$

Un calcul analogue à celui de la démonstration de la proposition 11 de la page 1008

permet alors d'aboutir à :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\in A_k\}\Big)=\Big(\sum_{x_1\in A_1}\mathbb{P}(X_1=x_1)\Big)\cdots\Big(\sum_{x_n\in A_n}\mathbb{P}(X_n=x_n)\Big)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k\in A_k).$$

Proposition 15 Soit $I\subset[\![1,n]\!]$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille telle que :

$$\forall i\in I\quad x_i\in\operatorname{Im}X_i.$$

Prouvons-que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i=x_i\}\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=x_i).$$

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la famille définie par :

$$\forall i\in I\quad A_i=\{x_i\}\qquad\text{et}\qquad\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus I\quad A_i=\operatorname{Im}X_i.$$

La proposition 14 de la page 1009 nous donne, par indépendance de $X_1,\dots,X_n$:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\in A_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\in A_i).\qquad(\star)$$

Par construction de la famille $(A_i)_{i\in I}$, on a :

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus I\quad\{X_i\in A_i\}=\Omega\quad\text{et}\quad\mathbb{P}(X_i\in A_i)=1$$

et

$$\forall i\in I\quad\{X_i\in A_i\}=\{X_i=x_i\}.$$

La relation $(\star)$ se simplifie donc pour donner le résultat souhaité :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i=x_i\}\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=x_i).$$

Exercice 6 Prouver que les événements $\{X_1\in A_1\},\dots,\{X_n\in A_n\}$ sont indépendants revient à montrer que pour tout $I\subset[\![1,n]\!]$ non vide, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in A_i\}\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\big(X_i\in A_i\big).$$

C'est une conséquence immédiate de l'indépendance des variables X_i pour $i\in I$ (assurée par la proposition 15 de la page 1009) et de la proposition 14 de la page 1009.

Corollaire 16 Il suffit d'appliquer la proposition 15 de la page 1009 aux sous-familles à deux éléments de la famille $(X_1,\dots,X_n)$.

Exercice 7

- Supposons que $\mathbb{1}_{A_1},\dots,\mathbb{1}_{A_n}$ sont indépendantes. Prouvons l'indépendance mutuelle des événements $A_1,\dots,A_n$.
  Pour cela, fixons $I\subset[\![1,n]\!]$ non vide et montrons que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i).$$

D'après la proposition 15 de la page 1009, la sous-famille $(\mathbb{1}_{A_i})_{i\in I}$ de $(\mathbb{1}_{A_1},\dots,\mathbb{1}_{A_n})$ est une famille de variables indépendantes. Donc, d'après la proposition 14 de la page 1009, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{\mathbb{1}_{A_i}=1\}\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i}=1),$$

ce qui donne la relation souhaitée puisque pour tout $i\in I$ on a $\{\mathbb{1}_{A_i}=1\}=A_i$.

- Supposons que les événements $A_1,\dots,A_n$ sont indépendants et montrons l'indépendance des variables $\mathbb{1}_{A_1},\dots,\mathbb{1}_{A_n}$. Fixons $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ et prouvons que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{\mathbb{1}_{A_k}=x_k\}\Big)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_k}=x_k).\qquad(\star)$$

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\{\mathbb{1}_{A_k}=x_k\}=\begin{cases}A_k & \text{si } x_k=1\\ \overline{A_k} & \text{si } x_k=0\end{cases}\qquad\text{donc en notant}\quad B_k=\begin{cases}A_k & \text{si}\quad x_k=1\\ \overline{A_k} & \text{si}\quad x_k=0,\end{cases}$$

la relation $(\star)$ se réécrit :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\Big)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k).$$

Cette relation est vérifiée puisque, les événements $A_1,\dots,A_n$ étant indépendants, il en est de même pour $B_1,\dots,B_n$ (c'est une conséquence de l'exercice 10 de la page 967).

Exercice 8 Pour $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Im}f_1(X_1)\times\dots\times\operatorname{Im}f_n(X_n)$, on a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad\{f_k(X_k)=x_k\}=\big\{X_k\in f_k^{-1}(\{x_k\})\big\},$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\big\{f_k(X_k)=x_k\big\}\Big)&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\big\{X_k\in f_k^{-1}\big(\{x_k\}\big)\big\}\Big)\\&=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\Big(X_k\in f_k^{-1}\big(\{x_k\}\big)\Big)\quad(\text{indépendance de } X_1,\dots,X_n)\\&=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\big(f_k(X_k)=x_k\big).\end{aligned}$$

D'où l'indépendance des variables $f(X_1),\dots,f(X_n)$.

Exercice 9 Soit $(y,x_3,\dots,x_n)\in\operatorname{Im}Y\times\operatorname{Im}X_3\times\cdots\operatorname{Im}X_n$. Montrons que :

$$\mathbb{P}\big(\{Y=y\}\cap\{X_3=x_3\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\big)=\mathbb{P}(Y=y)\prod_{k=3}^{n}\mathbb{P}(X_k=x_k).\qquad(\star)$$

Comme Y est le couple (X_1,X_2), l'élément $y\in\operatorname{Im}Y$ s'écrit :

$$y=(x_1,x_2)\quad\text{avec}\quad x_1\in\operatorname{Im}X_1\quad\text{et}\quad x_2\in\operatorname{Im}X_2.$$

On a alors :
$$\{Y=y\} = \{X_1=x_1\} \cap \{X_2=x_2\}$$
et par indépendance de X_1 et X_2 :
$$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X_1=x_1)\,\mathbb{P}(X_2=x_2).$$
La relation $(\star)$ que l'on cherche à obtenir est donc équivalente à :
$$\mathbb{P}\big(\{X=x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n=x_n\}\big) = \mathbb{P}(X=x_1)\,\mathbb{P}(X_2=x_2) \prod_{k=3}^{n} \mathbb{P}(X_k=x_k)$$
et cette dernière relation est vraie par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$.

Exercice 10 En appliquant le résultat de l'exercice 9 à la famille $(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4)$, on obtient l'indépendance des variables (X_1, X_2), X_3 et X_4. On sait que l'indépendance ne dépend pas de l'ordre des variables, on peut donc considérer la famille :
$$\big(X_3,\, X_4,\, (X_1, X_2)\big)$$
et le résultat de l'exercice 9 fournit alors l'indépendance des variables :
$$(X_3, X_4) \qquad \text{et} \qquad (X_1, X_2).$$
Alors, les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $X_3 X_4$ étant des fonctions respectivement des couples (X_1, X_2) et (X_3, X_4) le résultat de l'exercice 8 assure l'indépendance de $X_1 + X_2$ et $X_3 X_4$.

Exercice 11

1. • Tout d'abord, X prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, donc $\operatorname{Im} X$ est au plus dénombrable
   • Il reste à prouver que pour tout $x \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\{X = x\}$ est un événement.
   * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\{X=n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{U_k = 0\}\right) \cap \{U_n = 1\},$$
   c'est donc un événement comme intersection au plus dénombrable (finie, ici) d'événements.
   * D'autre part, par définition de X, la partie $\{X = \infty\}$ est un événement : c'est l'événement contraire de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X = n\}$ (qui est un événement car union dénombrable d'événements).

   Remarque : on peut aussi remarquer que $\{X = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{U_n = 0\}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\{X=n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{U_k = 0\}\right) \cap \{U_n = 1\}.$$
Par indépendance des variables U_k pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient :
$$\mathbb{P}(X=n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(U_k=0)\right) \mathbb{P}(U_n=1) = p\,(1-p)^{n-1}.$$

Par suite, on a :

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{n-1} = 1 \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(X=\infty) = 1 - \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = 0.$$

Par suite, X suit la loi géométrique de paramètre p.

Proposition 19

- Supposons que X suive une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.
  - ∗ Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n > 0$.
  - ∗ D'autre part, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) &= \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)}\\ &= \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k).\end{aligned}$$

- Réciproquement, supposons que X vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > n) \neq 0$$

ainsi que :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k). \qquad (\star)$$

Notons $\lambda = \mathbb{P}(X=1)$.

  - ∗ Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'hypothèse faite sur X permet de conditionner par $\{X > m-1\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > m) &= \mathbb{P}\big(\{X > m\} \cap \{X > m-1\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(X > m \mid X > m-1\big)\mathbb{P}\big(X > m-1\big)\end{aligned}$$

En appliquant la propriété $(\star)$ pour $(n,k) = (m-1,1)$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}(X > 1)\,\mathbb{P}(X > m-1) = (1-\lambda)\,\mathbb{P}(X > m-1).$$

La suite $\big(\mathbb{P}(X > m)\big)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $(1-\lambda)$ et l'on a :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > m) = (1-\lambda)^m.$$

puis, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = m) &= \mathbb{P}(X > m-1) - \mathbb{P}(X > m)\\ &= (1-\lambda)^{m-1} - (1-\lambda)^m\\ &= \lambda\,(1-\lambda)^{m-1}\end{aligned}$$

  - ∗ Pour conclure que X suit la loi géométrique de paramètre λ, il reste à prouver que $\lambda \in \,]0,1[$. Comme $\lambda = \mathbb{P}(X=1)$, on a déjà $\lambda \in [0,1]$. Il s'agit donc de prouver que $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$.
    - ⋆ Comme par hypothèse on a $\mathbb{P}(X > 2) > 0$, on a $\lambda = \mathbb{P}(X=1) < 1$.
    - ⋆ Si λ était nul, alors on aurait :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=m) = \lambda(1-\lambda)^{m-1} = 0 \quad \text{et alors} \quad \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=m) = 0,$$

ce qui est impossible car X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 12

Montrons que l'énoncé de cet exercice est équivalent à celui de la proposition 19 de la page 1012. Pour cela, montrons que, sous l'hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X > n) > 0,$$

la propriété $(\star)$ de la proposition 19 de la page 1012 :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k) \qquad (\star)$$

est équivalente à la propriété (Δ) de cet exercice :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X = k). \qquad (\Delta)$$

- Supposons $(\star)$ vérifiée. Soit $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X = n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > n+k-1 \mid X > n) - \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n)$$

  puis, en utilisant la propriété $(\star)$, on aboutit à (Δ) :

$$\mathbb{P}(X = n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X = k).$$

- Supposons (Δ) vérifiée. Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n+j \mid X > n)\\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) && \text{d'après } (\Delta)\\ &= \mathbb{P}(X > k),\end{aligned}$$

  ce qui montre la propriété $(\star)$.

Exercice 13 La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\{X > n\} = \{X_1 > n\} \cap \{X_2 > n\}$$

donc, par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\big(X_1 > n\big)\,\mathbb{P}\big(X_2 > n\big) = (1-p_1)^n\,(1-p_2)^n = \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^n.$$

Par suite, la variable X suit donc la loi géométrique de paramètre $1-(1-p_1)(1-p_2)$, ou encore $1-q_1q_2$ en notant $q_1 = 1-p_1$ et $q_2 = 1-p_2$.

Proposition 20 Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k\,(1-p_n)^{n-k}\\ &= \frac{1}{k!}\,\frac{n!}{(n-k)!}\,p_n^k\,(1-p_n)^{n-k}.\end{aligned}$$

On aura le résultat souhaité si l'on montre les deux limites suivantes :

$$(1-p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{n!}{(n-k)!}\,p_n^k \to \lambda^k.$$

Première limite. Puisque $n\,p_n \to \lambda$, on a $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$ et en particulier $p_n \to 0$.

On en déduit :

$$(n-k)\ln(1-p_n) \sim -(n-k)\,p_n \sim -(n-k)\,\frac{\lambda}{n} \sim -\lambda.$$

On a donc :

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$$

puis par continuité de l'exponentielle :

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\big((n-k)\ln(1-p_n)\big) \to e^{-\lambda}.$$

Deuxième limite. On a, par produit d'équivalents (remarquons que ce sont des équivalents quand $n \to +\infty$ que l'on manipule, et que dans les produits ci-dessous, le nombre de termes ne dépend pas de n puisqu'il y en a k qui est fixé) :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \sim n^k \qquad \text{et} \qquad p_n^k \sim \Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k.$$

On en déduit, toujours par produit d'équivalents :

$$\frac{n!\,p_n^k}{(n-k)!} \sim n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = \lambda^k,$$

ce qui donne la limite souhaitée :

$$\frac{n!\,p_n^k}{(n-k)!} \to \lambda^k.$$

Proposition 21 Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la variable $X+Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\{X+Y=n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{X=k\}\cap\{Y=n-k\}.$$

La réunion précédente étant disjointe, on a :

$$\mathbb{P}\big(X+Y=n\big) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=n-k\}\big)$$

et donc, par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X+Y=n\big) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\,e^{-\mu}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\,\mu^{n-k}\right)\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\\
&= (\lambda+\mu)^n\,\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\cdot \qquad \text{(formule du binôme)}
\end{aligned}$$

Donc $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

S'entraîner et approfondir

18.1 Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules : N_1 boules blanches et $N_2 = N - N_1$ boules noires. On tire sans remise n boules et on note X le nombre de boules blanches tirées.

Donner la loi de X.

Remarque En notant $p = \frac{N_1}{N}$, la loi de X est appelée **loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p)**. Elle est notée $\mathcal{H}(N, n, p)$.

18.2 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $1/2$. Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. $\{X = Y\}$;
2. $\{X < Y\}$.

18.3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Donner la loi de $|X - Y|$.

18.4 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi. On note $D = |X - Y|$ et $M = \min(X, Y)$.

1. On suppose que X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.
   (a) Déterminer la loi conjointe de D et M.
   (b) En déduire que les variables aléatoires D et M sont indépendantes.
2. Réciproquement, on suppose que D et M sont indépendantes.
   On suppose de plus que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) > 0.$$
   (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n + 1) = C\,\mathbb{P}(X = n).$$
   (b) En déduire qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que X (et donc Y) suit la loi géométrique de paramètre p.

18.5 On suppose que le nombre N de clients allant en caisse dans une période de temps donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin dispose de deux caisses, et chaque client se dirige au hasard et indépendamment des autres clients :

- vers la caisse 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$
- vers la caisse 2 avec probabilité $q = 1 - p$.

On note N_1 et N_2 le nombre de clients se présentant respectivement à la caisse 1 et à la caisse 2.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, quelle est la loi conditionnelle de N_1 sachant l'événement $\{N = n\}$?
   (b) Déterminer la loi de N_1.
2. Les variables N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

18.6 Soit X et Y deux variables aléatoires de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On suppose de plus X et Y indépendantes.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X+Y=n\}$.

18.7 On considère une suite de n convertisseurs numériques fonctionnant de manière indépendante et placés en série. Chaque convertisseur restitue correctement le bit qu'on lui fournit avec probabilité p et renvoie le bit opposé avec probabilité $1-p$, où $p \in [0,1]$. On note X_k le bit en sortie du k-ème convertisseur, X_0 étant le bit en entrée de chaîne. On pose

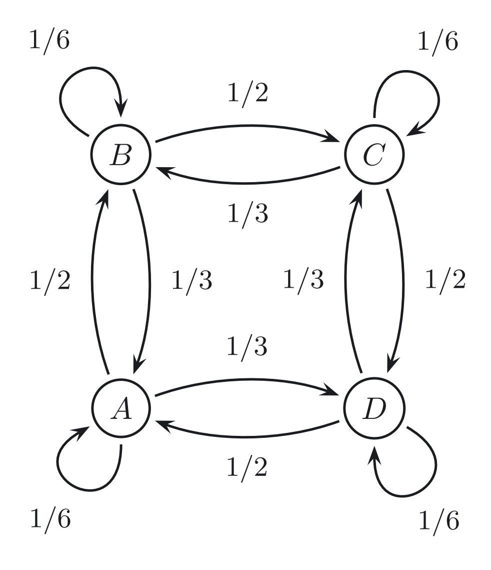
$$A_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 0) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation entre A_k et A_{k+1}.
2. En déduire la probabilité que le bit initial soit correctement rendu en sortie du n-ème convertisseur. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

18.8 1. Diagonaliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $ABCD$ un carré sur lequel on se déplace comme suit :

- si l'on se trouve en A à l'étape n, on va en B avec probabilité $1/2$, en D avec probabilité $1/3$ et on reste en A avec probabilité $1/6$;
- si l'on se trouve en B à l'étape n, on va en C avec probabilité $1/2$, en A avec probabilité $1/3$ et on reste en B avec probabilité $1/6$;
- si l'on se trouve en C à l'étape n, on va en D avec probabilité $1/2$, en B avec probabilité $1/3$ et on reste en C avec probabilité $1/6$;
- si l'on se trouve en D à l'étape n, on va en A avec probabilité $1/2$, en C avec probabilité $1/3$ et on reste en D avec probabilité $1/6$;



À l'instant initial, on est situé en A. On notant a_n la probabilité d'être en A à l'étape n, calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

18.9 Modélisation d'un flux d'arrivées

Cet exercice ne tient pas compte de la discussion de la page 1014 expliquant que la loi de Poisson permet de modéliser un flux d'arrivées. Il a pour objectif d'aboutir à la même conclusion.

On souhaite modéliser le nombre N d'appels reçus par un standard téléphonique entre 14h et 16h ; on suppose ne rien connaître sur la manière dont les appels arrivent au standard, si ce n'est qu'ils arrivent de manière aléatoire, indépendamment les uns de autres, selon un flux homogène dans le temps. Désignons par X et Y le nombre d'appels reçus respectivement entre 14h et 15h et entre 15h et 16h.

1. *Question qualitative.* Compte tenu de l'expérience aléatoire modélisée, expliquer pourquoi il est « naturel » de supposer que :
   - X et Y sont indépendantes et de même loi ;
   - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) \neq 0$;
   - pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on a :

   $$\mathbb{P}\big(X = k \mid N = n\big) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}. \qquad (\star)$$

   Pour la suite de l'exercice, on suppose ces propriétés vérifiées.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   En utilisant la relation $(\star)$ avec les deux couples $(k+1, k)$ et $(k+1, k+1)$, obtenir que :

   $$\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{1}{k+1} \times \frac{\mathbb{P}(Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 0)}.$$
3. En déduire que X suit une loi de Poisson.
4. Conclure finalement que N suit une loi de Poisson.

Solution des exercices

18.1 Pour modéliser l'expérience aléatoire considérée, distinguons une à une les boules de l'urne, par exemple en les numérotant :

$$B_1, \dots, B_{N_1}, N_1, \dots, N_{N_2}.$$

Tirer n boules sans remise revient à sélectionner une poignée de n boules parmi les $N_1 + N_2$ initialement présentes dans l'urne.

Prenons comme univers Ω l'ensemble de ces poignées de n boules. On a ainsi $\operatorname{card} \Omega = \binom{N_1+N_2}{n}$.

Les poignées étant toutes équiprobables, on munit Ω de la probabilité uniforme.

On voit facilement que $\operatorname{Im} X = [\![\max(0, n-N_2), \min(n, N_1)]\!]$.

Soit $x \in \operatorname{Im} X$. Puisque l'on a muni Ω de la probabilité uniforme, on a :

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{\operatorname{card}\{X=x\}}{\operatorname{card} \Omega}\cdot$$

On a déjà $\operatorname{card} \Omega = \binom{N_1+N_2}{n}$. Il reste à déterminer $\operatorname{card}\{X=x\}$.

Construire une poignée de n boules appartenant à l'événement $\{X = x\}$ revient à deux choix successifs :

- choisir une poignée de x boules parmi les N_1 boules blanches ; il y a $\binom{N_1}{x}$ choix ;
- choisir une poignée de $n-x$ boules parmi les N_2 boules noires ; il y a $\binom{N_2}{n-x}$ choix.

On obtient finalement :

$$\operatorname{card}\{X=x\} = \binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x} \qquad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N_1+N_2}{n}}\cdot$$

Remarque

Si l'on convient que le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est nul si $p < 0$ ou si $p > n$, alors l'expression obtenue pour $\mathbb{P}(X = x)$ est valable pour tout $x \in \mathbb{N}$ (et elle est nulle si $x \notin [\![\max(0, n-N_2), \min(n, N_1)]\!]$).

18.2 1. Écrivons l'événement $\{X = Y\}$ comme une réunion d'événements deux à deux incompatibles :

$$\{X = Y\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\big).$$

Par additivité dénombrable, on obtient :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\big)$$

puis, par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, \mathbb{P}(Y = n)$$

Comme X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\cdot$$

2. • **Première méthode.** De même, l'événement $\{X < Y\}$ s'écrit comme réunion d'événements deux à deux incompatibles :

$$\{X < Y\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X = n\} \cap \{Y > n\}.$$

Par additivité dénombrable puis par indépendance de X et Y, on a :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{Y > n\}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\,\mathbb{P}(Y > n).$$

Comme X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ce qui donne le même calcul qu'à la question 1 et mène à $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{3}\cdot$

Deuxième méthode. Remarquons que les événements :

$$\{X = Y\}\,, \qquad \{X < Y\} \qquad \text{et} \qquad \{X > Y\}$$

forment un système complet. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X > Y) = 1.$$

Par symétrie du problème en X et Y, on a $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Comme on sait déjà d'après la première question que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{3}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{3}\cdot$$

18.3 Notons $Z = |X - Y|$. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

• On a $\{Z = 0\} = \{X = Y\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X = n\} \cap \{Y = n\}$.

Les événements de la famille $\big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, on a par additivité dénombrable :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\big)$$

puis, par indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(p\,(1-p)^{n-1}\big)^2\\ &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^{n-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}\cdot\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\big\{Z=n\big\} = \big\{X-Y=n\big\} \cup \big\{Y-X=n\big\}$.
  Les deux événements $\big\{X-Y=n\big\}$ et $\big\{Y-X=n\big\}$ étant incompatibles, on a par additivité :

  $$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(X-Y=n) + \mathbb{P}(Y-X=n).$$

  Par symétrie du problème en X et Y, cela donne :

  $$\mathbb{P}(Z=n) = 2\,\mathbb{P}(X-Y=n).$$

  L'événement $\{X-Y=n\}$ s'écrit comme une réunion d'événements deux à deux incompatibles :

  $$\{X-Y=n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \big(\{X=n+k\} \cap \{Y=k\}\big).$$

  Par additivité dénombrable, puis par indépendance de X et Y, on obtient :

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=n+k\} \cap \{Y=k\}\big)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n+k)\,\mathbb{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{n+k-1}\,p\,(1-p)^{k-1}\\ &= p^2\,(1-p)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^{k-1}\\ &= p^2\,(1-p)^n\,\frac{1}{1-(1-p)^2}\\ &= \frac{p\,(1-p)^n}{2-p}\end{aligned}$$

  et donc finalement $\mathbb{P}(Z=n) = \dfrac{2\,p\,(1-p)^n}{2-p}\cdot$

18.4 1. (a) Les variables aléatoires D et M sont à valeurs respectivement dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$.

- Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\{(D,M)=(0,m)\} = \{X=m\} \cap \{Y=m\}$$
donc, par indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}\big((D,M)=(0,m)\big) = \mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(Y=m) = p^2\,q^{2m-2}.$$
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a :
$\{(D,M)=(d,m)\} = \big(\{X=m\} \cap \{Y=m+d\}\big) \cup \big(\{Y=m+d\} \cap \{X=m\}\big).$
Comme $d>0$, la réunion précédente est disjointe. On a donc par additivité et symétrie du problème en X et Y, puis par indépendance de X et Y :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((D,M)=(d,m)\big) &= 2\,\mathbb{P}\big(\{X=m\} \cap \{Y=m+d\}\big)\\ &= 2\,p^2\,q^{2m+d-2}\end{aligned}$$

(b)
- Constatons déjà que pour $m \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\{M=m\} = \big(\{X \geqslant m\} \cap \{Y \geqslant m\}\big) \setminus \big(\{X>m\} \cap \{Y>m\}\big).$$
donc :
$$\mathbb{P}(M=m) = \mathbb{P}\big(\{X \geqslant m\} \cap \{Y \geqslant m\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X>m\} \cap \{Y>m\}\big)$$
puis par indépendance de X et Y :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=m) &= \mathbb{P}(X \geqslant m)\,\mathbb{P}(Y \geqslant m) - \mathbb{P}(X>m)\,\mathbb{P}(Y>m)\\ &= q^{2m-2} - q^{2m}\\ &= p\,q^{2m-2}\,(1+q).\end{aligned}$$
- Pour obtenir l'indépendance de D et M, prouvons que :
$$\forall (d,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}\big(D=d \mid M=m\big) = \mathbb{P}(D=d). \qquad (\star)$$
Traitons séparément les cas $d=0$ et $d \in \mathbb{N}^*$.
  * Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=0 \mid M=m) &= \frac{P(\{D=0\} \cap \{M=m\})}{\mathbb{P}(M=m)}\\ &= \frac{p^2\,q^{2m-2}}{p\,q^{2m-2}(1+q)} = \frac{p}{1+q}.\end{aligned}$$
Le résultat obtenu ne dépendant pas de la valeur de m, on en déduit qu'il vaut aussi $\mathbb{P}(D=0)$, ce que l'on justifie par la formule des probabilités totales avec le système complet $\big(\{M=m\}\big)_{m \in \mathbb{N}^*}$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=0) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D=0 \mid M=m)\,\mathbb{P}(M=m)\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{p}{1+q}\,\mathbb{P}(M=m) = \frac{p}{1+q} \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M=m)}_{=1}.\end{aligned}$$

$*$ Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(D = d \mid M = m) = \frac{P(\{D = d\} \cap \{M = m\})}{\mathbb{P}(M = m)}$$
$$= \frac{2\,p^2\,q^{2m+d-2}}{p\,q^{2m-2}(1+q)} = \frac{2\,p\,q^d}{1+q}$$

et le résultat obtenu ne dépendant pas de m, on en déduit, comme au point précédent, qu'il vaut aussi $\mathbb{P}(D = d)$.

On a donc obtenu la propriété $(\star)$, ce qui prouve l'indépendance de D et M.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\{M = n\} \cap \{D = 0\} = \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

et

$$\{M = n\} \cap \{D = 1\} = \big(\{X = n\} \cap \{Y = n+1\}\big) \cup \big(\{X = n\} \cap \{Y = n+1\}\big).$$

Par indépendance de M et D d'une part, de X et Y d'autre part, et comme X et Y ont même loi, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(M = n)\,\mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = n)^2 \\ \mathbb{P}(M = n)\,\mathbb{P}(D = 1) = 2\,\mathbb{P}(X = n)\,\mathbb{P}(X = n+1). \end{cases}$$

Par hypothèse on a $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X = n+1) \neq 0$, donc les quantités $\mathbb{P}(M = n)$, $\mathbb{P}(D = 0)$ et $\mathbb{P}(D = 1)$ sont non nulles. En manipulant les deux relations ci-dessus, on aboutit alors à :

$$\mathbb{P}(X = n+1) = C\,\mathbb{P}(X = n) \quad \text{avec} \quad C = \frac{\mathbb{P}(D = 1)}{2\,\mathbb{P}(D = 0)}.$$

(b) D'après la question précédente, la suite $\big(\mathbb{P}(X = n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison C, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0)\,C^{n-1} > 0.$$

Comme X est une variable aléatoire, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, ce qui impose d'avoir $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - C$. Ainsi, on obtient que X suit une loi géométrique de paramètre $1 - C$.

18.5 1. (a) Compte tenu de l'énoncé, la loi conditionnelle de N_1 sachant l'événement $\{N = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n, p).

(b) Soit $n_1 \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $\big(\{N = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}(N_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_1 = k \mid N = n)\,\mathbb{P}(N = n).$$

D'après la question précédente, $\mathbb{P}(N_1 = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(N_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\, \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}$$

et le calcul se termine ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 = k) &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\, (p\,\lambda)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(q\,\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\, (p\,\lambda)^k\, e^{q\,\lambda} \\ &= \frac{(p\,\lambda)^k}{k!}\, e^{-p\,\lambda}.\end{aligned}$$

La variable aléatoire N_1 suit donc la loi de Poisson de paramètre $p\,\lambda\cdot$

2. Prouvons que N_1 et N_2 sont indépendantes en montrant que :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}\big(\{N_1 = k\} \cap \{N_2 = \ell\}\big) = \mathbb{P}(N_1 = k)\,\mathbb{P}(N_2 = \ell)$$

Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

- En échangeant les rôles de N_1 et N_2 dans la première question, on obtient que la variable aléatoire N_2 suit la loi de Poisson de paramètre $q\,\lambda$. On a donc :

$$\mathbb{P}(N_1 = k)\,\mathbb{P}(N_2 = \ell) = \frac{p^k\, q^\ell}{k!\,\ell!}\, \lambda^{k+\ell}\, e^{-\lambda}.$$

- D'autre part, on a :

$$\{N_1 = k\} \cap \{N_2 = \ell\} = \{N_1 = k\} \cap \{N = k+\ell\},$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{N_1 = k\} \cap \{N_2 = \ell\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{N_1 = k\} \cap \{N = k+\ell\}\big) \\ &= \mathbb{P}(N_1 = k \mid N = k+\ell)\, P(N = k+\ell)\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(N_1 = k \mid N = k+\ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell$, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{N_1 = k\} \cap \{N_2 = \ell\}\big) = \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell\, \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\, e^{-\lambda}$$

ce qui, après arrangement, est bien égal à $\mathbb{P}(N_1 = k)\,\mathbb{P}(N_2 = \ell)$.

D'où l'indépendance de N_1 et N_2.

18.6 On a :

$$\mathbb{P}(X = k \mid X+Y = n) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X+Y = n\})}{\mathbb{P}(X+Y = n)} \qquad (\star)$$

- Comme X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X+Y = n) = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\, e^{-(\lambda+\mu)}.$$

- D'autre part, on a :

$$\{X=k\} \cap \{X+Y=n\} = \{X=k\} \cap \{Y=n-k\}$$

donc, par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X+Y=n\}) &= \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}\;\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\,e^{-\mu}\\ &= \frac{\lambda^k\,\mu^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\,e^{-(\lambda+\mu)}\end{aligned}$$

On obtient, en repartant de la relation $(\star)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\lambda^k\,\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}\\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Donc la loi conditionnelle de X sachant $\{X+Y=n\}$ est la loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

18.7 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{X_k=1\},\{X_k=0\})$.

- Si les événements $\{X_k=1\}$ et $\{X_k=0\}$ ne sont pas négligeables, alors on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1}=1) &= \mathbb{P}(X_{k+1}=1 \mid X_k=1)\mathbb{P}(X_k=1) + \mathbb{P}(X_{k+1}=1 \mid X_k=0)\mathbb{P}(X_k=0)\\ &= p\,\mathbb{P}(X_k=1) + (1-p)\,\mathbb{P}(X_k=0).\end{aligned}$$

On constate que la relation précédente est toujours vraie si l'un des deux événements $\{X_k=1\}$ ou $\{X_k=0\}$ est négligeable.

- De la même manière on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=0) = (1-p)\,\mathbb{P}(X_k=1) + p\,\mathbb{P}(X_k=0).$$

Matriciellement cela se traduit par :

$$A_{k+1} = M\,A_k \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

2. Une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = M^n\,A_0.$$

- Si $p=1$, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_k = A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathbb{P}(X_n=1)=1$.
- Si $p=0$ alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

- Supposons $p \in]0,1[$. On a $\mathrm{sp}(M) = \{1, 2p-1\}$, avec comme vecteurs propres associés $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{2p-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Puisque $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(U_1 + U_{2p-1}\right)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\left(M^n U_1 + M^n U_{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(U_1 + (2p-1)^n\, U_{2p-1}\right). \end{aligned}$$

  et donc

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}\cdot$$

  Puisque $2p - 1 \in]0,1[$, on a $(2p-1)^n \to 0$ et donc $\mathbb{P}(X_n = 1) \to \frac{1}{2}\cdot$

18.8 1. On a $J^4 = I_4$, donc $\mathrm{sp}(J) \subset \{1, i, -1, -i\}$ (car $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de J). L'étude des espaces propres donne quatre droites propres et fournit une base (U_1, U_2, U_3, U_4) de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1, i, -1 et $-i$, avec :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; U_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \; U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad U_4 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on notera $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$ et $\lambda_4 = -i$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'événement « être en A à l'étape n ». Considérons de même les événements B_n, C_n et D_n, et posons :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_n = \mathbb{P}(A_n),\; b_n = \mathbb{P}(B_n),\; c_n = \mathbb{P}(C_n) \quad \text{et} \quad d_n = \mathbb{P}(D_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n, D_n) donne les relations :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{6} + \frac{b_n}{3} + \frac{d_n}{2} \qquad b_{n+1} = \frac{b_n}{6} + \frac{c_n}{3} + \frac{a_n}{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{6} + \frac{d_n}{3} + \frac{b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad d_{n+1} = \frac{d_n}{6} + \frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{2}$$

ce qui se traduit matriciellement par :

$$X_{n+1} = M\, X_n \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence immédiate, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On constate que :

$$M = \frac{1}{6}\big(I_4 + 2\,J + 3\,J^3\big).$$

La base (U_1, U_2, U_3, U_4) de vecteurs propres pour J est donc aussi une base de vecteurs propres pour M, avec comme valeurs propres associées :

$$\mu_k = \frac{1 + 2\lambda_k + 3\lambda_k^3}{6} \quad \text{avec} \quad k \in [\![1, 4]\!].$$

Par suite, si l'on décompose le vecteur X_0 dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) :

$$X_0 = \sum_{k=1}^{4} x_k U_k,$$

alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = M^n \Big(\sum_{k=1}^{4} x_k U_k, \Big) = \sum_{k=1}^{4} x_k\, M^n\, U_k = \sum_{k=1}^{4} x_k\, \mu_k^n\, U_k.$$

Compte tenu des valeurs des λ_k obtenues à la première question, on voit que pour $\mu_1 = 1$ et que pour $k \in [\![2, 4]\!]$ on a $|\mu_k| < 1$. On en déduit que :

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1 U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad a_n \to x_1.$$

La décomposition explicite du vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) donne $x_1 = \dfrac{1}{4}$. On conclut donc que $a_n \to \dfrac{1}{4}\cdot$

Remarque On a également $b_n \to \frac{1}{4}$, $c_n \to \frac{1}{4}$ et $d_n \to \frac{1}{4}$, ce qui signifie que pour n grand on est situé sur l'un des quatre sommets de manière à peu près équiprobable.

18.9 1. • Le flux étant supposé homogène dans le temps, il est naturel de supposer que X et Y ont même loi.

• Rien ne permet d'être sûr qu'il y aura au moins un appel et rien ne nous permet de majorer à l'avance le nombre d'appels reçus, d'où l'hypothèse :

$$\operatorname{Im} X = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) \neq 0.$$

• Les appels surviennent indépendamment les uns des autres et de manière homogène dans le temps, donc :

  ∗ le nombre d'appels reçus entre 15h et 16h ne donne donc aucune indication sur ce qui se passera entre 16h et 17h. Il est donc naturel de supposer X et Y indépendantes ;

- ∗ sachant qu'il y a eu n appels reçus en tout, on peut considérer que ces n appels, indépendamment les uns des autres, ont été passés entre 15h et 16h avec probabilité $\dfrac{1}{2}$; cela revient à dire que la conditionnelle de X sachant $\{N=n\}$ est la loi binomiale de paramètre $\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :
$$\mathbb{P}(X=k\mid N=k+1)=\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{k}=\frac{k+1}{2^{k+1}}\tag{1}$$
et
$$\mathbb{P}(X=k+1\mid N=k+1)=\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{k+1}=\frac{1}{2^{k+1}}\tag{2}$$
D'autre part, on a, en utilisant l'indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(X=k\mid N=k+1)=\frac{\mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=1\}\big)}{\mathbb{P}(N=k+1)}=\frac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=1)}{\mathbb{P}(N=k+1)}\tag{3}$$
et, de même :
$$\mathbb{P}(X=k+1\mid N=k+1)=\frac{\mathbb{P}(X=k+1)\,\mathbb{P}(Y=0)}{\mathbb{P}(N=k+1)}\cdot\tag{4}$$
Les relations (2) et (4) donnent :
$$\mathbb{P}(X=k+1)=\frac{1}{2^{k+1}}\times\frac{\mathbb{P}(N=k+1)}{\mathbb{P}(Y=0)}$$
et les relations (1) et (3) donnent :
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}\times\frac{\mathbb{P}(N=k+1)}{\mathbb{P}(Y=1)}\cdot$$
Le quotient des deux dernières relations donnent alors le résultat souhaité :
$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{1}{k+1}\times\frac{\mathbb{P}(Y=1)}{\mathbb{P}(Y=0)}\cdot$$

3. D'après la question précédente, en notant $\lambda=\dfrac{\mathbb{P}(Y=1)}{\mathbb{P}(Y=0)}$, on a :
$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \mathbb{P}(X=k+1)=\frac{\lambda}{k+1}\,\mathbb{P}(X=k)$$
et par suite :
$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathbb{P}(X=0).$$
Puisque $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$, on a nécessairement $\mathbb{P}(X=0)=e^{-\lambda}$.
Ainsi, X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

4. Les rôles de X et Y étant symétriques, on obtient que Y suit également une loi de Poisson (de paramètre λ). Par suite, puisque X et Y sont indépendantes, la variable $N=X+Y$ suit également une loi de Poisson (de paramètre 2λ).

Chapitre 19 : Variables aléatoires réelles discrètes

Variables aléatoires réelles discrètes

19

Sauf mention plus précise, les variables aléatoires considérées dans ce chapitre sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I Fonction de répartition

Définition 1

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x). \end{array}$$

Théorème 1

Soit X une variable réelle discrète. La fonction de répartition F_X est :

(i) croissante ;

(ii) continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;

(iii) on a de plus $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X = 1$.

Démonstration page 1058

Proposition 2

La fonction de répartition F_X d'une variable réelle discrète X caractérise la loi de X. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{x^-} F_X$$

Démonstration page 1059

Conséquence Les points de discontinuité de la fonction de répartition de X sont les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$ et dans ce cas, la « hauteur du saut » est $\mathbb{P}(X = x)$.

p.1059

Exercice 1 Tracer le graphe de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.

p.1059

Exercice 2 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables discrètes réelles indépendantes.

1. Exprimer, en fonction de $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$, la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire :
$$X = \max(X_1, \ldots, X_n).$$
2. Exprimer, en fonction de $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$, la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire :
$$Y = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Point méthode

Dans le cas où la variable aléatoire X est à valeurs entières, la fonction de répartition F_X est constante sur chaque intervalle $[n-1, n[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, et le résultat de la proposition précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X=n) &= F_X(n) - F_X(n-1) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1). \end{aligned}$$

Cette relation se révèle souvent efficace pour déterminer la loi de X lorsque X est définie comme un max ou un min d'autres variables aléatoires indépendantes.

p.1060

Exercice 3 Soit X_1, X_2 et X_3 trois variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (avec $n \geqslant 2$). On note $X = \max(X_1, X_2, X_3)$.
Déterminer la loi de X.

II Espérance

1 Définition

Définition 2 (Cas fini)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Supposons que $\operatorname{Im} X$ soit fini ; notons $N = \operatorname{card}(\operatorname{Im} X)$ et écrivons $\operatorname{Im} X = \{x_1, \ldots, x_N\}$.

On appelle **espérance** de X et l'on note $\mathbb{E}(X)$ le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{N} x_n \, \mathbb{P}(X = x_n).$$

Exemple Si A est un événement, alors on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$.

Définition 3 (Cas dénombrable)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.
Supposons que $\operatorname{Im} X$ soit dénombrable. Écrivons :

$$\operatorname{Im} X = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où les } x_n \text{ sont deux à deux distincts.}$$

On dit que X **admet une espérance** si la série $\sum x_n \, \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument ; dans ce cas, on appelle **espérance** de X, et l'on note $\mathbb{E}(X)$, le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, \mathbb{P}(X = x_n).$$

Terminologie Pour dire que X admet un espérance, on dit aussi que X est d'**espérance finie**.

Remarque Si X est à valeurs positives, alors la convergence absolue de la série $\sum x_n \, \mathbb{P}(X = x_n)$ est équivalente à sa convergence.

Exemple Si X est presque sûrement constante égale à x, *i.e.* vérifie $\mathbb{P}(X = x) = 1$, alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = x$.

p.1060 **Exercice 4** Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.

Montrer que X est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}\cdot$

p.1060 **Exercice 5** Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que X est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Remarque La définition 3 sous-entend le résultat non trivial suivant : la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ ne dépend pas de l'énumération de $\operatorname{Im} X$ choisie. C'est vrai sous l'hypothèse que la série considérée converge absolument (*cf.* exercice 9.19 de la page 486).
L'énumération de $\operatorname{Im} X$ choisie n'ayant pas d'importance, on s'autorise la notation suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

qui présente l'avantage d'être valable dans les deux cas : fini et dénombrable.

Remarque L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de la loi de X. Ainsi, si X et Y ont même loi, alors Y est d'espérance finie si, et seulement si, X l'est et l'on a alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 3

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge, et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Démonstration page 1061

Remarque Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\{X > n\} = \{X \geqslant n+1\} \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X \geqslant n+1).$$

La formule de la proposition précédente peut donc également s'écrire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

p.1062

Exercice 6 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer $\mathbb{E}\big(\max(X,Y)\big)$.

2 Formule de transfert

Le cas fini de la formule de transfert a déjà été vu en première année.

Théorème 4 (Formule de transfert, cas fini)

Soit X une variable aléatoire finie (*i.e.* $\operatorname{Im} X$ est fini).

Pour toute application $f : \operatorname{Im} X \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration page 1063

Théorème 5 (Formule de transfert, cas dénombrable)

Soit X une variable aléatoire discrète. Supposons que $\operatorname{Im} X$ soit dénombrable et écrivons :

$$\operatorname{Im} X = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où les } x_n \text{ sont deux à deux distincts.}$$

Étant donné $f : \operatorname{Im} X \to \mathbb{R}$ une application, la variable $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente, et l'on a alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, \mathbb{P}(X = x_n).$$

La démonstration est hors-programme.

À défaut d'une preuve rigoureuse, des explications sont données page 1063.

Remarque Dans la formule précédente, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ ne dépend pas de l'énumération de $\operatorname{Im} X$ choisie. On peut donc aussi écrire :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} f(x)\mathbb{P}(X = x),$$

ce qui présente l'avantage d'être valable à la fois dans le cas fini et dans le cas dénombrable.

Exemples

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La variable X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n^2\, \mathbb{P}(X = n)$ converge, et dans ce cas :
$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, \mathbb{P}(X = n).$$

2. Soit X et Y deux variables réelles définies sur un même espace probabilisé et telles que $|X| \leqslant Y$. On suppose Y d'espérance finie. Alors X est d'espérance finie.

   En effet, considérons la variable aléatoire $Z = (X, Y)$ et écrivons :
$$\operatorname{Im} Z = \big\{(x_n, y_n)\,;\ n \in \mathbb{N}\big\} \quad \text{où les } (x_n, y_n) \text{ sont deux à deux distincts.}$$

   - On a $Y = g(Z)$, où $g : (x, y) \mapsto y$.
     Comme Y est d'espérance finie et positive, le théorème de transfert donne la convergence de la série $\sum\limits_{n} y_n\, \mathbb{P}\big(Z = (x_n, y_n)\big)$.
   - Par hypothèse, on a $|x_n| \leqslant y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n} x_n\, \mathbb{P}\big(Z = (x_n, y_n)\big)$ converge absolument.

     En utilisant l'application $f : (x, y) \mapsto x$, le théorème de transfert nous dit que $X = f(Z)$ est d'espérance finie.

p.1064 **Exercice 7** Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$.

Justifier que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie et calculer cette espérance.

p.1064 **Exercice 8** *Cet exercice d'approfondissement a pour principal intérêt qu'il sera utilisé dans la démonstration de la linéarité de l'espérance (proposition 6).*

Supposons Ω dénombrable, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Écrivons :
$$\Omega = \{\omega_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{les } \omega_n \text{ étant deux à deux distincts.}$$
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.
Montrer que X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum X(\omega_n)\mathbb{P}(\{\omega_n\})$ converge absolument, et que l'on a alors :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X(\omega_n)\mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$
Indication : écrire $X = X \circ \operatorname{Id}_\Omega$ et utiliser le théorème de transfert.

3 Opérations algébriques sur l'espérance

Proposition 6 (Linéarité)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi que λ un réel. Si X et Y sont d'espérance finie, alors la variable $\lambda X + Y$ est également d'espérance finie et l'on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration hors-programme.

Nous proposons néanmoins une preuve page 1064.

Point méthode

Il arrive que la loi d'une variable aléatoire soit difficile à déterminer, mais que l'on accède facilement à son espérance en l'écrivant comme une somme de variables aléatoires plus simples (*cf.* exercices 9 et 10).

p.1065

Exercice 9 (Espérance d'une loi binomiale)

Soit X suivant une loi binomiale de paramètre (n, p). En utilisant une somme de variables de Bernoulli indépendantes, obtenir que $\mathbb{E}(X) = np$.

p.1066

Exercice 10 (Les rencontres)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement sans remise. Au k-ième tirage, on dit qu'il y a rencontre si l'on a tiré la boule numéro k. En notant X le nombre de rencontres observées lors de l'expérience, montrer que $\mathbb{E}(X) = 1$.

Proposition 7 (Positivité)

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et d'espérance finie. Alors on a $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$. De plus, on a $\mathbb{E}(X) = 0$ si, et seulement si, X est nulle presque sûrement.

Démonstration page 1067

Corollaire 8 (Croissance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X et Y sont d'espérance finie et si de plus on a $X \leqslant Y$, alors :

$$\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

avec égalité si, et seulement si, $X = Y$ presque sûrement.

Principe de démonstration. Démonstration page 1067

Appliquer le résultat précédent avec $Y - X$ et utiliser la linéarité de l'espérance.

Exemple Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé et telles que $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie. On a vu dans l'exemple 2 de la page 1046 que X est d'espérance finie. Les inégalités $-Y \leqslant X \leqslant Y$ donnent alors $\mathbb{E}(-Y) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$, ce qui prouve finalement l'inégalité $\left|\mathbb{E}(X)\right| \leqslant \mathbb{E}(Y)$ puisque $\mathbb{E}(-Y) = -\mathbb{E}(Y)$ par linéarité.

Proposition 9 (Produit de deux variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X et Y sont d'espérance finie et si de plus X et Y sont indépendantes, alors la variable XY est également d'espérance finie et l'on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration hors-programme. Nous donnons page 1067 quelques éléments de preuve.

Attention En général, ce n'est pas parce que X et Y sont d'espérance finie que la variable XY l'est !

p.1068 **Exercice 11** Trouver un exemple illustrant le « Attention » précédent.

III Variance, covariance, écart type

1 Moments d'une variable aléatoire

Définition 4

Soit X une variable aléatoire discrète et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment d'ordre p** si la variable aléatoire X^p est d'espérance finie.
Le **moment d'ordre p** est alors $\mathbb{E}(X^p)$.

Notation On note $\mathcal{L}_d^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *discrètes* et admettant un *moment d'ordre* p. Pour alléger les notations, cet ensemble sera simplement noté $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans la suite.
En particulier, $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne l'ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et d'espérance finie.

p.1068 **Exercice 12** Montrer que si $p \leqslant n$, alors $\mathcal{L}^n(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pourra chercher une majoration de $|X^p|$ à l'aide de $|X^n|$ et utiliser l'exemple 2 de la page 1046.

p.1068 **Exercice 13** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace vectoriel.

Indication : on pourra commencer par montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (a + b)^p \leqslant 2^p\,(a^p + b^p).$$

et utiliser l'exemple 2 de la page 1046.

Moment d'ordre 2

Proposition 10

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Si X admet un moment d'ordre deux, alors X est d'espérance finie

Principe de démonstration. C'est un cas particulier de l'exercice 12 de la page ci-contre.

Démonstration page 1069

Proposition 11

Si X et Y possèdent des moments d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie.

Principe de démonstration. Majorer $|XY|$ à l'aide de X^2 et Y^2.

Démonstration page 1069

Proposition 12

L'ensemble $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Principe de démonstration. C'est un cas particulier de l'exercice 13 de la page précédente.

Démonstration page 1069

2 Variance

Définition 5

Soit $X \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **variance** de X, et l'on note $\mathbb{V}(X)$, le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big].$$

Remarque D'après la définition précédente, pour pouvoir considérer la variance de X, il faut et il suffit que X admette un moment d'ordre 2.
Par suite, on dira indifféremment : « X admet un moment d'ordre 2 » et « X admet une variance ».

Proposition 13 (Formule de König-Huygens)

Si X possède une variance, alors on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Principe de démonstration. Développer l'expression de $\mathbb{V}(X)$. Démonstration page 1070

p.1070

Exercice 14 Soit X possédant une variance. Montrer que X est presque sûrement constante si, et seulement si, $\mathbb{V}(X) = 0$.

Proposition 14 (Transformation affine)

Pour X possédant une variance et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

Principe de démonstration. Développer et utiliser la linéarité de l'espérance.

Démonstration page 1070

Rappelons les variances des lois usuelles vues en première année :

- si X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors :
$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}\ ;$$
- si X suit une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, alors $Y = X+1-a$ suit une loi uniforme sur $[\![1,b-a+1]\!]$ et alors :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a+2)(b-a)}{12}\ ;$$
- si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, alors :
$$\mathbb{V}(X) = p\,(1-p)\ ;$$
- si X suit une loi binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$, alors :
$$\mathbb{V}(X) = n\,p\,(1-p).$$

p.1070

Exercice 15 Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Montrer que X admet une variance et que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}\cdot$

p.1071

Exercice 16 Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que X admet une variance et que $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

3 Covariance

Dans la suite, toutes les variables aléatoires considérées sont supposées discrètes, réelles, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 6

Soit X et Y possédant des variances. On appelle **covariance de X et Y**, et l'on note $\text{Cov}(X,Y)$, le réel défini par :

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big].$$

Remarque La proposition 11 de la page précédente justifie cette définition : en effet, si X et Y possèdent des variances, alors il en est de même pour les variables centrées associées $X-\mathbb{E}(X)$ et $Y-\mathbb{E}(Y)$, et donc, d'après la proposition 11 de la page précédente $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)$ est d'espérance finie.

Proposition 15

Soit X et Y possédant des variances. On a :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Principe de démonstration. Développer et utiliser la linéarité de l'espérance.

Démonstration page 1071

Corollaire 16

Soit X et Y possédant des variances. Si X et Y sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.

Démonstration. Si X et Y sont indépendantes, alors, d'après la proposition 9 de la page 1048 :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$. □

Remarque

Deux variables dont la covariance est nulle sont dites **décorrélées**. Deux variables indépendantes et possédant une variance sont donc décorrélées.

Attention La réciproque est fausse, comme le prouve l'exercice suivant.

p.1071

Exercice 17 (Variables décorrélées mais non indépendantes)

On jette un dé à quatre faces équiprobables numérotées -2, -1, 1 et 2.
On note X le résultat obtenu. Montrer que les variables aléatoires X et $|X|$ sont décorrélées mais ne sont pourtant pas indépendantes.

p.1072

Exercice 18 Montrer que la réciproque du corollaire 16 est vraie dans le cas particulier où X et Y sont des variables de Bernoulli.

Proposition 17

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive, ce qui signifie que l'on a les propriétés suivantes, pour X, Y, Z possédant une variance et a, b réels :

(i) *symétrie* : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$

(ii) *bilinéarité* : $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

$$\mathrm{Cov}(X,aY+bZ) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y) + b\,\mathrm{Cov}(X,Z)$$

(iii) *positivité* : $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

Démonstration page 1072

Remarque

La covariance n'est pas un produit scalaire puisqu'elle n'est pas définie positive. En effet, dire que $\mathrm{Cov}(X,X) = 0$ ne signifie pas que X est nulle, mais que X est constante presque sûrement (*cf.* exercice 14 de la page 1049).

Corollaire 18

Soit $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_p$ des variables possédant une variance, ainsi que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$. On a :

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i,\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j Y_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_i\,\mu_j \operatorname{Cov}(X_i, Y_j).$$

Démonstration. Immédiat par bilinéarité de la covariance. □

Remarque Si l'on note A la matrice de terme général $\operatorname{Cov}(X_i, Y_j)$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i,\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j Y_j\right) = {}^tU\,A\,V \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Corollaire 19

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables possédant une variance. On a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

Démonstration page 1072

Remarque Si l'on note A la matrice de terme général $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = {}^tU\,A\,U \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A s'appelle **matrice de covariance** de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$.

Corollaire 20

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables possédant une variance et deux à deux indépendantes, alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Démonstration page 1073

4 Écart type, coefficient de corrélation

Définition 7

Soit X possédant une variance. On appelle **écart type** de X le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 21 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit X et Y possédant une variance. On a :

$$\left|\operatorname{Cov}(X,Y)\right| \leqslant \sigma(X)\,\sigma(Y).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1073

Dans le cas où $\mathbb{V}(X) \neq 0$, considérer la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \mathbb{V}(\lambda X + Y)$.

Remarque Dans le cas où les variables aléatoires X et Y sont centrées, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left|\mathbb{E}(XY)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)} \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

p.1073 **Exercice 19 (Approfondissement : cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz)**

On reprend les notations de la proposition précédente. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la variable aléatoire $aX + bY$ soit constante presque sûrement.

Définition 8

Soit X et Y possédant une variance. Supposons que X et Y ne sont pas presque sûrement constantes, *i.e.* $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$.
On appelle **coefficient de corrélation de X et Y** le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\cdot$$

Remarques Sous les hypothèses de la définition précédente :

- il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\left|\rho(X,Y)\right| \leqslant 1$;
- si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X,Y) = 0$ (en revanche, la réciproque est fausse).

IV Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Théorème 22 (Inégalité de Markov)

Si X est une variable aléatoire discrète positive et d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$$

Principe de démonstration. Comparer les variables aléatoires $a\,\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$ et X.

Démonstration page 1074

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 23 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X possédant une variance. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\cdot$$

Principe de démonstration. Utiliser l'inégalité de Markov avec la variable $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$.

Démonstration page 1074

p.1074 **Exercice 20** Soit X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 2$.

Déterminer $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{3}{4}\cdot$

Applications

Proposition 24 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables possédant une variance, deux à deux indépendantes et de même loi. Notons :

$$m = \mathbb{E}(X_1), \quad \sigma = \sigma(X_1) \quad \text{ainsi que} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

et en particulier la limite suivante, appelée **loi faible des grands nombres** :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1074

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n/n.

Remarque Il est courant de noter

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n}\cdot$$

Ainsi, si $X_1, \ldots, X_n$ correspondent à des observations liées à une expérience aléatoire que l'on répète, alors $\overline{X_n}$ correspond à la moyenne de ces observations. On l'appelle **moyenne empirique**. La loi des grands nombres montre que cette moyenne empirique « s'approche » de l'espérance des variables aléatoires X_n.

p.1075 **Exercice 21** On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. On note Y_n la proportion, après n lancers, du nombre de piles obtenus par rapport au nombre de lancers effectués.

1. Exprimer Y_n à l'aide d'une somme de variables aléatoires « plus simples ».
2. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\frac{2}{5} \leqslant Y_n \leqslant \frac{3}{5}$ avec probabilité au moins $0{,}95$.

V Variables aléatoires à valeurs entières : fonctions génératrices

Définition 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **fonction génératrice** de X la fonction G_X définie, lorsque c'est possible, par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n.$$

Remarques

1. L'égalité $\mathbb{E}(t^X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n$ résulte de la formule de transfert.
2. La fonction génératrice G_X est la somme de la série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)\, t^n$ lorsque celle-ci converge *absolument*. En effet, l'existence de l'espérance dans la définition 9 signifie la convergence absolue de la série la définissant.
3. Si la variable X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors sa fonction génératrice G_X est polynomiale.
4. Il est immédiat de constater que G_X est définie en 1 et que

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1.$$

Proposition 25

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, la série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)\, z^n$:

(i) a un rayon de convergence au moins égal à 1 ;

(ii) converge normalement sur le disque fermé $D_f(0,1)$.

Démonstration page 1076

Corollaire 26

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

(i) le domaine de définition de G_X contient l'intervalle $[-1,1]$;

(ii) la fonction G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

Proposition 27

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est entièrement déterminée par sa fonction génératrice G_X.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration page 1076

Remarque En particulier, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.

Liens entre la fonction génératrice, espérance et variance

Théorème 28

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, on a :

$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X).$$

Démonstration (non exigible) page 1076

Théorème 29

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas, on a :

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

Démonstration (non exigible) page 1078

Conséquence Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

Fonctions génératrices des lois usuelles

p.1079

Exercice 22 Déterminer la fonction génératrice de X dans chacun des cas suivants :

1. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ;
2. X suit une loi binomiale de paramètre (n,p) ;
3. X suit une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ (avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a < b$) ;
4. X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$;
5. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Fonctions génératrices et variables indépendantes

Théorème 30

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que G_X et G_Y soient définies en t, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t).$$

Principe de démonstration. Utiliser la relation $G_X(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big)$.

Démonstration page 1080

p.1080 **Exercice 23** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. À l'aide des fonctions génératrices, montrer que :

1. si X et Y suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p) avec $(n,m,p) \in \mathbb{N}^2 \times [0,1]$, alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$;
2. si X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

VI Pour finir : récapitulatif sur les lois usuelles

On suppose $p \in]0,1[$ et l'on note $q = 1-p$.

Loi de X	$\operatorname{Im} X$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$	$G_X(t)$
$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\begin{cases} p \text{ si } k=1 \\ q \text{ si } k=0 \end{cases}$	p	$p\,q$	$pt+q$
$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$n\,p$	$n\,p\,q$	$(pt+q)^n$
$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{t}{n}\,\dfrac{1-t^n}{1-t} \quad (t \neq 1)$
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q\,p^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-q\,t}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Théorème 1

- **Croissance.** Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_1 \leqslant x_2$, on a :
$$\{X \leqslant x_1\} \subset \{X \leqslant x_2\},$$
donc, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$. D'où la croissance de F_X.

- **Continuité à droite en tout point.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que F_X est continue à droite au point x. Comme elle est croissante, F_X possède une limite à droite au point x. Par composition de limites, on a :
$$\lim_{x^+} F_X = \lim_{n \to +\infty} F_X(x_n) \quad \text{avec} \quad x_n = x + \frac{1}{n}\cdot$$
Il s'agit donc de montrer que :
$$F_X(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} F_X(x).$$
La suite $\big(\{X \leqslant x_n\}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) et vérifie :
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X \leqslant x_n\} = \{X \leqslant x\}.$$
Donc par continuité décroissante de $\mathbb{P}$ (*cf.* la proposition 3 de la page 960) on obtient :
$$\mathbb{P}(X \leqslant x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \leqslant x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad F_X(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} F_X(x).$$
D'où la continuité à droite de F_X en x.

- **Limites en $-\infty$ et $+\infty$.** Comme elle est croissante, la fonction F_X possède des limites en $-\infty$ et $+\infty$. Par composition, ces limites sont données par :
$$\lim_{+\infty} F_X = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) \qquad \text{et} \qquad \lim_{-\infty} F_X = \lim_{n \to +\infty} F_X(-n).$$
  * La suite $\big(\{X \leqslant n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements et vérifie :
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leqslant n\} = \Omega.$$
Par continuité croissante de $\mathbb{P}$, on obtient alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{X \leqslant k\}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad F_X(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$
On a donc $\lim_{+\infty} F_X = 1$.
  * La suite $\big(\{X \leqslant -n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements et vérifie :
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leqslant -n\} = \varnothing.$$
Par continuité décroissante de $\mathbb{P}$, on obtient alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{X \leqslant -k\}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad F_X(-n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On a donc $\lim_{-\infty} F_X = 0$.

Proposition 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme elle est monotone, la fonction F_X possède une limite à gauche au point x. Par composition, on a :

$$\lim_{x^-} F_X = \lim_{n \to +\infty} F_X(x_n) \quad \text{avec} \quad x_n = x - \frac{1}{n}.$$

Alors, la suite $\big(\{X \leqslant x_n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements vérifiant :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leqslant x_n\} = \{X < x\}.$$

Donc, par continuité croissante, on a :

$$F_X(x_n) = \mathbb{P}(X \leqslant x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X < x) \qquad \textit{i.e.} \qquad \lim_{x^-} F_X = \mathbb{P}(X < x).$$

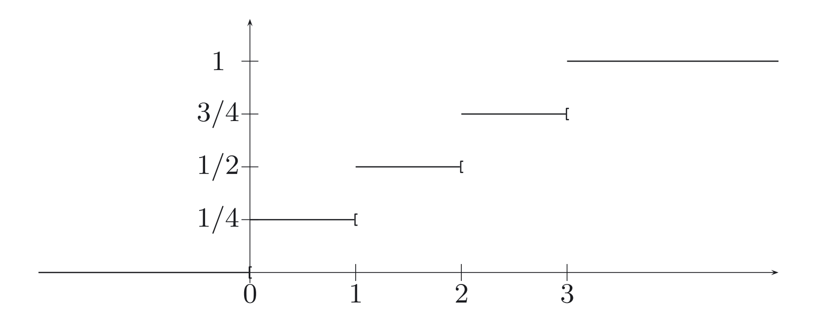
On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - \lim_{x^-} F_X.$$

Exercice 1

Si X suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0,3 \rrbracket)$, alors on a, pour tout $n \in \llbracket 0,3 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{4}\cdot$

On obtient le graphe suivant pour la fonction de répartition de X :



Exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\big\{X \leqslant x\big\} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \big\{X_k \leqslant x\big\}$ et donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}\big(X \leqslant x\big) = \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leqslant x\}\bigg).$$

Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on obtient :

$$F_X(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(X_k \leqslant x\big) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\big\{Y \leqslant x\big\}} = \big\{Y > x\big\} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \big\{X_k > x\big\}$ et donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{k=1}^{n} \big\{X_k > x\big\}\bigg).$$

Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on en déduit :

$$F_Y(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(X_k > x\big) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \big(1 - F_{X_k}(x)\big).$$

Exercice 3 On a $\operatorname{Im} X = [\![1, n]\!]$. Soit $x \in [\![1, n]\!]$.

Comme X est à valeurs entières, on a :

$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \leqslant x-1).$$

Pour tout $y \in [\![0, n]\!]$, on a $\{X \leqslant y\} = \{X_1 \leqslant y\} \cap \{X_2 \leqslant y\} \cap \{X_3 \leqslant y\}$.

Comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et de même loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \leqslant y) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant y)^3 = \left(\frac{y}{n}\right)^3.$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{P}(X=x) = \left(\frac{x}{n}\right)^3 - \left(\frac{x-1}{n}\right)^3.$$

Exercice 4 Comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $n\,\mathbb{P}(X=n) = n\,p\,(1-p)^{n-1}$.

Comme $p \in]0, 1[$, on a $|1-p| < 1$, donc la série $\sum n\,p\,(1-p)^{n-1}$ converge absolument (règle de d'Alembert). La variable X est donc d'espérance finie et l'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p\,(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1}$$

En dérivant terme à terme le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1}.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\big(1-(1-p)\big)^2} = \frac{1}{p}\cdot$$

Exercice 5 Si l'on note $u_n = n\,\mathbb{P}(X=n)$, on a, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = n\,\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\,e^{-\lambda} \quad \text{puis} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.

La variable X est donc d'espérance finie et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} &= \lambda\,e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \lambda\,e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\,e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Proposition 3

- Remarquons tout d'abord que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \geqslant \sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(X = k),$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant n) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k).$$

Si X n'est pas d'espérance finie, alors la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ diverge et donc, comme il s'agit d'une série à termes positifs, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X = n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

L'inégalité obtenue précédemment donne alors $\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ diverge.

- Réciproquement, supposons que X est espérance finie, ce qui revient à la convergence de la série $\sum n\,\mathbb{P}(X = n)$.

  * Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=0}^{N} n\big(\mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X \geqslant n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)\mathbb{P}(X \geqslant n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N+1} n\,\mathbb{P}(X \geqslant n) + \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant n) \\
&= -(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) + \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant n).
\end{aligned}$$

  On a donc :

$$\sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}(X = n)}_{\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)} + (N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1). \qquad (\Delta)$$

* Pour $N \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum n\mathbb{P}(X=n)$ étant convergente, on a :

$$\begin{aligned}(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) &= (N+1) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} (N+1)\mathbb{P}(X=n) \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)\end{aligned}$$

Le majorant ci-dessus étant le reste d'ordre N de la série $\sum n\mathbb{P}(X=n)$, il tend vers 0 quand $N \to +\infty$. On a donc :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

* La relation (Δ) assure alors la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ et l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{E}(X).$$

Exercice 6 Notons $Z = \max(X, Y)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\{Z \geqslant n\} = \overline{\{Z < n\}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geqslant n) &= 1 - \mathbb{P}(Z < n) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big(\{X < n\} \cap \{Y < n\}\big)\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance de X et Y, puis le fait qu'elles suivent la loi géométrique de paramètre p, on obtient, en notant $q = 1 - p$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geqslant n) &= 1 - \mathbb{P}(X < n)\,\mathbb{P}(Y < n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < n)^2 \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ &= 1 - \big(1 - q^{n-1}\big)^2 \\ &= 2q^{n-1} - \big(q^{n-1}\big)^2.\end{aligned}$$

Comme $p \in]0,1[$, on a $q \in]0,1[$, donc la série $\sum \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ converge.
Donc, d'après la proposition 3 de la page 1045, Z est d'espérance finie et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (q^2)^{n-1} \\ &= \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{1+2q}{1-q^2}.\end{aligned}$$

Théorème 4 Par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} y\, \mathbb{P}\big(f(X) = y\big). \tag{$\star$}$$

Pour tout $y \in \operatorname{Im} f(X)$, l'événement $\{f(X) = y\}$ s'écrit comme réunion disjointe :

$$\{f(X) = y\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}$$

donc, par additivité :

$$\mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

La relation $(\star)$ donne alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(f(X)\big) &= \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \Bigg(y \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) \Bigg) \\
&= \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \; \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} y\, \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \; \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} f(x)\, \mathbb{P}(X = x). \qquad (\star\star)
\end{aligned}$$

Puisque, lorsque y décrit $\operatorname{Im} f(X)$, les $f^{-1}(\{y\})$ sont des parties deux à deux disjointes dont la réunion vaut $\operatorname{Im} X$, on a :

$$\sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \; \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} f(x)\, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

La relation $(\star\star)$ précédente donne donc la formule souhaitée :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Théorème 5 Nous ne donnons pas ici de démonstration rigoureuse de la formule de transfert, mais mettons le doigt sur les difficultés techniques qui se présentent lorsque l'on cherche à l'obtenir.

Supposons que toutes les sommes manipulées convergent absolument, et tentons d'obtenir la formule de transfert énoncée par le théorème. L'espérance de $f(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} y\, \mathbb{P}\big(f(X) = y)\big) \tag{$\star$}$$

qui est la même relation $(\star)$ que celle de la démonstration du cas fini. Les mêmes manipulations que dans le cas fini permettent alors d'aboutir à la relation $(\star\star)$:

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \; \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} f(x)\, \mathbb{P}(X = x). \tag{$\star\star$}$$

Comme dans le cas fini, on remarque que, lorsque y décrit $\operatorname{Im} f(X)$, les $f^{-1}(\{y\})$ sont des parties deux à deux disjointes dont la réunion vaut $\operatorname{Im} X$. Il est alors très tentant d'affirmer que :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} f(x)\, \mathbb{P}(X = x), \tag{$\Diamond$}$$

ce qui, en notant $\operatorname{Im} X = \{x_n\,;\; n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n deux à deux distincts, donne la formule de transfert annoncée :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\,\mathbb{P}(X = x_n).$$

C'est précisément le passage de $(\star\star)$ à $(\lozenge)$ qui soulève une difficulté technique car, contrairement au cas fini, les sommes manipulées sont *infinies*.
La somme $\displaystyle\sum_{y \in \operatorname{Im} f(X)} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})}$ est en effet une *somme double infinie* et l'on ne dispose, dans le programme de PC, d'aucun théorème permettant de manipuler rigoureusement de telles sommes. Cela explique pourquoi cette démonstration est hors-programme.

Exercice 7 On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(X=n) \leqslant \mathbb{P}(X=n).$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge, on en déduit, par comparaison, la convergence de la série $\sum \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(X=n)$. Donc $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.
Le théorème de transfert donne de plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\frac{1}{X}\Big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(X=n) \\
&= p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{n-1}}{n} && \text{(en notant } q = 1-p\text{)} \\
&= -\frac{p}{q}\,\ln(1-q). && \text{(développement en série entière de } u \mapsto \ln(1-u)\text{)} \\
&= -\frac{p}{q}\,\ln p.
\end{aligned}$$

Exercice 8 L'application $\operatorname{Id}_\Omega : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \omega & \longmapsto & \omega \end{array}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

En effet :

- son image $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_\Omega)$ vaut Ω donc est dénombrable,
- pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\operatorname{Id}_\Omega^{-1}(\{\omega\}) = \{\omega\}$, qui est un événement car Ω a été muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

En écrivant $X = X \circ \operatorname{Id}_\Omega$, le théorème de transfert indique alors que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum X(\omega_n)\mathbb{P}(\{\omega_n\})$ converge, et que l'on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X(\omega_n)\mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

Proposition 6 La démonstration est hors-programme. Proposons-en tout de même une.

Supposons X et Y d'espérance finie.

- Le cas où Ω est fini a déjà été vu en première année.

- Traitons le cas où Ω est dénombrable ; écrivons $\Omega = \{\omega_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$, les ω_n étant deux à deux distincts. Comme X et Y sont d'espérances finies, le résultat de l'exercice 8 de la page 1046 assure que les séries :

$$\sum X(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\}) \qquad \text{et} \qquad \sum Y(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\})$$

  convergent absolument, et donc il en est de même pour la série :

$$\sum (\lambda X + Y)(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

  Toujours d'après l'exercice 8, la variable $\lambda X + Y$ est donc d'espérance finie et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda X + Y)(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\})\\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} X(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} Y(\omega_n)\,\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

- Le cas général se ramène au cas où Ω est dénombrable. En effet, on sait que toute loi de probabilité discrète peut être vue comme la loi d'une variable aléatoire, et plus précisément, d'après la démonstration de cette même proposition, on peut même imposer que l'univers associé soit dénombrable. Dans notre cas, cela assure l'existence d'une variable aléatoire Z, définie sur un univers dénombrable $\widetilde{\Omega}$, ayant même loi que le couple (X, Y). Alors, en considérant les applications :

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

  et en notant $\widetilde{X} = \pi_1(Z)$ et $\widetilde{Y} = \pi_2(Z)$, les variables aléatoire $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\lambda\widetilde{X} + \widetilde{Y}$ ont même loi que X, Y et $\lambda X + Y$ respectivement.
  Le cas d'un univers dénombrable ayant déjà été traité, on peut l'appliquer aux variables $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ et affirmer que la variable $\lambda\widetilde{X} + \widetilde{Y}$ est d'espérance finie et que :

$$\mathbb{E}(\lambda\,\widetilde{X} + \widetilde{Y}) = \lambda\,\mathbb{E}(\widetilde{X}) + \mathbb{E}(\widetilde{Y})$$

  Donc, comme l'espérance ne dépend que de la loi, la variable $\lambda\,X + Y$ est d'espérance finie et l'on a :

$$\mathbb{E}(\lambda\,X + Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Exercice 9 On sait que l'on obtient une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ en sommant n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Plus précisément, si $B_1, \ldots, B_n$ sont des variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, alors la variable :

$$Y = B_1 + \cdots + B_n$$

suit une loi binomiale de paramètre (n,p). Comme de plus que l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p vaut p, on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

Comme enfin on sait que l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi, on en déduit $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = np$.

Attention Dans le raisonnement précédent a été introduite une nouvelle variable aléatoire Y, et il aurait été incorrect de décomposer directement la variable aléatoire X comme une somme de variables de Bernoulli indépendantes. En effet, une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ ne peut pas toujours s'écrire comme une somme de n variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Justifions-le :

- une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ prend $n+1$ valeurs distinctes ; il est donc possible de définir une telle variable aléatoire sur un univers Ω de cardinal $n+1$;
- en revanche, si Ω est un univers permettant de définir n variables $B_1,\dots,B_n$ indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$, alors, en considérant l'application :
$$\begin{array}{rccl} Z: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\}^n \\ & \omega & \longmapsto & \big(B_1(\omega),\dots,B_n(\omega)\big) \end{array}$$
on montre que $\operatorname{Im} Z = \{0,1\}^n$ (par indépendance de $B_1,\dots,B_n$, on obtient que tout élément de $\{0,1\}^n$ est atteint par Z avec probabilité non nulle), donc :
$$\operatorname{card}\big(\operatorname{Im} Z\big) = 2^n \quad \text{et donc} \quad \operatorname{card}(\Omega) \geqslant 2^n > n+1 \quad \text{dès que } n \geqslant 2.$$

Exercice 10 Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons X_k la variable indicatrice de l'événement :
$$R_k \ : \ \text{« il y a rencontre au } k\text{-ième tirage ».}$$
Les variables $X_1,\dots,X_n$ sont ainsi des variables aléatoires de Bernoulli, et l'on a :
$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Donc, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$.

Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Comme $X_k = \mathbb{1}_{R_k}$, on a :
$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}(R_k).$$
Compte tenu de l'expérience aléatoire réalisée, il est naturel de penser que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées au k-ième tirage, et donc en particulier $\mathbb{P}(R_k) = \dfrac{1}{n}$. On obtient alors :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Remarque Si l'on souhaite justifier plus formellement que $\mathbb{P}(R_k) = \dfrac{1}{n}$, on peut prendre comme univers Ω l'ensemble des n-listes d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$, que l'on munit de la probabilité uniforme (chaque élément de Ω correspond à une réalisation de l'expérience : la liste des numéros observés dans l'ordre d'apparition).
On a alors :
$$R_k = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \Omega \mid x_k = k\big\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card}(R_k) = (n-1)!$$
On en déduit que $\mathbb{P}(R_k) = \dfrac{\operatorname{card}(R_k)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}\cdot$

Proposition 7

Par définition, on a $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x\in\operatorname{Im}X} x\,\mathbb{P}(X=x)$, où cette somme est finie ou infinie suivant que Ω est fini ou dénombrable.

Une somme (finie ou infinie) de termes positifs est positive, et elle est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On en déduit d'une part que $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ et d'autre part que $\mathbb{E}(X) = 0$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \quad x\,\mathbb{P}(X=x) = 0,$$

ce qui revient à dire :

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}(X=x) = 0,$$

ou encore $\mathbb{P}(X=0) = 1$.

Corollaire 8 Supposons $X \leqslant Y$. Alors la variable $Y - X$ est positive. On en déduit, d'après la proposition 7 de la page 1047, que $\mathbb{E}(Y-X) \geqslant 0$. Par linéarité de l'espérance, il en résulte que :

$$\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

De plus, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ si, et seulement si, $\mathbb{E}(Y-X) = 0$, c'est-à-dire, d'après la proposition 7 de la page 1047, si, et seulement si, $Y - X$ est nulle presque sûrement, c'est-à-dire $X = Y$ presque sûrement.

Proposition 9 La démonstration est hors-programme. Comme pour le théorème de transfert, faisons la preuve dans le cas où X et Y prennent un nombre fini de valeurs, et expliquons quelles difficultés se présentent lorsque l'on s'attaque au cas général (comme pour le théorème de transfert, ce sont des problèmes de manipulation de sommes infinies).

- **Preuve dans le cas fini.** Supposons que X et Y prennent un nombre fini de valeurs (*i.e.* $\operatorname{Im} X$ et $\operatorname{Im} Y$ sont des parties finies de $\mathbb{R}$). Notons $Z = XY$.

  Puisque $\operatorname{Im} Z \subset \big\{x\,y\,;\ (x,y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y\big\}$, la variable Z prend elle aussi un nombre fini de valeurs. Les variables X, Y et Z sont donc évidemment d'espérance finie. Il s'agit donc simplement prouver la relation $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

  En écrivant $Z = \varphi((X,Y))$ avec $\varphi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

  le théorème de transfert donne :

  $$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x,y)\in\operatorname{Im} X\times\operatorname{Im} Y} x\,y\,\mathbb{P}\big((X,Y) = (x,y)\big).$$

  Par indépendance de X et Y puis par manipulation de sommes *finies*, on obtient le résultat :

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{(x,y)\in\operatorname{Im} X\times\operatorname{Im} Y} x\,\mathbb{P}(X=x)\,y\,\mathbb{P}(Y=y) \qquad (1)\\ &= \left(\sum_{x\in\operatorname{Im} X} x\,\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in\operatorname{Im} Y} y\,\mathbb{P}(Y=y)\right) \qquad (2)\\ &= \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

- **Cas infini.** Lorsque $\operatorname{Im} X$ et/ou $\operatorname{Im} Y$ ne sont pas finis (*i.e.* sont dénombrables), l'idée du raisonnement précédent reste intuitivement correcte, mais une difficulté technique majeure se présente lors du passage entre les relations (1) et (2) précédentes ; ce passage sous-entend qu'il revient au même d'écrire :

$$\sum_{(x,y)\in \operatorname{Im} X\times \operatorname{Im} Y} \qquad \text{et} \qquad \sum_{x\in \operatorname{Im} X}\ \sum_{y\in \operatorname{Im} Y}$$

ce qui revient transformer une somme indexée par un produit cartésien d'ensembles dénombrables à une somme double infinie. Mis à part le fait qu'il y a des problèmes de convergence de sommes à étudier, une telle transformation n'a rien d'évident.
Le programme de PC n'offre aucun théorème permettant de faire cette manipulation rigoureusement.

Exercice 11 Exhibons une variable aléatoire X telle que X soit d'espérance finie mais pas X^2. Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{\alpha}{n^3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right)^{-1}.$$

Alors, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n\,\mathbb{P}(X=n) = \frac{\alpha}{n^2} \quad \text{et} \quad n^2\,\mathbb{P}(X=n) = \frac{\alpha}{n}\cdot$$

Par suite, la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge, donc X est d'espérance finie, mais la série $\sum n^2\,\mathbb{P}(X=n)$ diverge, donc, d'après le théorème de transfert, X^2 n'est pas d'espérance finie.

Exercice 12 Supposons $p \leqslant n$. Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Constatons que l'on a la majoration suivante :

$$|X^p| \leqslant 1 + |X^n|.$$

En effet, pour $\omega \in \Omega$:

- si $|X(\omega)| \leqslant 1$, alors $\left|X(\omega)^p\right| \leqslant 1 \leqslant 1 + \left|X(\omega)^n\right|$;
- si $|X(\omega)| > 1$, alors $\left|X(\omega)^p\right| \leqslant \left|X(\omega)^n\right| \leqslant 1 + \left|X(\omega)^n\right|$.

Si X appartient à $\mathcal{L}^n(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la variable X^n est d'espérance finie et donc $1+|X^n|$ aussi par linéarité. L'exemple l'exemple 2 de la page 1046 assure alors que $|X^p|$ est d'espérance finie, *i.e.* $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 13

- La variable aléatoire nulle appartient à $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- *Stabilité par combinaisons linéaires.* Soit $(X,Y) \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Admettons pour l'instant l'inégalité suggérée par l'indication :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (a+b)^p \leqslant 2^p\,(a^p + b^p). \qquad (\star)$$

On a :

$$\begin{aligned} \left|(\lambda X + Y)^p\right| &\leqslant \big(|\lambda X| + |Y|\big)^p \\ &\leqslant 2^p\,\big(|\lambda|^p\,|X|^p + |Y|^p\big) \qquad \text{(d'après l'inégalité } (\star)) \end{aligned}$$

Comme X et Y appartiennent à $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, les variables $|X|^p$ et $|Y|^p$ sont d'espérance finie. Par linéarité, la variable $2^p\left(|\lambda|^p\,|X|^p+|Y|^p\right)$ l'est donc également. L'inégalité précédente assure donc, via l'exemple 2 de la page 1046, que la variable $(\lambda\,X+Y)^p$ est d'espérance finie, *i.e.* $\lambda\,X+Y\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

- *Preuve de l'inégalité* $(\star)$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$. On a, d'après la formule du binôme :

$$(a+b)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\,a^k\,b^{p-k}.$$

Pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, on a :

$$a^k\,b^{p-k}\leqslant\max\left(a^p,\,b^p\right)\leqslant a^p+b^p.$$

Il en résulte que :

$$(a+b)^p\leqslant\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\right)(a^p+b^p)=2^p\,(a^p+b^p).$$

Proposition 10 Constatons qu'on a la majoration suivante :

$$|X|\leqslant 1+X^2.$$

Si X^2 est d'espérance finie, alors, par linéarité, $1+X^2$ l'est également et donc, d'après l'exemple 2 de la page 1046, X à son tour est d'espérance finie.

Proposition 11 On a :

$$\left(|X|-|Y|\right)^2=X^2+Y^2-2|X|\,|Y|\geqslant 0$$

et donc :

$$|XY|\leqslant\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2\right).$$

Si X et Y possèdent des moments d'ordre 2, alors X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, et l'inégalité précédente assure alors que XY est d'espérance finie (vial'exemple l'exemple 2 de la page 1046).

Proposition 12 L'application nulle est évidemment une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Il reste à vérifier la stabilité par combinaisons linéaires.
Soit $(X,Y)\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$(\lambda X+Y)^2=\lambda^2\,X^2+2\lambda XY+Y^2.$$

- Comme $X\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, X^2 est d'espérance finie.
- De même, $Y\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ donc Y^2 est d'espérance finie.
- Comme $X\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $Y\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, la proposition 11 de la page 1049 assure que XY est d'espérance finie.

Donc, par combinaison linéaire, la variable $(\lambda X+Y)^2$ est d'espérance finie, autrement dit $\lambda X+Y\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Proposition 13 Si X possède une variance, alors X admet une espérance (d'après la proposition 10 de la page 1049), ce qui justifie le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)\\
&= \mathbb{E}\big(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + \mathbb{E}(X)^2\big)\\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(linéarité de l'espérance)}\\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 14

- Supposons X presque sûrement constante. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X=x) = 1$. Alors la variable aléatoire $X - x$ est nulle presque sûrement donc est d'espérance nulle :
$$\mathbb{E}(X-x) = 0 \quad \text{et donc} \quad \mathbb{E}(X) = x.$$
Il s'ensuit que la variable $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2$ est nulle presque sûrement, donc d'espérance nulle. On en déduit $\mathbb{V}(X) = 0$.
- Réciproquement, si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors la variable aléatoire $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2$ est positive et d'espérance nulle, donc elle est nulle presque sûrement, ce qui implique que X est presque sûrement constante (égale à son espérance).

Proposition 14 On a, par linéarité de l'espérance :
$$(aX+b) - \mathbb{E}(aX+b) = aX + b - \big(a\mathbb{E}(X) + b\big) = a\big(X - \mathbb{E}(X)\big)$$
puis :
$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\big[a^2\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\big] = a^2\,\mathbb{E}\big[\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\big] = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

Exercice 15 Comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $n^2\,\mathbb{P}(X=n) = n^2\,p\,(1-p)^{n-1}$.
Comme $p \in \,]0,1[$, on a $|1-p| < 1$, donc la série $\sum n^2\,p\,(1-p)^{n-1}$ converge (par exemple, grâce à la règle de d'Alembert), donc X admet une variance. D'après la formule de König-Huygens, on a :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \frac{1}{p^2}.$$
Il reste à calculer $\mathbb{E}(X^2)$. On a, d'après le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-1} = p(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}.$$
En dérivant deux fois terme à terme le développement en série entière :
$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$
on obtient :
$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = p\,(1-p)\,\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

puis

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

et donc finalement :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\cdot$$

Exercice 16 Comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $n^2\,\mathbb{P}(X=n) = n^2\,\dfrac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}\cdot$ On montre, par exemple en utilisant la règle de d'Alembert, que la série $\sum n^2\,\dfrac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$ converge, donc X admet une variance. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \lambda^2.$$

Il reste à calculer $\mathbb{E}(X^2)$. On a, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!} &= \lambda^2\,e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\\ &= \lambda^2\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda$$

et donc finalement :

$$\mathbb{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Proposition 15 On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\big[\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\big]\\ &= \mathbb{E}\big(XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{(linéarité de l'espérance)}\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

Exercice 17

- * D'une part, la variable X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{-2,-1,1,2\}$, elle est évidemment d'espérance nulle.
  * D'autre part, la variable aléatoire $X\,|X|$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{-4,-1,1,4\}$, elle est évidemment d'espérance nulle.

  On a donc :

  $$\operatorname{Cov}(X\,|X|) = \underbrace{\mathbb{E}(X\,|X|)}_{=0} - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=0}\,\mathbb{E}(|X|) = 0,$$

  donc X et $|X|$ sont décorrélées.

- En revanche, X et $|X|$ ne sont pas indépendantes, car par exemple :

$$\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{|X|=2\}\big)=0\neq\underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{=1/4}\,\underbrace{\mathbb{P}(|X|=2)}_{=1/2}$$

Exercice 18 Soit X et Y deux variables de Bernoulli décorrélées. Alors on a :

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(XY=1)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=1\})=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1).$$

Donc, les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ sont indépendants.
Par suite, X et Y sont indépendantes (*cf.* exercice 7 de la page 1010).

Proposition 17

- *Symétrie.* Évident d'après la définition.
- *Bilinéarité.* Par symétrie, il suffit de montrer la linéarité par rapport à la première variable. Soit $(X,Y,Z)\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})^3$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Notons $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$ les variables centrées associées respectivement à X, Y et Z :

$$\tilde{X}=X-\mathbb{E}(X),\quad \tilde{Y}=Y-\mathbb{E}(Y)\quad\text{et}\quad \tilde{Z}=Z-\mathbb{E}(Z).$$

On a, par linéarité de l'espérance :

$$(aX+bY)-\mathbb{E}(aX+bY)=a\,\tilde{X}+b\,\tilde{Y}$$

puis :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(aX+bY,Z)&=\mathbb{E}\Big[\big((aX+bY)-\mathbb{E}(aX+bY)\big)\big(Z-\mathbb{E}(Z)\big)\Big]\\&=\mathbb{E}\big((a\tilde{X}+b\tilde{Y})\,\tilde{Z}\big)\\&=\mathbb{E}\big(a\tilde{X}\tilde{Z}+b\tilde{Y}\tilde{Z}\big)\\&=a\,\mathbb{E}(\tilde{X}\tilde{Z})+b\,\mathbb{E}(\tilde{Y}\tilde{Z})\\&=a\operatorname{Cov}(X,Z)+b\operatorname{Cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

- *Positivité.* Évident par positivité de l'espérance.

Corollaire 19 Par bilinéarité (*cf.* le corollaire 18 de la page 1052) on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)&=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}}\operatorname{Cov}(X_i,X_j).\end{aligned}$$

Par symétrie de la covariance, on a :

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

ce qui donne la formule souhaitée.

Corollaire 20
Immédiat d'après le corollaire 19, puisque des variables indépendantes sont décorrélées.

Proposition 21

1. **Premier cas :** $\mathbb{V}(X) = 0$**.**
   Dans ce cas, X est constante presque sûrement (*cf.* exercice 14 de la page 1049), ce qui implique l'indépendance de X et Y. On a donc $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 = \sigma(X)\sigma(Y)$.
2. **Deuxième cas :** $\mathbb{V}(X) > 0$**.** Considérons la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{V}(\lambda X + Y). \end{array}$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda) = \mathbb{V}(X)\,\lambda^2 + 2\operatorname{Cov}(X, Y)\,\lambda + \mathbb{V}(Y),$$

  donc, comme $\mathbb{V}(X) \neq 0$, f est une fonction polynomiale de degré 2.
- D'autre part, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda) = \mathbb{V}(\lambda X + Y) \geqslant 0.$$

  Il en résulte que le discriminant $\Delta = \big(2\operatorname{Cov}(X, Y)\big)^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ est négatif ou nul, ce qui fournit :

$$\operatorname{Cov}(X, Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \quad \text{puis} \quad \big|\operatorname{Cov}(X, Y)\big| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Exercice 19
Appuyons-nous sur la démonstration de la proposition 21 de la page 1053.

- Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors on est dans le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz car :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y).$$

  Dans ce cas, X est presque sûrement constante (égale à son espérance).
  Ainsi, en prenant $(a, b) = (1, 0)$, la variable aléatoire $aX + bY$ est constante presque sûrement.
- Le cas $\mathbb{V}(Y) = 0$ se déduit du premier par symétrie du problème en X et Y.
- Supposons $\mathbb{V}(X) > 0$ et $\mathbb{V}(Y) > 0$. D'après la démonstration de la proposition 21 de la page 1053, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, le discriminant Δ est nul, ce qui revient à dire que f s'annule (une et une seule fois) sur $\mathbb{R}$.
  * Supposons que l'on soit dans le cas d'égalité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ le point d'annulation de f. On a :

$$\mathbb{V}(\lambda X + Y) = 0,$$

    donc la variable $\lambda X + Y$ est constante presque sûrement.

$*$ Réciproquement, supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la variable aléatoire $aX+bY$ soit constante presque sûrement. On a alors :

$$\mathbb{V}(aX+bY)=0.$$

Si b était nul, alors a ne le serait pas (car $(a,b)\neq(0,0)$) et alors, comme X n'est pas constante presque sûrement, la variable $aX+bY$ ne le serait pas non plus. On a donc $b\neq 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{V}\Big(\frac{a}{b}\,X+Y\Big)=0 \qquad \text{ou encore} \qquad f\Big(\frac{a}{b}\Big)=0.$$

Par suite, f possède un point d'annulation : son discriminant étant déjà négatif, il est donc nul.

Théorème 22 Soit $a>0$. Notons $Y=a\,\mathbb{1}_{\{X\geqslant a\}}$. Constatons que l'on a $X\geqslant Y$:

- si $\omega\in\{X\geqslant a\}$, alors $X(\omega)\geqslant a=Y(\omega)$;
- si $\omega\notin\{X\geqslant a\}$, alors, comme X est à valeurs positives, on a $X(\omega)\geqslant 0=Y(\omega)$.

Ainsi, par croissance de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X)\geqslant\mathbb{E}(Y)$. On a de plus :

$$\mathbb{E}(Y)=a\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{X\geqslant a\}}\big)=a\,\mathbb{P}(X\geqslant a).$$

Comme $a>0$, l'inégalité $\mathbb{E}(X)\geqslant a\,\mathbb{P}(X\geqslant a)$ donne le résultat souhaité :

$$\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$$

Théorème 23 Soit $\varepsilon>0$. La variable $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2$ est positive, d'espérance finie et son espérance vaut $\mathbb{V}(X)$. L'inégalité de Markov (appliquée en prenant $a=\varepsilon^2$) donne :

$$\mathbb{P}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\geqslant\varepsilon^2\Big)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\cdot$$

Comme on a de plus l'égalité d'événements :

$$\Big\{\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\geqslant\varepsilon^2\Big\}=\Big\{\big|X-\mathbb{E}(X)\big|\geqslant\varepsilon\Big\},$$

cela donne la formule souhaitée.

Exercice 20 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout $\alpha>0$:

$$\mathbb{P}(|X|\geqslant\alpha)=\mathbb{P}\big(\big|X-\mathbb{E}(X)\big|\geqslant\alpha\big)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha^2}\cdot$$

Donc, si $\alpha>0$ vérifie $\dfrac{2}{\alpha^2}\leqslant\dfrac{3}{4}$, *i.e.* $\alpha\geqslant\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, on a l'inégalité souhaitée :

$$\mathbb{P}(|X|\geqslant\alpha)\leqslant\frac{3}{4}\cdot$$

Proposition 24 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=n\,m \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{n}\Big)=m$$

puis, comme les variables X_k sont deux à deux indépendantes :

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n\,\sigma^2 \quad \text{donc} \quad \mathbb{V}\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}\cdot$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\bigg(\Big|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big| \geqslant \varepsilon\bigg) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\Big(\frac{S_n}{n}\Big)$$

ce qui, compte tenu de ce qui précède, donne le résultat souhaité :

$$\mathbb{P}\bigg(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big| \geqslant \varepsilon\bigg) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}\cdot$$

La loi faible des grands nombres s'ensuit immédiatement.

Exercice 21

1. Représentons pile par 1 et face par 0.
   Modélisons l'expérience par une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Ainsi, le nombre de piles obtenus après n lancers est $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et l'on a :
   $$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$
2. La linéarité de l'espérance, ainsi que l'indépendance des X_n, donnent :
   $$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} = \frac{1}{4n}\cdot$$
   Remarquons que :
   $$\Big\{\frac{2}{5} \leqslant Y_n \leqslant \frac{3}{5}\Big\} = \Big\{\Big|Y_n - \frac{1}{2}\Big| \leqslant \frac{1}{10}\Big\} = \Big\{\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| \leqslant \frac{1}{10}\Big\}$$
   et donc :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{2}{5} \leqslant Y_n \leqslant \frac{3}{5}\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| > \frac{1}{10}\Big)\\ &\geqslant 1 - \mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| \geqslant \frac{1}{10}\Big).\end{aligned}$$
   Par suite, il suffit de chercher n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:
   $$\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| \geqslant \frac{1}{10}\Big) \leqslant 0{,}05.$$
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$ donne :
   $$\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| \geqslant \frac{1}{10}\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{100}{4n} = \frac{25}{n}\cdot$$
   Pour $n \geqslant 500$, on a $\frac{25}{n} \leqslant 0{,}05$. Donc, $n_0 = 500$ répond à la question.

Proposition 25

(i) Le fait que le rayon de convergence soit au moins égal à 1 est justifié par le caractère borné de la suite $\big(\mathbb{P}(X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n : z \mapsto \mathbb{P}(X=n)\, z^n$. On a :

$$\|u_n\|_{\infty, D_f(0,1)} = \mathbb{P}(X=n).$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur le disque fermé $D_f(0,1)$.

Proposition 27 La fonction G_X est développable en série entière sur $]-1,1[$:

$$\forall t \in \,]-1,1[\quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, t^k.$$

En dérivant terme à terme, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}$, le développement en série entière de la dérivée n-ième de G_X :

$$\forall t \in \,]-1,1[\quad G_X^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, \frac{k!}{(k-n)!}\, t^{k-n}.$$

En évaluant en 0, il vient $G_X^{(n)}(0) = n!\, \mathbb{P}(X=n)$, d'où le résultat.

Théorème 28 Commençons par un lemme, qui nous servira également dans la démonstration du théorème 29.

Lemme 31

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n t^n$ soit égal à 1. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n \underset{t\to 1}{\longrightarrow} +\infty.$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ diverge. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n t^n$ vaut 1, il est possible de définir une fonction f sur $[0,1[$ par :

$$\forall t \in [0,1[\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n.$$

Comme les u_n sont positifs, la fonction f est croissante. Pour prouver que $f \underset{1}{\longrightarrow} +\infty$, il suffit donc de prouver que f n'est pas majorée.

Fixons $M \in \mathbb{R}$ et prouvons que f n'est pas majorée par M. Comme la série $\sum u_n$ diverge et que c'est une série à termes positifs, on a $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il existe donc un rang N_0 tel que $\sum\limits_{n=0}^{N_0} u_n > M$.

Pour $t \in [0,1[$, on a :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N_0} u_n t^n + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} u_n t^n.$$

La deuxième somme étant positive car tous ses termes sont positifs, on obtient :

$$f(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N_0} u_n t^n. \qquad (\star)$$

Par somme finie de limites, on a $\sum_{n=0}^{N_0} u_n t^n \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{N_0} u_n > M$, donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,1[\, \cap\,]1-\eta, 1[\quad \sum_{n=0}^{N_0} u_n t^n > M.$$

Pour un tel η, l'inégalité $(\star)$ donne alors :

$$\forall t \in [0,1[\, \cap\,]1-\eta, 1[\quad f(t) > M,$$

ce qui prouve que f n'est pas majorée par M. D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 28

Notons $a_n = \mathbb{P}(X = n)$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$.

La fonction G_X est alors définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$, et le théorème de dérivation terme à terme des séries entières donne :

$$\forall t \in\,]-R, R[\quad G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}. \qquad (\star)$$

- Si $R > 1$, alors on a $1 \in\,]-R, R[$, et l'évaluation en 1 de la relation précédente prouve que X est d'espérance finie et que $G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \mathbb{E}(X)$.
- Supposons désormais $R = 1$.
  - ∗ Supposons X d'espérance finie, c'est-à-dire que la série $\sum n a_n$ converge. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[-1, 1]$ à :

    $$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \qquad \text{avec} \qquad f_n : t \mapsto a_n t^n.$$

    - ⋆ La série $\sum f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $[-1, 1]$.
    - ⋆ Les fonctions f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$, on a $f_0' = 0$, et pour $n \geqslant 1$:

      $$\forall t \in [-1, 1] \quad f_n(t) = n a_n t^{n-1} \qquad \text{et donc} \qquad \|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = n a_n.$$

      Ainsi la série $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$.

    La fonction G_X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-1, 1]$ et l'on a :

    $$\forall t \in [-1, 1] \quad G_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

    En particulier, G_X est dérivable en 1 et l'on a $G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \mathbb{E}(X)$.
  - ∗ Supposons que X ne soit pas d'espérance finie, c'est-à-dire que la série $\sum n a_n$ diverge. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, le lemme 31 nous dit que :

    $$t\, G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n \underset{t\to 1}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et donc} \qquad G_X'(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} +\infty.$$

    Par le théorème de la limite de la dérivée, il en résulte que la fonction G_X n'est pas dérivable en 1.

Théorème 29 Commençons par constater que la variable aléatoire X admet une variance, c'est-à-dire un moment d'ordre 2, si, et seulement si, $X(X-1)$ est d'espérance finie. En effet, on a les équivalents :

$$n(n-1) \sim n^2 \qquad \text{donc} \qquad n(n-1)\mathbb{P}(X=n) \sim n^2\mathbb{P}(X=n),$$

donc, par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, les séries :

$$\sum n(n-1)\mathbb{P}(X=n) \qquad \text{et} \qquad \sum n^2\mathbb{P}(X=n)$$

sont de même nature.

Notons $a_n = \mathbb{P}(X=n)$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$. La fonction G_X est alors définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-R,R[$, et le théorème de dérivation terme à terme des séries entières donne :

$$\forall t \in]-R,R[\quad G_X''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2}. \qquad (\star)$$

- Si $R > 1$, alors on a $1 \in]-R,R[$, et l'évaluation en 1 de la relation précédente prouve que la variable aléatoire $X(X-1)$ est d'espérance finie et que $G_X''(1) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$.
- Supposons désormais $R = 1$.
  - $*$ Supposons $X(X-1)$ d'espérance finie, c'est-à-dire que la série $\sum n(n-1)a_n$ converge. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[-1,1]$ à :

$$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \qquad \text{avec} \qquad f_n : t \mapsto a_n t^n.$$

    - $\star$ Les fonctions f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$.
    - $\star$ La série $\sum f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $[-1,1]$.
    - $\star$ On a $f_0' = 0$ et, pour $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [-1,1] \quad f_n'(t) = n a_n t^{n-1} \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = n a_n = \mathrm{o}\big(n(n-1)a_n\big).$$

      Il en résulte que la série $\sum f_n'$ converge normalement, donc simplement, sur le segment $[-1,1]$.
    - $\star$ On a $f_0'' = f_1'' = 0$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall t \in [-1,1] \quad f_n''(t) = n(n-1)a_n t^{n-2} \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = n(n-1)a_n.$$

      Il en résulte que la série $\sum f_n''$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[-1,1]$.

    La fonction G_X est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[-1,1]$ et l'on a :

$$\forall t \in [-1,1] \quad G_X''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}.$$

    En particulier, G_X est deux fois dérivable en 1 et l'on a :

$$G_X''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big).$$

* Supposons que $X(X-1)$ ne soit pas d'espérance finie, *i.e.* la série $\sum n(n-1)a_n$ diverge. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, le lemme 31 de la page 1076 nous dit que :

$$t^2\,G_X''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n \underset{t\to1}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et donc} \qquad G_X''(t) \underset{t\to1}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, il en résulte que la fonction G_X', si elle était définie et continue en 1, ne serait pas dérivable en 1. Cela prouve que G_X'' n'est pas deux fois dérivable en 1.

Exercice 22 On note $q = 1-p$. Les trois premières lois considérées étant des lois finies, les fonctions génératrices associées sont des fonctions polynomiales, donc définies sur $\mathbb{R}$.

1. Notons $q = 1-p$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$G_X(t) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)\,t = (1-p) + pt = pt + q.$$

2. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,q^{n-k}\,t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k\,q^{n-k}$$
et donc, d'après la formule du binôme :
$$G_X(t) = (pt+q)^n.$$

3. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$G_X(t) = \sum_{k=a}^{b} \mathbb{P}(X=k)\,t^k = \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^{b} t^k.$$

4. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=k)\,t^k = p\,q^{k-1}t^k = p\,t\,(qt)^{k-1}.$$
On en déduit que la série $\sum \mathbb{P}(X=k)\,t^k$ converge si, et seulement si, $|qt| < 1$ c'est-à-dire $|t| < \dfrac{1}{q}$ et l'on a alors :
$$G_X(t) = p\,t \sum_{k=1}^{+\infty} (qt)^{k-1} = \frac{p\,t}{1-qt}\cdot$$

5. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X=k)\,t^k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\,t^k = e^{-\lambda}\,\frac{(\lambda\,t)^k}{k!}\cdot$$
Par convergence de la série de l'exponentielle, on en déduit que $\sum \mathbb{P}(X=k)\,t^k$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et :
$$G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Théorème 30 Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que G_X et G_Y soient définies en t. Cela signifie que les variables aléatoires t^X et t^Y sont d'espérance finie.

Comme X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi. On en déduit (*cf.* la proposition 9 de la page 1048) que leur produit t^{X+Y} est aussi d'espérance finie et que :

$$\mathbb{E}\big(t^{X+Y}\big) = \mathbb{E}\big(t^X\big)\,\mathbb{E}\big(t^Y\big)$$

c'est-à-dire :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t).$$

Exercice 23

1. Comme X et Y suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p), leurs fonctions génératrices sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont données par :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = (pt+q)^n \qquad \text{et} \qquad G_Y(t) = (pt+q)^m \quad \text{avec} \quad q = 1-p.$$

   Comme X et Y sont indépendantes, le théorème 30 de la page 1057 assure que la fonction génératrice de $X+Y$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t) = (pt+q)^n\,(pt+q)^m = (pt+q)^{n+m}.$$

   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $X+Y$ suit cette loi.

2. Comme X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, leurs fonctions génératrices sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont données par :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \qquad \text{et} \qquad G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}.$$

   Comme X et Y sont indépendantes, le théorème 30 de la page 1057 assure que la fonction génératrice de $X+Y$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}\,e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $X+Y$ suit cette loi.

S'entraîner et approfondir

19.1 Dans une salle de cinéma, il arrive X personnes souhaitant voir le film. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p. La capacité de la salle est de n places. On note Y le nombre de personnes ne pouvant entrer dans la salle car celle-ci est pleine.

1. Donner la loi de Y.
2. Donner la fonction génératrice de Y.
3. En déduire l'espérance de Y.

19.2 Soit $X_1, \ldots, X_p$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $U = \min(X_1, \ldots, X_p)$ et $V = \max(X_1, \ldots, X_p)$.

1. Donner, à l'aide d'une somme, une expression de $\mathbb{E}(U)$.
2. Donner, à l'aide d'une somme, une expression de $\mathbb{E}(V)$.
   Indication : introduire $Y_j = n + 1 - X_j$ et utiliser la première question.

19.3
1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 admettent une espérance. Montrer que XY admet une espérance.
2. Soit $a \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire positive admettant une espérance. Montrer que :
$$(1 - a)\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}\big(X\, \mathbb{1}_{X \geqslant a\, \mathbb{E}(X)}\big).$$

19.4 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour toutes fonctions bornées f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)\, \mathbb{E}\big(g(Y)\big).$$

19.5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \text{avec} \quad Y_k = X_k\, X_{k+1}.$$
Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

19.6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 admet une espérance et une variance (que l'on suppose non nulle). On note σ l'écart type de X_1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, ainsi que :
$$U = \sum_{k=1}^{a} X_k \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{k=1+b}^{a+b} X_k.$$
Déterminer le coefficient de corrélation de U et V.

19.7 On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un à un les jetons, sans remise, et l'on note $(u_1,\dots,u_n)$ les numéros obtenus, dans l'ordre d'apparition. On dit que le couple (i,j) est une inversion si :

$$1 \leqslant i < j \leqslant n \qquad \text{et} \qquad u_i > u_j.$$

On note X le nombre d'inversions. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $i<j$, on note $Y_{i,j}$ la variable de Bernoulli associée à l'événement « (i,j) est une inversion ».

1. Quelle est la loi de $Y_{i,j}$?
2. En déduire l'espérance de X.
3. (a) Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$, déterminer $\operatorname{Cov}(Y_{i,j}, Y_{k,\ell})$.
   On devra distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de i,j,k,ℓ.
   (b) Montrer que :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)}{36} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}\cdot$$

19.8 Inégalité de Markov généralisée
Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, positive et vérifiant : $\forall x > 0 \quad \varphi(x) > 0$.

Supposons que $\varphi(X)$ soit d'espérance finie. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\big(X \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)}{\varphi(\varepsilon)}\cdot$$

19.9 On dispose d'un dé à n faces (avec $n \geqslant 2$), qu'on lance deux fois. On note X et Y les résultats respectifs des deux lancers.

On souhaite prouver qu'il est impossible de piper le dé de manière à ce que la variable aléatoire $X+Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$? Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on ait réussi à le faire.

1. Donner une expression de $G_{X+Y}(t)$, où G_{X+Y} désigne la fonction génératrice de $X+Y$.
   Préciser les racines (avec multiplicité) de la fonction polynomiale G_{X+Y}.
2. Quelle relation existe-t-il entre G_{X+Y} et G_X ?
3. Aboutir à une contradiction.

⋆ **19.10 Formule du crible**
Pour tout événement B, on note $\mathbb{1}_B$ la fonction indicatrice de B, définie par :

$$\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $A_1,\dots,A_n$ des événements d'un même espace probabilisé.

1. Justifier que : $\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbb{1}_{A_k}\big)$.
2. En développant puis en passant à l'espérance, obtenir alors la **formule du crible** :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big).$$

19.11 Soit $p \in [0,1]$. Pierre et Marie effectuent une suite de parties d'un jeu, les parties étant numérotées $1, 2, \ldots$ La probabilité que Pierre gagne une partie vaut p, et celle que Marie gagne vaut $q = 1 - p$. Les parties sont indépendantes. On note a_{2n} la probabilité qu'il y ait égalité après la $2n$-ème partie, c'est-à-dire que Pierre et Marie aient chacun gagné n parties. On note b_{2n} la probabilité que, pour la première fois après la $2n$-ème partie, Pierre et Marie soient à égalité.
On considère de plus, lorsque cela a un sens :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}\, x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}\, x^{2n}.$$

1. Exprimer a_{2n} en fonction de n.
2. Établir une identité vérifiée par A et B.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant $A(x)$. Pour quelles valeurs de p la fonction A est-elle définie en 1 ?
4. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[\quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}} - 1$$

   puis expliciter $B(x)$.
5. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité.

Solution des exercices

19.1 Posons $q = 1-p$.

1. • On a $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - q^n$.
   • Pour $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=n+k) = p\,q^{n+k-1}$.
2. • Pour $k \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y=k)t^k = pq^{n+k-1}t^k = pq^{n-1}(qt)^k,$$

   donc la série $\sum \mathbb{P}(Y=k)t^k$ converge absolument si, et seulement si, $|qt| < 1$, c'est-à-dire $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$.
   • Pour $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, on a :

$$G_Y(t) = (1-q^n) + pq^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(qt)^k = 1 - q^n + \frac{pq^n t}{1-qt}.$$

3. Comme $q \in]0,1[$, on a $1 \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$. Par suite, la fonction G_Y est dérivable en 1, donc Y est d'espérance finie et l'on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$.
   Pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, on a :

$$G'_Y(t) = \frac{pq^n}{1-qt} + \frac{pq^{n+1}t}{(1-qt)^2},$$

   donc on obtient :

$$\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = \frac{pq^n}{1-q} + \frac{pq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{q^n}{p}.$$

19.2 1. La variable aléatoire U est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, elle est donc d'espérance finie. La proposition 3 de la page 1045 donne :

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(U \geqslant k).$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\{U \geqslant k\} = \bigcap_{j=1}^{p}\{U_j \geqslant k\}$ donc par indépendance des variables $X_1, \dots, X_p$, on a :

$$\mathbb{P}(U \geqslant k) = \prod_{j=1}^{p}\mathbb{P}(X_j \geqslant k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^p$$

ou encore, après un changement d'indice $i = n-k+1$:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n} i^p.$$

2. Pour $j \in [\![1,p]\!]$, notons $Y_j = n+1-X_j$. On a :

$$\begin{aligned} V = \max(X_1,\dots,X_p) &= \max(n+1-Y_1,\dots,n+1-Y_p) \\ &= n+1-\min(Y_1,\dots,Y_p) \\ &= n+1-\widetilde{U} \quad \text{avec} \quad \widetilde{U} = \min(Y_1,\dots,Y_p). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_p$ suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et l'indépendance de $X_1,\dots,X_p$ entraîne celle de $Y_1,\dots,Y_p$. On peut donc appliquer le résultat de la première question :

$$\mathbb{E}(\widetilde{U}) = \frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^n i^p$$

et donc :

$$\mathbb{E}(V) = n+1-\frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^n i^p.$$

19.3 1. Question classique : voir la proposition 11 de la page 1049.

2. Écrivons :

$$X = X\,\mathbb{1}_{X<a\mathbb{E}(X)} + X\,\mathbb{1}_{X\geqslant a\mathbb{E}(X)}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\big(X\,\mathbb{1}_{X<a\mathbb{E}(X)}\big) + \mathbb{E}\big(X\,\mathbb{1}_{X\geqslant a\mathbb{E}(X)}\big). \qquad (\star)$$

D'autre part, on a $X\,\mathbb{1}_{X<a\mathbb{E}(X)} < a\mathbb{E}(X)$. Donc, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(X\,\mathbb{1}_{X<a\mathbb{E}(X)}\big) \leqslant a\mathbb{E}(X).$$

La relation $(\star)$ donne alors :

$$\mathbb{E}(X) \leqslant a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\big(X\,\mathbb{1}_{X\geqslant a\mathbb{E}(X)}\big),$$

ce qui donne le résultat souhaité.

19.4 • Supposons X et Y indépendantes. Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (*cf.* la proposition 12 de la page 1008). Si de plus f et g sont bornées, alors les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont bornées, donc d'espérances finies, et l'on a alors :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)\,\mathbb{E}\big(g(Y)\big).$$

• Réciproquement, supposons que pour toutes fonctions bornées f et g, on ait :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)\,\mathbb{E}\big(g(Y)\big). \qquad (\star)$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \operatorname{Im} X \times \operatorname{Im} Y$, en prenant $f = \mathbb{1}_{\{x\}}$ et $g = \mathbb{1}_{\{y\}}$, alors :

$$f(X) = \mathbb{1}_{\{X=x\}}, \quad g(Y) = \mathbb{1}_{\{Y=y\}} \qquad \text{et} \qquad f(X)g(Y) = \mathbb{1}_{\{X=x\}\cap\{Y=y\}}$$

donc :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \mathbb{P}(X=x) \qquad \mathbb{E}\big(g(Y)\big) = \mathbb{P}(Y=y)$$

et

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big).$$

L'égalité $(\star)$ donne donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

donc X et Y sont indépendantes.

19.5 Pour $k\in[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire Y_k, comme produit de deux variables de Bernoulli, est une variable de Bernoulli, et l'on a :

$$\{Y_k=1\}=\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=1\}$$

donc par indépendance de X_k et X_{k+1} :

$$\mathbb{P}(Y_k=1)=\mathbb{P}(X_k=1)\,\mathbb{P}(X_{k+1}=1)=p^2.$$

Donc, Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2. On a donc :

$$\mathbb{E}(Y_k)=p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_k)=p^2\,(1-p^2).$$

- L'espérance de S_n s'obtient simplement par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k)=\sum_{k=1}^{n}p^2=n\,p^2.$$

- Par bilinéarité et symétrie de la covariance, on a :

$$\mathbb{V}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}(Y_i,Y_j).$$

La première somme est connue et vaut $n\,p^2\,(1-p^2)$. Il s'agit de calculer la seconde.

* Si $j=i+1$, alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_i,Y_j)&=\operatorname{Cov}(Y_i\,Y_{i+1})\\&=\mathbb{E}(Y_i\,Y_{i+1})-\mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1})\\&=\mathbb{E}(X_i\,X_{i+1}^2\,X_{i+2})-p^4.\end{aligned}$$

Comme produit de variables de Bernoulli, la variable $X_i\,X_{i+1}^2\,X_{i+2}$ est une variable de Bernoulli et, par indépendance de X_i, X_{i+1} et X_{i+2}, son paramètre (et donc son espérance) vaut p^3. On obtient donc :

$$\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=p^3-p^4=p^3(1-p).$$

* Si $j\geqslant i+2$, alors, les variables X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1} étant mutuellement indépendantes, les couples (X_i,X_{i+1}) et (X_j,X_{j+1}) sont indépendants (conséquence de l'exercice 9 de la page 1010), et par suite les variables Y_i et Y_j sont indépendantes donc décorrélées (*i.e.* de covariance nulle).

On obtient finalement :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}(Y_i,Y_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(Y_i,Y_{i+1})=(n-1)\,p^3\,(1-p)$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n)&=n\,p^2\,(1-p^2)+2(n-1)\,p^3\,(1-p)\\&=p^2\,(1-p)\,\big(3np+n-2p\big).\end{aligned}$$

19.6 La coefficient de corrélation de U et V est, sous réserve qu'il soit bien défini :

$$\rho(U,V) = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)} = \frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{\mathbb{V}(U)}\sqrt{\mathbb{V}(V)}}.$$

- Comme les variables $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes, elles sont *a fortiori* deux à deux indépendantes, donc on a :

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{a} X_k\right) = \sum_{k=1}^{a} \mathbb{V}(X_k) = a\,\sigma^2 \quad \text{et de même} \quad \mathbb{V}(V) = a\,\sigma^2.$$

- Par propriété de bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{a} X_i, \sum_{j=1+b}^{a+b} X_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1+b}^{a+b} \mathrm{Cov}(X_i,X_j).\end{aligned}$$

  On a de plus $\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

  * Si $b \geqslant a$, alors tous les termes de la double somme précédente sont nuls, et on a $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$.
  * Si $b \leqslant a-1$, alors il y a $a-b$ termes non nuls dans la somme précédente (ceux correspondant à $i=j\in [\![1+b,a]\!]$). On a alors $\mathrm{Cov}(U,V) = (a-b)\sigma^2$.

En conclusion, on a :

$$\rho(U,V) = \begin{cases} \dfrac{a-b}{a} & \text{si } b\leqslant a-1 \\ 0 & \text{si } b \geqslant a.\end{cases}$$

19.7 1. Compte tenu de l'expérience aléatoire réalisée, il est clair que le couple (i,j) a autant de chance d'être une inversion que de ne pas l'être. La variable $Y_{i,j}$ suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

2. La variable aléatoire X s'exprime à l'aide des $Y_{i,j}$:

$$X = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Y_{i,j}.$$

   Donc, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{E}(Y_{i,j}).$$

   Compte tenu de la loi des variables aléatoires $Y_{i,j}$, elles sont toutes d'espérance $\frac{1}{2}$. On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

3. (a) Soit i, j, k, ℓ vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$.
Comme $Y_{i,j}$ et $Y_{k,\ell}$ sont des variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, on a :

$$\operatorname{Cov}(Y_{i,j}, Y_{k,\ell}) = \mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}) - \mathbb{E}(Y_{i,j})\mathbb{E}(Y_{k,\ell}) = \mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}) - \frac{1}{4}\cdot$$

Il reste à déterminer $\mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,\ell})$. Comme $Y_{i,j}Y_{k,\ell}$ est également une variable de Bernoulli, on a $\mathbb{E}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}) = \mathbb{P}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}=1)$.

- Compte tenu de l'expérience aléatoire réalisée, si les quatre entiers i, j, k et ℓ sont deux à deux distincts, les variables $Y_{i,j}$ et $Y_{k,\ell}$ sont indépendantes, donc de covariance nulle.

  Remarque Ce résultat, obtenu ici d'une manière intuitive, peut aussi s'obtenir en modélisant l'expérience aléatoire *via* un espace probabilisé, par un raisonnement analogue à celui qui suit.

- Supposons $i = k$ et $j \neq \ell$. Pour déterminer $\mathbb{P}(Y_{i,j}Y_{i,\ell} = 1)$, modélisons l'expérience par l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est l'ensemble des n-arrangements de $[\![1, n]\!]$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme (en effet, chacun des $n!$ arrangements a autant de chance d'être obtenu qu'un autre).
  On cherche la probabilité de l'événement

  $$A \;:\; « \;(i,j) \text{ et } (i,\ell) \text{ sont des inversions} \;».$$

  On a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{n!}\operatorname{card}(A)$. Dénombrons A ; pour construire un n-arrangement $(u_1, \ldots, u_n)$ appartenant à A, procédons à deux choix successifs :

  * commençons par construire le $(n-3)$ arrangement $(u_p)_{p\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j,\ell\}}$: il y a $\dfrac{n!}{3!} = \dfrac{n!}{6}$ possibilités ;
  * construisons ensuite la liste (u_i, u_j, u_ℓ) avec les trois numéros restants, la contrainte étant d'avoir $u_i > u_j$ et $u_i > u_\ell$; on fixe donc u_i au maximum des trois numéros restants, et il nous reste deux possibilités pour le couple (u_j, u_ℓ).

  Cela nous mène à :

  $$\operatorname{card}(A) = 2\,\frac{n!}{6} = \frac{n!}{3} \qquad \text{et donc} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\cdot$$

  On obtient dans ce cas :

  $$\operatorname{Cov}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\cdot$$

- Dans le cas $k \neq i$ et $j = \ell$, on obtient, par un raisonnement analogue, la même covariance de $\dfrac{1}{12}\cdot$

- Traitons le cas $i < j = k < \ell$. Considérons à nouveau l'événement :

$$A \;:\; \text{« } (i,j) \text{ et } (j,\ell) \text{ sont des inversions ».}$$

Construisons un n-arrangement $(u_1,\ldots,u_n)$ appartenant à A en effectuant deux choix successifs :

  ∗ commençons par construire le $(n-3)$ arrangement $(u_p)_{p\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j,\ell\}}$: il y a $\dfrac{n!}{3!} = \dfrac{n!}{6}$ possibilités ;

  ∗ construisons ensuite la liste (u_i,u_j,u_ℓ) avec les trois numéros restants ; la contrainte $u_i > u_j > u_\ell$ ne nous laisse qu'une seule possibilité.

Cela mène à :

$$\operatorname{card}(A) = \frac{n!}{6} \qquad \text{et donc} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}\cdot$$

On obtient dans ce cas :

$$\operatorname{Cov}(Y_{i,j}Y_{k,\ell}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}\cdot$$

- Il reste à traiter le cas $k < \ell = i < j$, qui se ramène au cas précédent en échangeant les couples (i,j) et (k,ℓ). On obtient dans ce cas une covariance valant également $-\frac{1}{12}$.

(b) Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\Bigg(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Y_{i,j}\Bigg)\\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{V}(Y_{i,j}) + \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ 1\leqslant k<\ell\leqslant n\\ (i,j)\neq(k,\ell)}} \operatorname{Cov}(Y_{i,j},Y_{k,\ell}). \qquad (\star)\end{aligned}$$

- Puisque les variables $Y_{i,j}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, elles ont pour variance $\frac{1}{4}$, et donc :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{V}(Y_{i,j}) = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{n(n-1)}{8}\cdot$$

- En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ 1\leqslant k<\ell\leqslant n\\ (i,j)\neq(k,\ell)}} \operatorname{Cov}(Y_{i,j},Y_{k,\ell}) = \frac{1}{12}\Big(\operatorname{card}(\Gamma_1)+\operatorname{card}(\Gamma_2)-\operatorname{card}(\Gamma_3)-\operatorname{card}(\Gamma_4)\Big)$$

avec :

$$\Gamma_1 = \big\{(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \mid i<j,\ k<\ell,\ i=k,\ j\neq\ell\big\},$$

$$\Gamma_2 = \big\{(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \mid i<j,\ k<\ell,\ i\neq k,\ j=\ell\big\},$$

$$\Gamma_3 = \big\{(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i<j=k<\ell\big\},$$

$$\Gamma_4 = \big\{(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \mid k<\ell=i<j\big\}.$$

∗ Déterminons $\text{card}\,(\Gamma_1)$. Construire une liste (i,j,k,ℓ) appartenant à Γ_1 revient à :

⋆ choisir $i = k \in [\![1, n-2]\!]$;

⋆ choisir $j \in [\![i+1, n]\!]$: $n-i$ choix ;

⋆ choisir $\ell \in [\![i+1, n]\!] \setminus \{j\}$: $n-i-1$ choix.

On obtient :

$$\text{card}\,(\Gamma_1) = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)(n-i-1)$$

En posant $p = n-i-1$, il vient :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(\Gamma_1) = \sum_{p=1}^{n-2} (p+1)p = \sum_{p=1}^{n-2} p^2 + \sum_{p=1}^{n-2} p &= \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.\end{aligned}$$

∗ On voit ensuite que $\text{card}\,(\Gamma_2) = \text{card}\,(\Gamma_1)$, ce qui se prouve en remarquant que l'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc}\Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma_2 \\ (i,j,k,\ell) & \longmapsto & (n+1-j, n+1-i, n+1-\ell, n+1-k).\end{array}$$

∗ Déterminons $\text{card}\,(\Gamma_3)$. Construire une liste (i,j,k,ℓ) appartenant à Γ_3 revient à choisir 3 entiers appartenant à $[\![1, n]\!]$, à partir desquels la contrainte $i < j = k < \ell$ laisse une unique manière de construire la liste (i,j,k,ℓ). On a donc :

$$\text{card}\,(\Gamma_3) = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

∗ En échangeant les rôles de (i,j) et (k,ℓ), on obtient $\text{card}\,(\Gamma_4) = \text{card}\,(\Gamma_3)$.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(\Gamma_1) + \text{card}\,(\Gamma_2) - \text{card}\,(\Gamma_3) - \text{card}\,(\Gamma_4) \\ &= \frac{2n(n-1)(n-2)}{3} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.\end{aligned}$$

En reprenant la formule $(\star)$, on obtient le résultat souhaité :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)}{36} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}.$$

19.8 Soit $\varepsilon > 0$.

- Par hypothèse sur φ, la variable aléatoire $\varphi(X)$ est positive, et l'on a $\varphi(\varepsilon) > 0$. L'inégalité de Markov donne :

$$\mathbb{P}\big(\varphi(X) \geqslant \varphi(\varepsilon)\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)}{\varphi(\varepsilon)}. \tag{1}$$

- D'autre part, comme φ est croissante, on a :

$$X \geqslant \varepsilon \Longrightarrow \varphi(X) \geqslant \varphi(\varepsilon) \qquad \text{d'où l'inclusion} \qquad \{X \geqslant \varepsilon\} \subset \{\varphi(X) \geqslant \varphi(\varepsilon)\}$$

et donc, par croissance :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\big(\varphi(X) \geqslant \varphi(\varepsilon)\big). \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) donnent le résultat souhaité.

19.9 1. • Puisque la variable aléatoire $X+Y$ suit la loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$, sa fonction génératrice est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_{X+Y}(t) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} t^k = \frac{t^2}{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-2} t^j.$$

• La fonction polynomiale G_{X+Y} possède :
  * une racine double : 0 ;
  * $2n-2$ racines simples : les racines $(2n-1)$-ième de l'unité qui ne sont pas 1.

2. Étant donné que les variables aléatoires X et Y sont les résultats de deux lancers successifs d'un même dé, elles sont indépendantes et de même loi.
On en déduit que :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y = G_X^2.$$

3. Puisque X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, sa fonction génératrice est polynomiale. Alors, la relation $G_X^2 = G_{X+Y}$ implique que la fonction polynomiale G_{X+Y} n'a que des racines de multiplicité paire. C'est en contradiction avec la première question car, comme $n \geqslant 2$, on a $2n-2 \geqslant 2$, donc G_{X+Y} possède des racines simples.

19.10 1. On a :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\overline{A_k}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbb{1}_{A_k}\big).$$

2. • En développant, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbb{1}_{A_k}\big) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}\end{aligned}$$

et donc la relation obtenue à la première question donne :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

- En passant à l'espérance, on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}\big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}\big)$$

et donc, puisque pour tout événement B on a $\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_B\big)=\mathbb{P}(B)$, on obtient la formule du crible souhaitée :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big).$$

19.11 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pendant les $2n$-èmes première parties, le nombre de parties gagnées par Pierre suit une loi binomiale de paramètre $(2n,p)$. La probabilité que Pierre ait gagné n parties vaut donc :

$$a_{2n}=\binom{2n}{n}p^n\,q^n.$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, considérons les événements :

A_{2n} : « il y a égalité après la $2n$-ème partie »

B_{2n} : « il y a égalité pour la première fois après la $2n$-ème partie ».

On a $A_{2n}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_{2k}$ et donc $A_{2n}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A_{2n}\cap B_{2k})$.

Puisque les événements de la suite $(B_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, ceux de la suite $(A_{2n}\cap B_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ le sont aussi, donc par additivité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{2n})&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_{2n}\cap B_{2k}) && \text{(additivité)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_{2n}\mid B_{2k})\,\mathbb{P}(B_{2k}) && \text{(les } B_{2k} \text{ ne sont pas négligeables)}\\&=\mathbb{P}(B_{2n})+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_{2n}\mid B_{2k})\,\mathbb{P}(B_{2k}).\end{aligned}$$

Étant donné les hypothèses faites sur le jeu (indépendance des parties jouées), on admet que $\mathbb{P}(A_{2n}\mid B_{2k})=a_{2n-2k}$. La relation précédente donne alors :

$$a_{2n}=b_{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{2n-2k}\,b_{2k}.$$

En reconnaissant un produit de Cauchy, on obtient la relation suivante (pour x appartenant à l'ouvert de convergence absolue des séries considérées) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}b_{2n}x^{2n}+\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}b_{2n}x^{2n}\Big)$$

ce qui donne $A(x)=B(x)+A(x)B(x)$.

3. • Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)pqx^2}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)pqx^2}{n+1} \to 4pqx^2.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que :

∗ si $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$, la série numérique $\sum a_{2n}x^{2n}$ converge ;

∗ si $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$, la série numérique $\sum a_{2n}x^{2n}$ diverge.

Par suite, le rayon de convergence de la série entière définissant $A(x)$ vaut :

$$R = \frac{1}{\sqrt{4pq}}\cdot$$

• L'étude sur $[0,1]$ de la fonction $p \mapsto p(1-p)$ montre qu'elle atteint en $1/2$ son maximum qui vaut $1/4$. On en déduit que :

∗ pour $p \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on a $\dfrac{1}{4pq} > 1$, et alors la fonction A est définie en 1 ;

∗ pour $p = \dfrac{1}{2}$, il s'agit de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}\cdot$

En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot$$

Par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série considérée diverge, donc la fonction A n'est pas définie en 1.

4. • On a, pour $x \in]-R, R[$:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pq)^n x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pq)^n x^{2n}\right) - 1.$$

Un développement en série entière classique de la série du binôme donne :

$$\forall u \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{u^n}{4^n},$$

ce qui mène par changement de variable à :

$$\forall x \in]-R,R[\quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1.$$

• La relation sur les coefficients obtenue à la question 2 assure que la série entière définissant $B(x)$ a aussi pour rayon de convergence R, et donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R,R[\quad B(x) &= \frac{A(x)}{1+A(x)}\\ &= \sqrt{1-4pqx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1\right)\\ &= 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.\end{aligned}$$

5. L'événement E :« il n'y a jamais égalité » s'écrit :

$$E = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}}.$$

Les événements de la suite $(B_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} = 1 - B(1).$$

- **Cas** $p \neq 1/2$**.** Dans ce cas on peut évaluer en 1 l'expression de $B(x)$ obtenue à la question précédente :

$$\mathbb{P}(E) = 1 - B(1) = \sqrt{1-4pq}.$$

- **Cas** $p = 1/2$. Puisque la fonction A n'est pas définie en 1, on ne peut pas évaluer en 1 directement. En revanche, puisque la série $\sum b_{2n}$ converge, la série entière $\sum b_{2n}x^{2n}$ converge normalement sur $[-1,1]$, donc uniformément. Ainsi, l'application B est continue sur $[-1,1]$, et l'on a :

$$B(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} B(x).$$

L'expression de $B(x)$ obtenue pour $x \in\,]-1,1[$ à la question précédente permet de calculer cette limite, et l'on obtient finalement :

$$B(1) = 1 \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(E) = 0.$$

Remarque Dans le cas $p = 1/2$, on a obtenu que presque sûrement le cas d'égalité entre les deux joueurs se produit au cours du jeu.

Index

D

E

H

I

K

L

M

N

O

Q

R

S

T

U

V

W

Y

